TD1 Ex4

1) On définit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $\varphi(x) = \frac{x-i}{x+i}$
de sorte qu'on a $\varphi(\mathbb{R}) \subset S^1$. En général, on calcule
$|\varphi(x)|^2 = \frac{(x-i)(\bar{x}+i)}{(x+i)(\bar{x}-i)} = \frac{|x|^2 + ix - i\bar{x} + 1}{|x|^2 - ix + i\bar{x} + 1} = \frac{|x|^2+1-2\operatorname{Im} x}{|x|^2+1+2\operatorname{Im} x}$

Ainsi $|\varphi(x)|^2 < 1 \iff \operatorname{Im} x > 0$ et φ induit une bijection de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$. De plus φ est bien holomorphe et son inverse, qui est aussi une homographie est holomorphe.

2) L'application $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(z) = \frac{z}{1-|z|}$ est un homéomorphisme. Si φ était un biholomorphisme, son inverse $\varphi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ serait une fonction holomorphe bornée donc constante par le Théorème de Liouville. C'est impossible.

3) Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un automorphisme. Comme φ envoie les compacts de $\mathbb{C}$ sur les compacts de $\mathbb{C}$, φ préserve les complémentaires des compacts de $\mathbb{C}$. En posant $\varphi(\infty) = \infty$, on en déduit que φ envoie voisinage de l'∞ sur voisinage de l'∞.
Donc φ se prolonge continûment à $\hat{\mathbb{C}}$.
Il existe en particulier une boule $B(0,R)$ telle que
$\varphi(\mathbb{C} \setminus B(0,R)) \subset \mathbb{C} \setminus B(0,1)$ ie $|\varphi(z)| \geq 1$ si $|z| \geq R$
En posant $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(\frac{1}{z})}$ ψ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
avec $|\psi(z)| \leq 1$ si $|z| \leq \frac{1}{R}$.
Ainsi ψ est bornée au voisinage de 0. Par le théorème de prolongement de Riemann, ψ se prolonge holomorphiquement en 0.
Cela signifie que $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se prolonge en $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $\infty \mapsto \infty$ application holomorphe.
D'après l'exercice 2 3), φ est rationnelle ie $\varphi(z) = \frac{P}{Q}$
avec $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, premiers entre eux.

Or φ est aussi une bijection donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $\frac{P(z)}{Q(z)} = \lambda \Leftrightarrow P(z) - \lambda Q(z) = 0$ n'a qu'une seule solution.
Ceci implique que $P - \lambda Q$ est de degré 1 $\forall \lambda$, i.e P et Q sont de degré 1 et $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc \neq 0)$
Comme $\varphi(\infty) = \infty$, $c = 0$ et on a $\varphi(z) = az+b$.
Réciproquement, on constate que $\varphi(z) = az+b$ $(a \neq 0)$ est bien un automorphisme de $\mathbb{C}$.

<u>Transitivité</u> : Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ la translation $z \mapsto z - z_1 + z_2$ envoie z_1 sur z_2 donc $Aut(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathbb{C}$.
Soit $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$. En appliquant une translation, on se ramène à $z_1 = 0$. On a donc une paire $(0, z_2)$ $(z_2 \neq 0)$. Par une homothétie $z \mapsto \frac{z}{z_2}$ on se ramène à la paire $(0,1)$. Ainsi $Aut(\mathbb{C})$ agit transitivement sur les paires de points distincts.
Ce n'est plus vrai sur les triplets : si $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ sont distincts il n'y a pas d'automorphisme φ tq $\varphi(0) = 0$ $\varphi(1) = 1$ $\varphi(z) = w$ car les deux premières conditions forcent φ à être l'identité.

4) Tout automorphisme $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ est de la forme $\varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ d'après Ex2 3). Comme ci-dessus, puisque φ est bijective on doit avoir $\deg P = \deg Q = 1$ i.e $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $ad-bc \neq 0$.
On constate de plus que les homographies sont bien des biholomorph car leurs inverses sont des homographies.
Prenons $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ trois points distincts.
En appliquant $z \mapsto \frac{1}{z - z_1}$ on se ramène à $z_1 = \infty$
En appliquant $z \mapsto z - z_2$ on se ramène à $z_2 = 0$
En appliquant $z \mapsto \frac{z}{z_3}$ on se ramène à $z_3 = 1$
Ainsi $\exists \varphi \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ tq $\varphi(z_1) = \infty$ $\varphi(z_2) = 0$ $\varphi(z_3) = 1$
et $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ agit transitivement sur les triplets de points.
Si $\varphi \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ vérifie $\varphi(\infty) = \infty$ $\varphi(0) = 0$ $\varphi(1) = 1$

Alors en posant $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $c=0$ et $\varphi(z) = az+b$ puis $b=0$ et $a=1$ donc $\varphi = id$. Comme précédemment, $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ n'agit pas transitivement sur les quadruplets de points.

5). Soit $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ $ad-bc=1$

$$\varphi(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}$$

donc $\operatorname{Im} \varphi(z) = (ad-bc)\dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} > 0$ et $\varphi(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$.
Comme φ^{-1} a la même forme, on a aussi $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ et $\varphi \in Aut(\mathbb{H})$.

6) On a $i \in \mathbb{H}$ et tout $z \in \mathbb{H}$ s'écrit $z = a+ib$ $b>0$
Avec la matrice $\begin{pmatrix} b^{1/2} & 0 \\ 0 & b^{-1/2} \end{pmatrix}$ on transforme i en ib
avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on transforme ib en $a+ib$.
Ainsi $Aut(\mathbb{H})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$. Comme $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$ sont biholomorphes, la même chose est vraie pour $\mathbb{D}$.

7) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un biholomorphisme vérifiant $f(0) = 0$
D'après le lemme de Schwartz on a $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.
En l'appliquant à f^{-1} on a $|f^{-1}(z)| \leq |z|$ et $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$.
Or d'après la règle de la chaîne $f'(0) \cdot (f^{-1})'(0) = 1$.
On doit donc avoir $|f'(0)| = |(f^{-1})'(0)| = 1$. Le lemme de Schwartz à nouveau nous dit $f(z) = \alpha z$ avec $|\alpha| = 1$.

8) L'exercice précédent montre que tout automorphisme de $\mathbb{D}$ ou de $\mathbb{H}$ est une homographie. Notons $\varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$
et $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ $ad-bc=1$. $g \in Aut(\mathbb{H})$.
On obtient un automorphisme de $\mathbb{D}$ en composant $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$
Cette homographie a pour matrice (à un scalaire près)

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ai-b & ai+b \\ ci-d & ci+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+d)i+c-b & (a-d)i+b+c \\ (a-d)i-b-c & (a+d)i+b-c \end{pmatrix}$$

En multipliant cette matrice par i, elle prend la forme $\begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$
Quitte à la multiplier encore, on peut supposer $|u|^2 - |v|^2 = 1$
car son déterminant est >0.
On obtient $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad ad-bc \right.$
et $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = PU(1,1) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \quad u,v \in \mathbb{C} \quad |u|^2 - |v|^2 = 1 \right\}$
Bien sûr, ces deux groupes sont isomorphes via φ.

TD 2 Ex 1

1) C'est du cours : les ouverts de carte sont construits à partir des ouverts U de X tq $U \cap \gamma U = \emptyset$ $\forall \gamma \in \Gamma$. Dans ce cas l'application $p : X \to X/\Gamma$ restreinte à U est une bijection sur son image.
Pour tout $x \in X/\Gamma$, on choisit $\bar{x} \in X$ tq $p(\bar{x}) = x$ puis un ouvert U comme ci-dessus qui contient $\bar{x}$ et un ouvert de carte (V, φ) qui contient $\bar{x}$.
L'ouvert $U \cap V$ muni de $\varphi|_{U\cap V}$ forme un système de ca
Lue dans ces cartes, la projection p est l'identité. C'est donc holomorphe, et même c'est un biholomorphisme local.

2) Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement avec X une surface de Riema
Soit $x \in X$ il existe une carte (U, φ) de X contenant x et un ouvert trivialisant V contenant x avec
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "p"'] & & V \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Pour tout $f \in F$ on considère l'ouvert $\psi^{-1}(\ \times\{f\})$ muni de la carte $\varphi \circ p$. Dans ces cartes, les applications de projection sont l'identité et les applications de changement de cartes sont les mêmes que pour X, ils sont donc holomorphes.
Ainsi on a bien un atlas sur $\tilde{X}$ qui rend p holomorphe.
Comme p est un homéomorphisme local, p ne peut pas être ramifié si p est holomorphe, c'est un biholomorphisme local : ainsi la construction précédente est la seule possible.

3) L'application $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\exp$ est holomorphe. $\mathbb{C}$ est donc le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ <u>en tant que surface de Riema</u>

Soit $D_{\alpha,\beta} = \{ z \in \mathbb{C} \quad \alpha < |z| < \beta \}$: c'est une couronne.
Sa preimage par exp est $U_{\alpha,\beta} = \{ z \in \mathbb{C}, \ln\alpha < \operatorname{Re} z < \ln\beta \}$
Cet ouvert est simplement connexe, c'est donc le revêtement universel de $D_{\alpha,\beta}$ comme surface de Riemann.
Par le théorème de représentation de Riemann, il est biholomorphe à $\mathbb{D}$.

4) Comme $\pi_1(\mathbb{D}\setminus\{0\}) = \mathbb{Z}$, les revêtements finis sont classifiés par les sous-groupes d'indice fini de $\mathbb{Z}$ à savoir $n\mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{N}$.
L'application
$$\begin{aligned} \mathbb{D}\setminus\{0\} &\to \mathbb{D}\setminus\{0\} \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$
est un revêtement de groupe $n\mathbb{Z}$ et elle est holomorphe. Tout revêtement fini de $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ et connexe est donc biholomorphe à $\mathbb{D}\setminus\{0\}$.

5) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui ne prend pas les valeurs z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$
En remplaçant f par $\varphi\circ f$ avec $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ on peut supposer que $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ le rev. universel.
On a le diagramme suivant:
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{C} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \end{tikzcd}$$
Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe il existe un relevé $\tilde{f}$. Comme φ est un biholomorphisme local, $\tilde{f}$ est holomorphe ($\tilde{f} = \varphi^{-1}\circ f$ localement)
Par le théorème de Liouville, $\tilde{f}$ est constante donc f aussi.

Exercice 2

1) On constate que $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ agit holomorphiquement, proprement et librement sur $\mathbb{C}$. En effet $\forall K \subset \mathbb{C}$ compact
$$\begin{aligned} \{ \gamma \in \Gamma \quad \gamma.K \cap K \neq \emptyset \} &= \{ (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } \exists z \in K \\ &\qquad me_1 + ne_2 + z \in K \} \\ &= \{ (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \quad me_1 + ne_2 \in \underbrace{K+K}_{\text{compact}} \} \text{ est fini.} \end{aligned}$$

Ainsi $T_{e_1,e_2} = \mathbb{C}/_\Gamma$ est une surface de Riemann et $p : \mathbb{C} \to T_{e_1,e_2}$ un revêtement.

On obtient un système de cartes à partir d'un domaine fondamental.
Ici p_z $\quad]0,1[\times]0,1[\longrightarrow \mathbb{C}$

$$(s, t) \longmapsto z + se_1 + te_2$$

a pour image un ouvert U_z de $\mathbb{C}$ qui est tel que
$p|_{U_z} : U_z \longrightarrow V_z \subset T_{e_1,e_2}$ est un biholomorphisme.

L'ensemble des $\left(V_z, \left(p|_{U_z}\right)^{-1}\right)$ forme un système de cartes sur T_{e_1,e_2}

2) Par définition, si $f : T_{e_1,e_2} \to \mathbb{C}$ est méromorphe alors $f\circ p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est méromorphe et Γ-invariante.
Réciproquement, toute fonction $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ méromorphe et vérifiant $\tilde{f}(z+e_1) = \tilde{f}(z+e_2) = \tilde{f}(z)$ passe au quotient et définit une fonction méromorphe sur T_{e_1,e_2}.

3) L'application $\quad [0,1]^2 \longrightarrow T_{e_1,e_2}$

$$(s,t) \longmapsto p(se_1 + te_2)$$ est surjective

et $[0,1]^2$ est compact donc T_{e_1,e_2} est compacte. Elle n'est donc pas isomorphe à $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{D}$.
Posons $\varphi(z) = z/e_1$ $\qquad \varphi(\Gamma) = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ avec $\tau = \frac{e_2}{e_1}$
On en déduit que φ induit un biholomorphisme $T_{e_1,e_2} \simeq T_{1,\tau} = T_\tau$
Si $\mathrm{Im}\,\tau < 0$, il suffit de remplacer τ par $-\tau$.

4) L'application $\quad \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow T_{e_1,e_2}$

$$(s, t) \longmapsto p(se_1 + te_2)$$

est un homéomorphisme. Donc tous les T_{e_1,e_2} sont homéomorphes à $S^1\times S^1$.
Supposons que $T_\tau \underset{\sim}{\xrightarrow{\phi}} T_\nu$ sont isomorphes.
On considère les revêtements universels $p_\tau : \mathbb{C} \to T_\tau$ et $p_\nu : \mathbb{C} \to T_\nu$
ainsi que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, dotted, "\psi"] \arrow[d, "p_\tau"'] \arrow[dr, dotted] & \mathbb{C} \arrow[d, "p_\nu"] \\ T_\tau \arrow[r, "\phi"'] & T_\nu \end{tikzcd}$$

L'application $\phi \circ p_\tau$ se relève en $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bihol. local.

On ne change rien en composant ψ par un élément de Γ_τ au départ, et de Γ_ν à l'arrivée.
Appliquons le même argument à φ^{-1} : on trouve $\psi' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui le relève. En composant $\psi' \circ \psi$ on trouve une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui est un automorphisme du revêtement p_τ.
Quitte à appliquer une translation, on peut supposer que $\psi' \circ \psi$ fixe 0. Or un automorphisme de revêtement (connexe) qui fixe un point est l'identité. On a donc $\psi' \circ \psi$ (puis $\psi \circ \psi'$) $= \mathrm{id}$
Ainsi ψ est un automorphisme de $\mathbb{C}$. D'après le TD1 Ex4 3/
On a $\psi(z) = \alpha z + \beta$ et quitte à appliquer une translation $\psi(z) = \alpha z$
Comme $\psi(\Gamma_\tau) = \Gamma_\nu$ on a $\psi(1) = \alpha = a\nu + b$

$$\psi(\tau) = \alpha\tau = c\nu + d$$

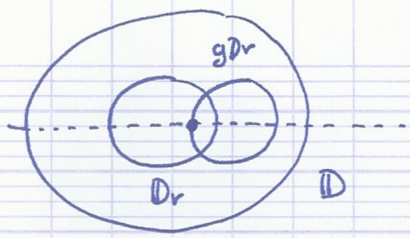
donc $\tau = \dfrac{\psi(\tau)}{\psi(1)} = \dfrac{c\nu + d}{a\nu + b}$ $\quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
Comme on peut appliquer le même raisonnement à φ^{-1}, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible sur $\mathbb{Z}$. Comme $(1, \tau)$ et $(1, \nu)$ sont des bases positivement orientées de $\mathbb{C}$, on doit avoir $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0$ ainsi $ad - bc = 1$.

Exercice 3

1) $A = \left\{ z \to \dfrac{az+b}{bz+a} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a^2 - b^2 = 1 \right\}$
Quitte à changer $(a,b) \mapsto (-a,-b)$ on peut supposer $a > 0$.
On écrit alors $a = \cosh\varphi$ $b = \mathrm{sh}\varphi$. Un peu de trigonométrie hyperbolique montre que l'application $\mathbb{R} \to A$ $\varphi \mapsto \left(z \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}\varphi z + \mathrm{sh}\varphi}{\mathrm{sh}\varphi z + \mathrm{ch}\varphi} \right)$ est un isomorphisme de groupes.
$K = \left\{ z \mapsto \dfrac{a}{\bar{a}} z, \quad |a| = 1 \right\} = \{ z \mapsto e^{i\theta} z \}$
Ainsi K est isomorphe à S^1 comme groupe.

2) Soit $0 < r < 1$ et $g = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{sh}\varphi \\ \mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix}$. Supposons $gD_r \cap D_r \neq \emptyset$.
alors $\exists z$ avec $|z| < r$ et $\left| \dfrac{\mathrm{ch}\varphi z + \mathrm{sh}\varphi}{\mathrm{sh}\varphi z + \mathrm{ch}\varphi} \right| \leq r$.

Supposons $\varphi > 0$



Le dessin montre (argument géométrique homographie + symétrie) que c'est le cas ssi le point marqué est dans $\mathbb{D}_r$ ie $\dfrac{-r\,\mathrm{ch}\varphi + \mathrm{sh}\varphi}{-r\,\mathrm{sh}\varphi + \mathrm{ch}\varphi} < r$

$$\frac{-r + \mathrm{th}\varphi}{-r\,\mathrm{th}\varphi + 1} < r \iff \mathrm{th}\varphi < \frac{2r}{1+r^2} < 1$$

Ainsi $\varphi < \mathrm{Argth}\left(\frac{2r}{1+r^2}\right)$ est borné (même argument pour $\varphi < 0$).

3) Si $g \in PU(1,1)$ $\quad g = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$ $\quad |u|^2 - |v|^2 = 1$

En la multipliant à gauche et à droite par un élément de K on a

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & \\ & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\theta+\varphi)} u & e^{i(\theta-\varphi)} v \\ e^{i(\varphi-\theta)} \bar{v} & e^{-i(\theta+\varphi)} \bar{u} \end{pmatrix}$$

En posant $\theta + \varphi = -\arg u$ et $\theta - \varphi = -\arg v$ on se ramène à $u, v \in \mathbb{R}$

On a bien prouvé que $g = k_1 a k_2$ avec $k_1, k_2 \in K$ et $a \in A$.

4) Si $k_1 a k_2 \mathbb{D}_r \cap \mathbb{D}_r \neq \emptyset$ alors comme $k_2 \mathbb{D}_r = \mathbb{D}_r$

on a $\iff k_1 a \mathbb{D}_r \cap \mathbb{D}_r \neq \emptyset \iff a \mathbb{D}_r \cap k_1^{-1} \mathbb{D}_r \neq \emptyset$

$\iff a \mathbb{D}_r \cap \mathbb{D}_r \neq \emptyset$

L'application

$$\Phi_T : K \times [-T, T] \times K \longrightarrow PU(1,1)$$
$$(k_1, \varphi, k_2) \longmapsto k_1 \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{sh}\varphi \\ \mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix} k_2$$

a pour image un compact.

Si $\Gamma \subset PU(1,1)$ est un groupe discret, il ne rencontre ce compact qu'en un ensemble fini. Or si $g = k_1 a k_2 \in \Gamma$ vérifie $g\mathbb{D}_r \cap \mathbb{D}_r \neq \emptyset$ alors pour T assez grand, g est dans l'image de l'application Φ_T. On en déduit que Γ agit proprement discontinûment.

5) Soit $\Gamma \subset PU(1,1)$ discret sans torsion : si $g \in \Gamma \setminus \{1\}$.

fixe un point z alors quitte à conjuguer, on peut supposer $z = 0$.

On aura alors $g(z) = e^{i\theta} z$. avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

si g est une rotation rationnelle alors $g \in \Gamma$ est un élément de torsion, sinon g est une rotation irrationnelle et Γ n'est pas discret.

6) Il suffit de montrer que I_n est sans torsion puisque I_n est nécessairement discret dans $SL_2(\mathbb{R})$ (car inclus dans $SL_2(\mathbb{Z})$). Si $g \in I_n$ est de torsion, il est conjugué à une rotation (cf question précédente). Ses valeurs propres sont $e^{\pm i\theta}$ et $|\mathrm{Tr}\, g| = |2\cos\theta| < 2$.
Or $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod n$. donc $\mathrm{Tr}\, g = a+d \equiv 2 [n]$
Si $n \geq 4$ on a $\mathrm{Tr}\, g \notin \{-1, 0, 1\}$, contradiction.

7) Si it a une valeur d'adhérence dans X_n alors $\exists\, t_k \to +\infty$ et $\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \in I_n$ tq $\dfrac{a_k\, it_k + b_k}{c_k\, it_k + d_k}$ converge qd $k \to +\infty$ vers un élément de $\mathbb{H}$.

On $\mathrm{Im}\left(\dfrac{a_k i t_k + b_k}{c_k i t_k + d_k} \right) = \dfrac{t_k}{c_k^2 t_k^2 + d_k^2}$

Si $c_k = 0$ alors $d_k = \pm 1$ et $\dfrac{t_k}{c_k^2 t_k^2 + d_k^2} = t_k$ diverge

Si $c_k \neq 0$ alors $\dfrac{t_k}{c_k^2 t_k^2 + d_k^2} \leq \dfrac{1}{c_k t_k} \leq \dfrac{1}{t_k}$ qui ne peut converger dans $\mathbb{H}$

Dans tous les cas, on a une contradiction donc it n'a pas de valeur d'adhérence et X_n n'est pas compact.

Exercice 4

1) Par la formule du degré $\forall y \in \Sigma_h$ $\deg f = \sum_{x / f(x) = y} k_x f$
donc $k_x(f) \leq \deg f$
La formule de Riemann-Hurewicz donne $\sum_{x \in \Sigma_g} (k_x f - 1) = \deg f\, \chi(\Sigma_h) - \chi(\Sigma_g)$
Comme $\chi(\Sigma_h) = 2 - 2h$ et $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ sont pairs $\sum (k_x f - 1)$ aussi.

2) On a $f : \Sigma_g \to \Sigma_0$ non ramifié.

Par la formule de Riemann-Hurewicz $\chi(\Sigma_g) = 2 \deg f$
$2-2g = 2\deg f$

Or $2-2g \leq 2$ et $2\deg f \geq 2$ donc $g=0$ et $\deg f = 1$.
Or une application de degré 1 est un biholomorphisme.

3) Riemann-Hurewicz donne $2 = \deg f\,(2-2h) - (k_x - 1)$
Si $h>0$, ceci est impossible, on a donc $2 = 2\deg f - (k_x-1)$
or $k_x \leq \deg f$ par la question 1.
Donc $1 + k_x = 2\deg f \leq \deg f + 1 \Rightarrow \deg f = 1$
et f est à nouveau un biholomorphisme.

4) si $g = h \geq 1$, Riemann-Hurewicz donne
$(2-2g)(\deg f - 1) - \sum (k_x - 1) = 0$
Si $g=h=1$, $k_x = 1$ $\forall x$ et f est non ramifiée
Si $g=h>1$ alors $\deg f = 1$ et f est un biholomorphisme.

Exercice 5

1) Soit $K = \{x\}$. C'est un compact donc $\{g \in G \;\; gK \cap K \neq \emptyset\} = \mathrm{Stab}_x$ est fini.
Soit $x \in X$ et K un voisinage compact de x. $S = \{g \in G, gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini donc si $y \in K$ et $\mathrm{Stab}\{y\} \neq \{1\}$ alors l'élément non trivial qui stabilise y est dans S. Or un élément donné de $G \setminus \{1\}$ a un ensemble de points fixes discret par le théorème des zéros isolés. Donc l'ensemble des points fixes des éléments de S non triviaux intersecte K sur un ensemble fini. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'éléments de K dont le stabilisateur est non-trivial.

2) Soit $x \in X$, K un voisinage compact de x de sorte que $S = \{g \,/\, gK \cap K \neq \emptyset\}$ soit fini. Si $g \in S$ vérifie $g(x) \neq x$ on peut par séparation prendre K plus petit pour "enlever" g de S.

A la fin de ce processus fini, il ne reste que $S = Stab_x = G_x$.
On prend une carte (U, φ) contenant x avec $\varphi(x) = 0$.
On peut supposer $K \subset U$ quitte à le prendre plus petit.
On peut aussi remplacer K par $\bigcap_{g \in G_x} gK$ de sorte que K soit invariant par G_x.
En appliquant φ, on trouve un voisinage compact de 0 : L, invariant par G_x. Prenons $U \subset L$ un ouvert simplement connexe contenant 0 (par exemple une boule) et posons $V = \bigcap_{g \in G_x} gU$.
si γ est une courbe de Jordan incluse dans V alors $\forall g \in G_x$ γ est inclus dans $g_x U$ donc l'intérieur de γ est inclus dans $g_x U$. Il est donc inclus dans l'intersection et V est simplement connexe. Cet ouvert V vérifie bien toutes les hypothèses.

3) L'ouvert V est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ (différent de $\mathbb{C}$) contenant 0. Par le thm. de représentation de Riemann, il est biholomorphe à $\mathbb{D}$ et on a même $\varphi : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ avec $\varphi(0) = 0$.
Tout $g \in G_x$ induit un automorphisme de V fixant l'origine.
Donc $\varphi \circ g_x \circ \varphi^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{D}$ fixant 0, c'est donc une rotation. L'application $\begin{cases} G_x \to \text{Rotations} \\ g_x \mapsto \varphi \circ g_x \circ \varphi^{-1} \end{cases}$
est un morphisme de groupes. Comme G_x est fini, son image est constituée de rotations d'ordre n. On peut donc l'écrire comme dans l'énoncé $\varphi \circ g_x \circ \varphi^{-1}(z) = \exp\left(\frac{2i\pi \lambda(g_x)}{n}\right) z$.

4) Si G n'a pas de points fixes, c'est bien connu, il faut donc traiter le cas où $x \in X$ a un stabilisateur non trivial. La question précédente montre qu'il existe une carte (U, φ) pour laquelle l'action de G_x est donnée par le morphisme λ.
En prenant n minimal, on peut supposer que λ est surjectif.
Montrons que λ est injectif : si $g_x \in G_x$ vérifie $\lambda(g_x) = 1$

Alors g_x est l'identité au voisinage de x. Comme X est connexe, ça l'est globalement sur X donc $g=1$ (car l'action est fidèle).
On identifie le quotient U/G_x à $\mathbb{D}$ par

$$z \longmapsto z^n = w$$

la coordonnée w devient une coordonnée locale sur le quotient.
Dit autrement, l'application $U/G_x \longrightarrow \mathbb{D}$ est une carte au voisinage de x. L'application $p: X \to X/G$ présente un point de ramification d'ordre n en x.

5) On a $\varphi(\varphi(z)) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{1-z}} = \dfrac{1-z}{1-z-1} = \dfrac{z-1}{z}$ et $\varphi^3(z) = \dfrac{1}{1-\frac{z-1}{z}} = \dfrac{z}{z-z+1} = z$

Ainsi φ est d'ordre 3 donc induit une action holomorphe de $\mathbb{Z}/3$ sur $\mathbb{P}^1$.
L'application $z \mapsto z + \varphi(z) + \varphi^2(z)$ passe au quotient
$\Phi : \mathbb{P}^1/_{\mathbb{Z}/3} \longrightarrow \mathbb{P}^1$. On a explicitement

$$\Phi(z) = z + \frac{1}{1-z} + \frac{z-1}{z} = \frac{z^2(1-z) + z + (z-1)(1-z)}{z(1-z)} = \frac{-z^3+3z-1}{z(1-z)}$$

Φ est de degré 3 comme application de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$.
Par passage au quotient, elle devient de degré 1, donc un isomorphisme.

6) Si X est compact, l'application $p: X \to X/G$ est un revêtement ramifié de degré $|G|$ donc fini.
La formule de Riemann-Hurewicz donne $\chi(X) = |G|\chi(X/G) - \sum(k_x - 1)$
Or les points de ramification sont précisément les points où le stabilisateur est non trivial. On a donc $k_x = |G_x|$ et le résultat s'en suit.

Exercice 6

$\phi : X \setminus P \longrightarrow Y \setminus Q$ un biholomorphisme.
Soit $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ et $z_1, \dots, z_n$ des coordonnées locales au voisinage de p_i. La famille $K_\varepsilon = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{|z_i| < \varepsilon\}$

est une famille exhaustive de compacts, i.e tout compact de $X \setminus P$ est inclus dans K_ε pour ε assez petit.
On définit de même une famille L_ε pour Y.
Comme ϕ est un homéomorphisme, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tq $\varphi(K_\varepsilon) \subset L_\delta$
et de même pour ϕ^{-1}, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ $\varphi^{-1}(L_\varepsilon) \subset K_\delta \Leftrightarrow L_\varepsilon \subset \varphi(K_\delta)$
En particulier $\phi(X \setminus K_\delta) \subset Y \setminus L_\varepsilon$.
C'est le point-clé : en prenant l'ouvert $|z_i| < \delta$ de $X \setminus \{p_i\}$
on obtient un ensemble connexe dont l'image par ϕ est dans $Y \setminus L_\varepsilon$, c'est-à-dire la réunion d'ouverts de la forme $|y_i| < \varepsilon$.
Par connexité, $\forall i$, $\exists j$ tq $\varphi(\{|z_i| < \delta\}) \subset \{|y_j| < \varepsilon\}$.
On peut alors lire φ dans le système de cartes (z_i, y_j)
et observer que φ est bornée au voisinage de 0.
Par le théorème de prolongement de Riemann, φ se prolonge en un biholomorphe en envoyant p_i $(z_i = 0)$ sur q_j $(y_j = 0)$.
Ainsi φ est un biholomorphisme de X sur Y.

<u>Rque:</u> c'est un fait important de la théorie : cela dit en particulier qu'il n'y a qu'une seule façon de compactifier une courbe algébrique.