TD 7.

Exercice 1.

(a) $a \in \mathbb{C}$. Montrer que si $f \in \mathcal{O}(A(a, r_1, r_2))$ alors $\exists!(f_1, f_2) \in \mathcal{O}(D(a, r_2)) \times \mathcal{O}(A(a, r_1, +\infty))$ telle que $\lim_{z \to \infty} f_2(z) = 0$ et $f = f_1 + f_2$ sur $A(a, r_1, r_2)$.

(b) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$. Montrer que $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$.

Exercice 2.

(a) Donner les développements en séries de Laurent de $z \mapsto \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ dans trois couronnes de centre O.

(b) Déterminer les résidus de $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$, $g(z) = z^3 \sin \dfrac{1}{z^2}$, $h(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$, en tous leurs points singuliers.

Exercice 3. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}$ et $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} dz$.

Exercice 4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$,
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5. Soient $n, p \in \mathbb{N}$, $n < p$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2p}} dx$ est convergente et calculer sa valeur en appliquant le théorème des résidus à une fonction méromorphe adéquate et à des demi-cercle centrés en 0.

Exercice 6. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(x+1)} dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$.

Indications : Les intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(x) \ln x dx$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(x) x^\alpha dx$ (avec R une fonction rationnelle sans pole réel et $0 < \alpha < 1$) peuvent se calculer en utilisant une détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et une intégration le long du chemin $\gamma_{\epsilon, A, \eta}$ définit par le bord du domaine $C(0, \epsilon, A) \setminus \{\mathrm{Re}(z) > 0, |\mathrm{Im}(z)| \leq \eta\}$. Dans le premier cas, on calculera une intégrale de $z \mapsto R(z) \mathrm{Log}^2(z)$.

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$ tel que $f(C(0,1)) \subset D(0,1)$. Montrer que l'équation $f(z) = z^n$ admet exactement n solutions comptées avec multiplicités.

Exercice 8. On considère la bande $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, a < \mathrm{Im} z < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est $1-$périodique alors $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nz}$ avec convergence uniforme sur les compacts de Ω.

(b) Calculer c_n en terme d'une intégrale de f.

Exercice 9.

(a) Montrer que les racines de $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ sont dans $A(0, 1, 2)$.

(b) Montrer que l'équation $az^n = e^z$ admet n racine dans $|z| < 1$ lorsque $a > e$.

Exercice 10. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}$ dont le bord est une union finie de courbe fermée de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit f une fonction méromorphe sur Ω et continue au voisinage du bord de Ω. Soit $A > \max_{\partial\Omega} |f|$, calculer le nombre de $A-$points de f dans ω en fonction du nombre de poles de f dans ω.

Exercice 11.

(a) Montrer que la fonction $z \mapsto \cot(\pi z)$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$. Calculer les résidus de chacun de ses poles.

(b) Soit C_n le carré de sommet $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Montrer que si $z \in \overset{\circ}{C_n}$,

$$I_n = \int_{\partial C_n} \frac{\cot(\pi t)dt}{t - z} = 2i[\pi \cot \pi z + \sum_{k=-n}^{k=n} \frac{1}{k - z}].$$

(c) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

(d) En déduire que $\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} (\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n})$ (convergence normale sur tout compact d'une série de fonctions méromorphes) et que $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n + 1)^2}$.

(e) Donner le développement de Laurent de la fonction cotangente et de $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$. (on utilisera le th. de Weierstrass).

Exercice 12. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par γ_n le bord orienté du carré $\{z = x + iy, \max(|x|, |y|) \leq n + \frac{1}{2}\}$.

(a) Montrer que $|\sin \pi z| \geq \sinh \frac{\pi}{2}$ pour $z \in \gamma_n$.

(b) Dans la suite, Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ admettant un nombre finis de poles $\{a_1, \ldots, a_n\}$ n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe des nombres positifs M, R et $\alpha > 1$ tels que $|z| \geq R$ entraine $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}$. Montrer que pour n assez grand,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \frac{\pi f(z)}{\sin \pi z} dz = \sum_{k=-n}^{k=n} (-1)^k f(k) + \sum_{j=1}^{p} \text{Rés}\left(\frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}, a_j\right).$$

(c) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_{\gamma_n} \frac{\pi f(z)}{\sin \pi z} dz = 0$.

(d) En déduire que $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k f(k) = -\sum_{j=1}^{p} \text{Rés}\left(\frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}, a_j\right)$.

(e) Calculer $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{(k + a)^2}$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.