Feuille de TD 3 de Surfaces de Riemann.
Courbes algébriques et différentielles.

Exercice 1: Courbes algébriques dans $\mathbb{P}^2$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équations $x^2 + y^2 = 1$ dans $\mathbb{C}^2$ est biholomorphe à $\mathbb{C}^*$.

2. Déterminer à quelle conditions sur $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, les solutions dans $\mathbb{C}^2$ de l'équation $a+bx+cy+dxy = 0$ est une surface de Riemann. Montrer que cette surface est biholomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$.

3. Montrer que toute forme quadratique non dégénérée à 3 variables q, la courbe $C_q = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2, q(x, y, z) = 0\}$ est une surface de Riemann biholomorphe à $\mathbb{P}^1$. Réinterpréter les deux exemples précédents.

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la courbe X_n d'équation $x^n + y^n = 1$ est une surface de Riemann, comme sa compactification $\hat{X}_n$ dans $\mathbb{P}^2$.

5. Montrer que la projection $(x, y) \to x$ définit une application $p : \hat{X}_n \to \mathbb{P}^1$. Déterminer son degré, ses points de ramifications et en déduire le genre de $\hat{X}_n$.

6. Déterminer à quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{C}$ la courbe projective C_λ d'équation $x^3 + y^3 + z^3 + 3\lambda xyz = 0$ est une surface de Riemann.

7. Calculer l'intersection de C_λ et C_μ avec $\lambda \neq \mu$ et décrire les C_λ singulières.

Exercice 2: Courbes hyperelliptiques

Soit $P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$ un polynôme de degré $n > 0$ à racines simples. On note $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, y^2 = P(x)\}$.

1. Montrer que X est une surface de Riemann.

2. Trouver toutes les séries entières $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ vérifiant $\frac{1}{f(x)^2} = P(\frac{1}{x})$ si n est pair, $\frac{1}{f(x)^2} = P(\frac{1}{x^2})$ si n est impair.

3. En déduire que si n est impair, on peut ajouter un point à X (deux si n est pair) pour définir une compactification $\hat{X}$ de X.

4. Montrer que l'application $p : (x, y) \mapsto x$ est holomorphe de degré 2 et en déduire le genre de $\hat{X}$.

Exercice 3: Courbes dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, y_1, x_2, y_2]$ un polynôme. On dit qu'il est bihomogène de bidegré (a, b) si $P(\lambda_1 x_1, \lambda_1 y_1, \lambda_2 x_2, \lambda_2 y_2) = \lambda_1^a \lambda_2^b P(x_1, y_1, x_2, y_2)$.

1. Expliquer que tout polynôme bihomogène définit un lieu d'annulation dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et donner des conditions pour que ce lieu soit une surface de Riemann.

2. Montrer que l'équation $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ définit une telle surface que l'on identifiera.

3. Soit $P(x_1, y_1)$ un polynôme s'annulant sur une courbe $X \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Déterminer l'adhérence de X dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

4. Montrer que pour $a, b \geq 1$, la courbe d'équation $x^a + y^b + x^a y^b = 1$ se compactifie de façon lisse dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Calculer son genre en considérant la projection $(x, y) \mapsto x$.

Exercice 4: Différentielles

1. Décrire toutes les différentielles holomorphes sur $\mathbb{P}^1$ et sur $\mathbb{C}/\Lambda$ où Λ est un réseau de $\mathbb{C}$.

2. On définit le degré d'une forme différentielle méromorphe ω sur une surface de Riemann compacte X par $\deg \omega = \sum_{x \in X} k_x(\omega)$. Montrer que ce degré ne dépend pas de ω et le calculer en considérant $\omega = f^* dz$ pour une fonction méromorphe $f : X \to \mathbb{P}^1$.

3. Soit P un polynôme de degré $2n$ avec $n \geq 2$ et X la courbe d'équation $y^2 = P(x)$. Montrer que la forme différentielle $\omega = \frac{dx}{y}$ est holomorphe sur $\hat{X}$ et déterminer ses zéros avec multiplicité.

4. Montrer que toute forme différentielle holomorphe sur $\hat{X}$ invariante par l'involution $(x, y) \mapsto (x, -y)$ est nulle.

5. En déduire que toute forme différentielle holomorphe sur $\hat{X}$ s'écrit $f(x)\omega$ avec f méromorphe et déterminer toutes ces formes.