TD 4

Exercice 1.

1) Soit $x \in X$ et (U, φ) une carte avec $x \in U$. La différentielle $d_x\varphi$ permet d'identifier $T_x X$ à $\mathbb{C}$.
On définit $J_x \in End(T_x X)$ par $J_x(v) = (d_x\varphi)^{-1}[i\, d_x\varphi(v)]$
Pour voir que c'est bien défini, on considère une deuxième carte (V, ψ) et on compare les deux définitions.

$$(d_x\varphi)^{-1}[i\, d_x\varphi(v)] = (d_x\psi)^{-1}[i\, d_x\psi(v)]$$

$$\Leftrightarrow \quad i\, d_x\varphi(v) = d_x\varphi \circ (d_x\psi)^{-1}[i\, d_x\psi(v)]$$

En posant $w = d_x\psi(v)$

$$\Leftrightarrow \quad i\, d_x\varphi \circ (d_x\psi)^{-1}(w) = d_x\varphi \circ (d_x\psi)^{-1}(iw).$$

Par la règle de la chaîne

$$\Leftrightarrow \quad i\, d_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1})\, w = d_{\psi(x)}\, \varphi\circ\psi^{-1}(iw). \quad (*)$$

Or par définition, $\varphi \circ \psi^{-1}$ est holomorphe, donc sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire, ce qui veut dire qu'elle commute avec la multiplication par i. L'équation $(*)$ est bien vérifiée.
On oriente X en déclarant que pour tout $x \in X$ et tout $v \in T_x X$, $(v, J_x v)$ est une base orientée. Cela ne dépend pas de v car si on choisit plutôt w, on a $w = av + b J_x v$ et donc $(w, J_x w)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ qui a pour déterminant $a^2 + b^2 > 0$.

2) On rappelle que d'après les équations de Cauchy-Riemann, une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe ssi elle est $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle df est $\mathbb{C}$ linéaire.
Lisons $f : X \to Y$ dans des cartes (U, φ) et (V, ψ).
On a $\quad d\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = d\psi \circ df \circ d\varphi^{-1}$ et

$$d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \cdot i = d\psi \circ df \circ d\varphi^{-1} \circ i = d\psi \circ df \circ J \circ d\varphi^{-1}$$

$$i\, d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = i \circ d\psi \circ df \circ d\varphi^{-1} = d\psi \circ J \circ df \circ d\varphi^{-1}$$

On en déduit que f lue dans des cartes est holomorphe
ssi $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ i = i \circ d\,\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$
ssi $df \circ J = J \circ df$
ssi la différentielle de f commute avec l'opérateur J.

3) Dans des cartes, toute différentielle holomorphe s'écrit $\omega = f(z)\,dz$. En posant $f(z) = P(z) + i\,Q(z)$ et $z = x + iy$ on trouve $\omega = P\,dx - Q\,dy + i\,[Q\,dx + P\,dy]$
Il s'agit bien d'une forme différentielle à valeurs complexes, c'est à dire qu'on a $\omega = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \Omega^1(X, \mathbb{R})$ où α, β sont des formes différentielles usuelles.
Si on calcule $d\omega = d\alpha + i\,d\beta$ on trouve
$$d\omega = \left(-\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx \wedge dy + i\left(-\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x}\right) dx \wedge dy.$$
les équations de Cauchy-Riemann donnent bien $d\omega = 0$.
On calcule $dx \circ J = -dy$ $dy \circ J = dx$
de sorte que $(dx + i\,dy) \circ J = i\,(dx + i\,dy)$ ou $dz \circ J = i\,dz$.
Cela prouve que $\alpha = f(z)\,dz$ vérifie $\alpha \circ J = i\alpha$.
Réciproquement, toute forme α vérifiant $d\alpha = 0$ et $\alpha \circ J = i\alpha$ s'écrit dans des cartes $f(z)\,dz$ d'après $\alpha \circ J = i\alpha$.
En reprenant à l'envers le calcul précédent $d\alpha = 0 \Leftrightarrow f$ satisfait Cauchy-Riemann $\Leftrightarrow f$ est holomorphe. On a donc prouvé l'équivalence.

4) Si $f : X \to \mathbb{C}$ est holomorphe, dans une carte elle s'écrit $f = g(z)$. donc $df = g'(z)\,dz$. Comme g est holomorphe, g' aussi donc df est une différentielle holomorphe.
Si $f : X \to Y$ est holomorphe, et $\omega \in \Omega(Y)$, on a dans une carte locale en Y $\omega = g(y)\,dy$ et f s'écrit $y = f(x)$ de sorte que $f^*\omega = g(f(x))\,f'(x)\,dx$.

Les fonctions g et f étant holomorphes, l'expression $g(f(x))\, f'(x)$ l'est aussi. Ainsi $f^*\omega$ est une différentielle holomorphe.

5) On écrit $\omega = \alpha + i\beta$ de sorte qu'on pose $\bar\omega = \alpha - i\beta$.
Comme $d\omega = d\alpha + i\,d\beta = 0$ on a aussi $d\bar\omega = d\alpha - i\,d\beta = 0$.
Comme $\omega \circ J = \alpha\circ J + i\,\beta\circ J = i\omega = -\beta + i\alpha$, on a

$$\bar\omega\circ J = \alpha\circ J - i\,\beta\circ J = -\beta - i\alpha = -i\bar\omega.$$

Dans une carte, $\omega = f(z)\,dz$ et $\bar\omega = \overline{f(z)}\,d\bar z$
donc $i\omega\wedge\bar\omega = i\, f(z)\,\overline{f(z)}\, dz\wedge d\bar z$
or $dz = dx + i\,dy$ et $d\bar z = dx - i\,dy$ donc $dz\wedge d\bar z = -2i\, dx\wedge dy$
Ainsi $i\omega\wedge\bar\omega = 2|f(z)|^2\, dx\wedge dy$ est un multiple positif de $dx\wedge dy$, en particulier on a toujours $\int_X i\,\omega\wedge\bar\omega \geq 0$.

6) On a $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow X \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. $\pi^*\omega$ est une forme fermée sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Comme sur $\mathbb{R}^2$ toute forme fermée est exacte et il existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ tq $\pi^*\omega = df$.
De plus, par construction, $\pi^*\omega$ est invariante par translation entière de sorte que

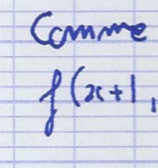
$$\begin{cases} f(x+1, y) = f(x,y) + \omega_1 \\ f(x, y+1) = f(x,y) + \omega_2 \end{cases}$$

Comme f est la primitive de ω, on a

$$f(x+1,y) - f(x,y) = \int_{[0,1]\times\{0\}} \pi^*\omega = \omega_1 \quad \text{et} \quad f(x,y+1) - f(x,y) = \int_{\{0\}\times[0,1]} \pi^*\omega = \omega_2$$

On calcule

$$\int_X \omega\wedge\bar\omega = \int_{[0,1]^2} \pi^*\omega\wedge\pi^*\bar\omega = \int_{[0,1]^2} df\wedge\pi^*\bar\omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial[0,1]^2} f\,\pi^*\bar\omega$$



$$= \int_0^1 [f(x,0) - f(x,1)]\,\bar\omega - \int_0^1 [f(0,y) - f(1,y)]\,\bar\omega$$

$$= -\omega_2\bar\omega_1 + \omega_1\bar\omega_2 = 2i\,\mathrm{Im}(\omega_1\bar\omega_2)$$

Or on a $\int i\omega\wedge\bar{\omega} > 0$ donc $\mathrm{Im}(\omega_1\bar{\omega}_2) < 0$

Notez que je trouve un signe opposé à celui de l'énoncé

Exercice 2

1) Soit $R : \mathcal{L} \to \mathbb{C}^n$ définie par $R(f) = (\mathrm{Res}_{p_i} f\,dz_i)$

Le noyau de R est formé des fonctions f qui n'ont pas de pôles du tout. Elles sont donc holomorphes puis constantes. (car on suppose X compacte et connexe). Ainsi $\mathrm{Ker}\, R = \mathbb{C}\,1$.

2) Soit $\omega \in \Omega(X)$ et $f \in \mathcal{L}$. Comme $f\omega$ est une différentielle méromorphe, le théorème des résidus nous dit que $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{p_i}(f\omega) = 0$.

En coordonnées locales, on a $\omega = \alpha_i\, dz_i$ de sorte que

$\mathrm{Res}_{p_i}(f\omega) = \mathrm{Res}_{p_i}(\alpha_i f\,dz_i) = \alpha_i(p_i)\,\mathrm{Res}_{p_i}(f dz_i)$.

On définit donc $\langle\, ,\rangle : \Omega(X) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ par

$$\langle \omega, e_i\rangle = \alpha_i(p_i).$$

de sorte à avoir $\langle \omega, R(f)\rangle = 0$ $\forall\, \omega \in \Omega(X)$ et $\forall f \in \mathcal{L}$.

3) Soit $\omega_1, \dots, \omega_g$ une base de $\Omega(X)$. L'image de R est dans le noyau des formes linéaires $\langle\omega_1, \cdot\rangle, \dots, \langle\omega_g, \cdot\rangle$

On a aussi $\mathrm{rg}(R) = \dim \mathcal{L} - 1$ d'après la question 1).

Ainsi $n \geq \dim \mathcal{L} - 1 \geq n - g$

d'où $n-g+1 \leq \dim \mathcal{L} \leq n+1$.

Exercice 3

1) $P(x) = x^3 + ax + b$ a pour dérivée $P'(x) = 3x^2 + a$ dont les racines sont $x = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$. Si P a une racine double, c'est aussi une racine de P, i.e

$x[x^2+a] + b = 0$ soit $\frac{2a}{3}x + b = 0$ soit $x = -\frac{3b}{2a}$

En prenant le carré, $x^2 = \frac{9b^2}{4a^2} = -\frac{a}{3}$ soit $27b^2 + 4a^3 = 0$.

2) On a déjà vu que la courbe $y^2 = P(x)$ est lisse dans $\mathbb{C}^2$ si et seulement si P est à racines simples. Étudions le voisinage de l'infini. En coordonnées homogènes, on a
$$z y^2 = P\left(\frac{x}{z}\right) z^3 = x^3 + a x z^2 + b z^3.$$
À l'infini, on a $z = 0$ d'où $x = 0$ et on peut supposer $y = 1$. Il n'y a donc qu'un point à l'∞ $P = [0, 1, 0]$.
Dans la carte $y = 1$, X a pour équation $z = x^3 + a x z^2 + b z^3$
En posant $Q(x, z) = z - x^3 - a x z^2 - b z^3$ on a $\frac{\partial Q}{\partial z}(0,0) = 1$
donc X est lisse à l'infini.
C'est du cours : une courbe lisse de degré d dans $\mathbb{P}^2$ est de genre $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Ici $d = 3$ et donc $g = 1$.

3) On l'a déjà fait $\frac{dx}{y}$ est holomorphe de façon évidente là où $y \neq 0, \infty$. Aux points où $y = 0$ on a
$y^2 = P(x) \Rightarrow 2y\, dy = P'(x)\, dx$ donc $\frac{dx}{y} = 2 \frac{dy}{P'(x)}$
Quand $y = 0$, $P(x) = 0$ et donc $P'(x) \neq 0$.
Cela montre que $\frac{dx}{y}$ est holomorphe en ces points.
Étudions $\frac{dx}{y}$ à l'∞, pour cela rebaptisons les coordonnées dans la carte $y = 1$ u et v. On a alors $[x, y, 1] = [u, 1, v]$
ce qui donne $x = \frac{u}{v}$ et $y = \frac{1}{v}$ puis
$$\frac{dx}{y} = v\, d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v}$$
Rappelons que X a pour équation $v = u^3 + a u v^2 + b v^3$ dans les coordonnées (u, v). On lit que u est une coordonnée locale et que $v \sim \lambda u^3$ et même $v \sim u^3$. Cela nous donne $\frac{dx}{y} \sim \frac{u^3\,du - u\, 3u^2\,du}{u^3} = -2\,du$
Ainsi $\frac{dx}{y}$ est holomorphe (et ne s'annule pas) en P.

4) Comme X est de genre 1, X est difféomorphe à $S^1 \times S^1$ et donc $\pi_1(X, P) \simeq \mathbb{Z}^2$. Comme $\int_{\gamma\delta} \frac{dx}{y} = \int_\gamma \frac{dx}{y} + \int_\delta \frac{dx}{y}$
L'application I est un morphisme de groupe

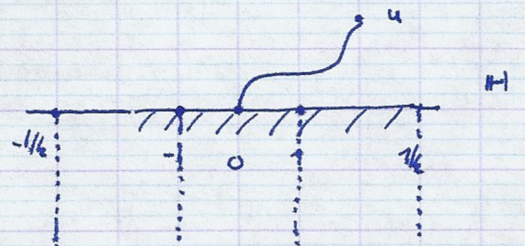
Les deux générateurs $S^1\times\{1\}$ et $\{1\}\times S^1$ ont pour image ω_1 et $\omega_2 \in \mathbb{C}$ qui vérifient $\mathrm{Im}(\omega_1\overline{\omega_2}) \neq 0$ d'après l'exercice 1 question 6. Ainsi ω_1 et ω_2 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$ et $I : \pi_1(X,p) \simeq \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ a pour image un réseau de $\mathbb{C}$ qu'on note Λ.

5) $F : X \to \mathbb{C}/\Lambda$ est bien définie car si on a deux chemins γ et δ reliant p à x, on a $\int_\gamma \omega - \int_\delta \omega = \int_{\gamma\cdot\delta^{-1}} \omega = I(\gamma\delta^{-1}) \in \Lambda$
avec $\gamma\cdot\delta^{-1} \in \pi_1(X,p)$
donc $\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega$ modulo Λ et F est bien définie.
On pourrait démontrer par le calcul que ω ne s'annule pas, c'est aussi une conséquence de la formule $\deg\omega = 2g-2 = 0$. Comme F est une primitive de ω, et que ω ne s'annule pas, F est un biholomorphisme local.

6) Le morphisme $F : X \to \mathbb{C}/\Lambda$ est holomorphe non ramifié : c'est donc un revêtement. On a $\pi_1(\mathbb{C}/\Lambda) \simeq \Lambda \simeq \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$
Or ω_1 est l'image par F de $S^1\times\{1\}$ et ω_2 l'image de $\{1\}\times S^1$.
Cela montre bien que $F_* : \pi_1(X) \to \pi_1(\mathbb{C}/\Lambda)$ est surjective.
La théorie des revêtements montre que F est un homéomorphisme donc, finalement, un biholomorphisme.

Exercice 4

1) $F(u) = \displaystyle\int_0^u \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$



On observe déjà que sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \{x+iy,\ x\in\{-\frac{1}{k},-1,1,\frac{1}{k}\},\ y \in]-\infty,0]\}$ simplement connexe, la fonction $z \mapsto \frac{1}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ ne s'annule pas sur U, elle a donc une racine carrée $f(z)$ qui est unique si on pose $f(0)=1$.
A nouveau, U étant simplement connexe, f a une unique

primitive qui s'annule en 0 : c'est la fonction F.

2) Ainsi F est bien définie et holomorphe sur U. Comme la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable en 0 donc F se prolonge par continuité aux points $-1/k$, -1, 1 et $1/k$.

Comme $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \sim \frac{1}{kx^2}$ à l'infini, c'est intégrable et F se prolonge par continuité quand $x \mapsto \pm\infty$.

Cette estimation fonctionne aussi en prenant $x \in \mathbb{H}$, on a $\left|\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\right| \sim \frac{1}{k|x|^2}$ et donc F a une limite quand $|x| \to +\infty$.

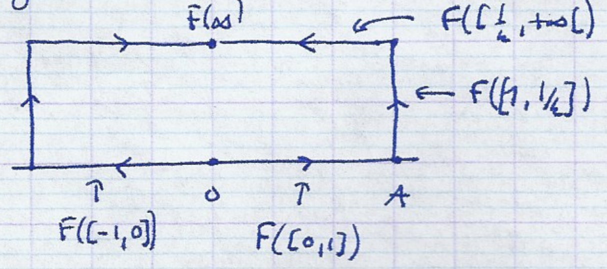
3) Si $x \in [-1,1]$ $(1-x^2)(1-k^2x^2) \geq 0$ donc $1/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \geq 0$ et $F|_{[-1,1]}$ est une fonction à valeurs réelle strictement croissante.

On a $F([-1,1]) = [-A, A]$ avec $A = F(1) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

Si $x \in [1, 1/k]$ $(1-x^2)(1-k^2x^2) \leq 0$ donc $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ est imaginaire pur. Notre choix de détermination de la racine carrée montre que c'est dans $i[0,+\infty[$. Ainsi $F(x)-F(1)$ est imaginaire pur et $F([1,1/k]) = A + i[0,B]$ où
$B = F(1/k) - F(1) = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$.

Si $x > \frac{1}{k}$ $(1-x^2)(1-k^2x^2) \geq 0$ à nouveau, mais le choix de la racine carrée devient négatif : F décrit alors le bord d'un rectangle comme sur le dessin

On complète par symétrie

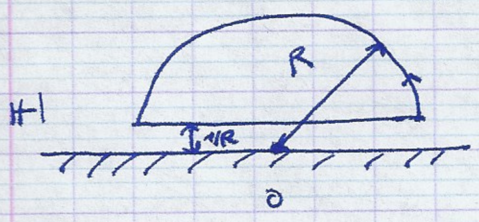


4) La formule des résidus dit que $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{F'(z)dz}{F(z)-w}$ est égal au nombre de solutions de l'équation $F(z) = w$ comptés avec multiplicité à l'intérieur de γ.

En faisant le changement de variable $t = F(z)$ $(dt = F'(z)dz)$

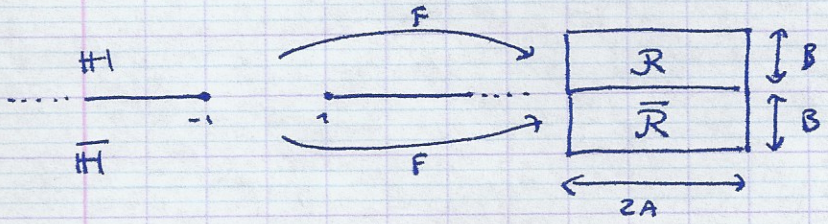
cette intégrale vaut $\frac{1}{2i\pi}\int_{F(\gamma)} \frac{dt}{t-w} = \mathrm{Ind}(F(\gamma), w)$.

5) Prenons γ_R le contour dessiné ci-dessous dans $\mathbb{H}$

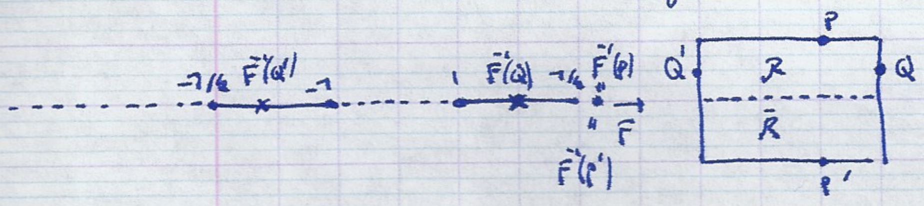


D'après la question 4) le nombre de solutions de $F(z)=w$ à l'intérieur de γ_R est $\mathrm{ind}(F(\gamma_R), w)$. Quand $R \to +\infty$ $F(\gamma_R)$ tend vers le bord du rectangle de la question 3). En faisant tendre R vers l'∞, le nombre de solutions de $F(z)=w$ est donc 1 si w est dans le rectangle, 0 sinon. Autrement dit, F est une bijection de $\mathbb{H}$ dans l'intérieur du rectangle. C'est aussi une fonction holomorphe et donc un biholomorphisme.

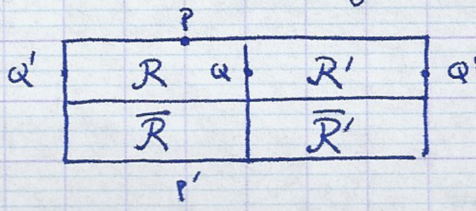
6) C'est très beau mais difficile à expliquer, surtout par écrit. Je vais donc faire des dessins: F applique donc $\mathbb{H}$ sur le rectangle $\mathcal{R}$ de la question 3). Si on prolonge F de l'autre côté de l'axe réel à travers le segment $[-1, 1]$ (cf figure), on obtient le conjugué de $\mathcal{R}$, noté $\overline{\mathcal{R}}$



Considérons la fonction réciproque $F^{-1} : \mathcal{R} \cup \overline{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathbb{C}$ et localisons les images de P, P', Q, Q'

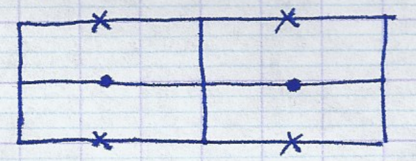


On obtient que $\bar F'(P) = \bar F'(P')$ par symétrie tandis que $F'(Q)$ et $\bar F'(Q')$ sont de part et d'autre de l'axe réel. La solution est de doubler encore le rectangle $\mathcal{R}$ comme ci-contre



P et P' sont identifiés par $\bar F'$ ainsi que Q' et Q''.

En d'autres termes $\bar F'$ est périodique de période $4A$ et $2iB$ ~~fonction~~ C'est donc une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}/_{4A\mathbb{Z}+2iB\mathbb{Z}}$.
On obtient les zéros sur les points, les pôles sur les croix



Attention qu'il n'y a que deux croix dans la courbe elliptique $\mathbb{C}/_{4A\mathbb{Z}+2iB\mathbb{Z}}$.
Ainsi $\bar F'$ a deux zéros simples et deux pôles simples. C'est cohérent, et F est de degré 2. On peut le comparer avec l'application $\wp$ de Weierstrass qui est aussi de degré 2 mais a un pôle double.

7) Sur la courbe $y^2 = (1-x^2)(1-x^2k^2)$ la forme différentielle $\omega = \frac{dx}{y}$ est holomorphe on a $F(x) = \int_\gamma \omega$ en écrivant $y = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$. C'est donc essentiellement la même chose avec un polynôme de degré 4 au lieu de 3. Le point de vue est plus pragmatique, historique mais plus obscur pour quelqu'un qui a de bonnes bases en géométrie différentielle