Résumé du cours précédent

But : classifier les représentations irréductibles de SU_2.

elles sont les restrictions à $SU_2 \subset SL_2(\mathbb{C})$ des représentations suivantes.

$V_n = \{$ polynômes homogènes de degré n sur $\mathbb{C}^2 \}$

$$\sum_{i+j=n} a_{ij}\, x^i y^j = P(x,y)$$

espace vectoriel complexe de dim $n+1$

C'est une représentation de $SL_2(\mathbb{C})$ donnée par

$$g \cdot P = P \circ g^{-1} \quad \text{où} \quad g^{-1} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

Cette famille de représentations forme la liste complète de toutes les représentations irréductibles de SU_2.

Ce type de description se généralise pour tous les groupes compacts et simplement connexes.

Le cas de $SO(3)$:

rappel SU_2 est le revêtement universel de $SO(3)$. $p : SU_2 \to SO(3)$ est un morphisme de groupes surjectif et $\ker p = \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Observation : si on a une représentation

$$\rho : SO(3) \to GL(V), \quad \text{alors} \quad \rho \circ p : SU_2 \to GL(V)$$

est encore une représentation. On peut vérifier que ρ est irréductible ssi $\rho \circ p$ est irréductible

donc l'ensemble des reps irréductibles est inclus dans l'ensemble des représentations de SU_2.

Réciproquement, si on se donne $\rho : SU_2 \to GL(V)$

à quelle condition s'écrit-elle $\rho = \rho' \circ p$ avec $\rho' : SO(3) \to GL(V)$

Comme $SO(3) \simeq SU_2 / \{\pm 1\}$, ρ s'écrit $\rho' \circ p$ ssi ρ passe au quotient, ssi $\rho(-1) = \rho(1) = 1$.

Regardons dans $V_n : \{ \sum_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j \}$

-1 agit par $(-1) . P(X,Y) = P(-X,-Y)$

si $P \in V_n$ $(-1). P = (-1)^n P$

Conclusion : V_n est une rep. de $SO(3)$ ssi n est pair.

La liste des reps. irr de $SO(3)$ est $V_0, \boxed{V_2,} V_4, V_6, \dots$

qui sont de dim. $1, \boxed{3,} 5, 7, \dots$

Aujourd'hui : on va essayer de décomposer d'autres représentations de $SO(3)$.

Comme $SO(3) \subset GL_3(\mathbb{R})$, on a une représentation de $SO(3)$ de dim 3. elle est donc isomorphe une fois complexifiée à la rep V_2.

Notons $P_n = \{$ polynomes homogènes de degré n à 3 variables à coeff. réels $\sum_{i+j+k=n} a_{ijk} x^i y^j z^k \}$

il s'agit d'une rep. de $SO(3)$ définie par $g . P = P \circ g^{-1}$.

Calculons dim P_n :

$P_0 \simeq \mathbb{R}$ dim 1

$P_1 \simeq \mathrm{Vect}\{x, y, z\}$ dim 3

$P_2 = \mathrm{Vect}\{x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz\}$ dim 6 > 5

pour calculer la dim en général on considère un ensemble à $n+2$ elts $\underbrace{\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\odot\quad\cdot\quad\cdot\quad\odot\quad\cdot\quad\cdot}$

on choisit 2 points qu'on remplace par des $^{n+2}$ traits séparateurs

on remplit le reste avec des X, des Y et des Z $\qquad X\ X\ X\ |\ Y\ Y\ |\ Z\ Z$

$$X^3Y^2Z^2$$

<u>conclusion</u> : $\dim P_n = \binom{n+2}{2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$.

$\dim P_3 = \dfrac{5.4}{2} = 10$ etc..

<u>Question</u> ① est-ce que P_n est une repr. irréductible de $SO(3)$? Réponse non car les reps irréd. de $SO(3)$ sont de dim impaire.

② Comment décomposer P_n en irréductibles

<u>Méthode</u> : faire intervenir le <u>laplacien</u> Δ

$$\Delta : \begin{array}{ccc} P_n & \longrightarrow & P_{n-2} \\ P & \longmapsto & \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial z^2} \end{array}$$

<u>Lemme 1</u> : Δ est surjective

On va définir $H_n \subset P_n$ $\qquad H_n = \operatorname{Ker}\Delta = \left\{ P \text{ de degré } n \text{ harmoniques } \Delta P = 0 \right\}$

En admettant le lemme 1 on a une <u>suite exacte</u>.

$$0 \to H_n \xrightarrow{i} P_n \xrightarrow{\Delta} P_{n-2} \to 0$$

$\dim P_n = \dim H_n + \dim P_{n-2}$ (th. du rang).

$\dim H_n = \binom{n+2}{2} - \binom{n}{2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{1}{2}\left[n^2+3n+2-n^2+n\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left[4n+2\right] = 2n+1. \quad = \dim V_n$!

<u>Lemme 2</u> : $\forall g \in SO(3) \qquad \Delta(P \circ g) = (\Delta P) \circ g$

" Δ et $g \in SO(3)$ commutent "

En admettant le lemme 2, si $\Delta P = 0$ alors $\Delta(P \circ g) = (\Delta P) \circ g = 0$

donc $H_n \subset P_n$ est un sous-espace stable ; donc une représentation de $SO(3)$.

<u>démo du lemme 1</u> : $\Delta : P_n \to P_{n-2}$ est surjective

<u>exemple</u> . $\Delta x^n = n(n-1)x^{n-2} \quad \Rightarrow \quad x^{n-2} \in \operatorname{Im} \Delta$

. $\Delta x^{n-1} y = (n-1)(n-2) x^{n-3} y \quad \Rightarrow \quad x^{n-3} y \in \operatorname{Im} \Delta$

on calcule en général

$$\underbrace{\Delta x^i y^j z^k}_{\in \operatorname{Im}\Delta} = \underbrace{i(i-1) x^{i-2} y^j z^k + j(j-1) x^i y^{j-2} z^k}_{\substack{i+j \leq \ell \\ \in \operatorname{Im}\Delta \text{ par rec.}}} + \underbrace{k(k-1) x^i y^j z^{k-2}}_{\in \operatorname{Im}\Delta}$$

on montre par récurrence sur ℓ que si $i+j = \ell$ alors $x^i y^j z^k \in \operatorname{Im} \Delta$.

si $\ell = 0 \quad i = j = 0 \quad k = n \qquad z^n \in \operatorname{Im}\Delta$ v.

si $\ell = 1 \quad i = 1\ j = 0$ ou $i = 0\ j = 1 \qquad xz^{n-1}, yz^{n-1} \in \operatorname{Im}\Delta$.

si c'est vrai pour $i + j \leq \ell$

alors $x^i y^j z^{k-2} \in \operatorname{Im}\Delta$ et le lemme est démontré.

<u>Lemme 2</u>. formule de changement de variable

$g = (A_{ij}) \in SO(3) \qquad A^T A = I \qquad \sum_{i=1}^{3} A_{ij} A_{ik} = \delta_{jk}$

On écrit les coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$

et $y = g(x) = (y_1, y_2, y_3)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} P \circ g = \sum_{j=1}^{3} A_{ji} \frac{\partial P}{\partial y_j}$$ (formule de dérivée d'une composée)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P \circ g = \sum_{j,k} A_{ji} A_{kj} \frac{\partial^2 P}{\partial y_k^2}$$

$$\Delta(P\circ g) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P\circ g = \sum_{i,j,k} \underbrace{A_{ji} A_{kj}}_{\sum_j} \frac{\partial^2 P}{\partial y_k^2} = \sum \frac{\partial^2 P}{\partial y_k^2}$$

$$= (\Delta P)\circ g$$

Conclusion : $H_n \subset P_n$ est une représentation de $SO(3)$ de dim $2n+1$

Ex : $P_2 = \mathrm{Vect}\{X^2, Y^2, Z^2, XY, XZ, YZ\}$ dim 6.

$\cup$

H_2 est de dimension 5 donc un hyperplan dans P_2.

$$\Delta(aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ) = 0$$

$= 2a + 2b + 2c = 0$ c'est bien un hyperplan.

Reste à démontrer : $H_n \simeq V_{2n}$ comme rep. de $SO(3)$ (ou de SU_2)

- soit on prouve qu'elle est irréductible
- soit on montre directement que $H_n \simeq V_{2n}$ $\longleftarrow$

Rappel : $V_n = \mathrm{Vect}\{X^n, X^{n-1}Y, \dots, Y^n\}$

polynôme homogène à 2 variables de degré n.

On regarde l'action du sous-groupe de SU_2 formé des matrices diagonales $S' \subset SU_2$

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \cdot X^k Y^\ell \qquad [g\cdot P = P\circ g^{-1}]$$

$$g^{-1} \qquad e^{-ik\theta} X^k \; e^{i\ell\theta} Y^\ell = e^{i(\ell-k)\theta} X^k Y^\ell$$

On constate que l'action de $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ est diagonale dans cette base

et que il existe des vecteurs propres pour les valeurs propres $e^{\pm in\theta}$

Lemme clé : Si W est une représentation de SU_2 telle que

1) $\dim W = n+1$
2) $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ admet pour valeur propre $e^{in\theta}$ ou $e^{-in\theta}$

alors $W \simeq V_n$ comme représentation de SU_2

(en particulier elle est irréductible).

<u>démo</u> : toute représentation complexe de SU_2 de dim finie se décompose de façon unique en somme de rep. irréductibles.

donc $W = \bigoplus_{j=1}^{k} V_{n_j}^{d_j}$ où $d_j \in \mathbb{N}^*$

$n_1 < n_2 < \dots < n_k$

or $\dim W = \sum d_j \dim V_{n_j} = \sum d_j (n_j+1)$.

de plus les valeurs propres de l'action de $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ dans W sont de la forme $e^{i\lambda\theta}$ avec $\lambda \in \mathbb{Z}$

avec $|\lambda| \leq n_j$ d'après la remarque précédant le lemme.

Par hypothèse dans W $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ admet la valeur propre $e^{\pm in\theta}$ donc $\exists\, n_{j_0} \geq n$.

mais $\dim W = n+1 = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{d_j}_{\geq 1} \underbrace{(n_j+1)}_{\geq n+1}$

la seule possibilité, c'est d'avoir $d_{j_0} = 1$ et $d_j = 0 \ \forall j \neq j_0$

ie $W \simeq V_{n_{j_0}}$ or $\dim W = n+1 = \dim V_{n_{j_0}}$

$\Rightarrow n_{j_0} = n$

ie $\boxed{W \simeq V_n}$

<u>Application à $H_n \simeq V_{2n}$</u>

On considère la représentation complexifiée $H_n \otimes \mathbb{C}$ comme représentation de SU_2. Elle est toujours de dimension $2n+1$.

On veut trouver dans $H_n \otimes \mathbb{C}$ un vecteur $P \in H_n \otimes \mathbb{C}$.

tq $\underset{SU_2}{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{SO(3)}{\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ agit sur P par $e^{\pm 2in\theta}$

On regarde le polynôme $Q = (X + iY)^n \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ de degré n.

$\in P_n \otimes \mathbb{C}$

On calcule $\Delta Q = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial z^2}$

$$= n(n-1)(X+iY)^{n-2} + \underbrace{i^2}_{-1} n(n-1)(X+iY)^{n-2}$$

$$= 0 \qquad \text{donc} \qquad Q \in H_n \otimes \mathbb{C}.$$

de plus $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \cdot Q = Q \circ \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

$$= \left(\cos 2\theta X - \sin 2\theta Y + i(\sin 2\theta X + \cos 2\theta Y) \right)^n$$

$$= \left(e^{2i\theta} X + iY e^{2i\theta} \right)^n = e^{2in\theta} (X+iY)^n$$

$$= e^{2in\theta} Q.$$

$Q \in H_n \otimes \mathbb{C}$ est un vecteur propre pour $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ de valeur propre $e^{\pm 2in\theta}$. Donc d'après le lemme clé $\boxed{H_n \otimes \mathbb{C} \simeq V_{2n}}$

donc H_n est bien une rep. irréductible, c'est la représentation irréductible de $SO(3)$ de dimension $2n+1$.

<u>Apparté culturel</u> : on peut considérer

$$\begin{aligned} P_n &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(S^2) \\ P &\longmapsto P|_{S^2} \end{aligned}$$

où $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est la sphère unité.

On peut aussi définir un opérateur $\Delta : \mathcal{C}^\infty(S^2) \to \mathcal{C}^\infty(S^2)$

les espaces H_n de polynômes harmoniques

$$\begin{aligned} H_n &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(S^2) \\ P &\longrightarrow P|_{S^2} \end{aligned}$$

définissent un sous-espace $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{C}^\infty(S^2)$ de dim $2n+1$

qui forme le sous-espace propre de $\Delta : \mathcal{C}^\infty(S^2) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(S^2)$

la valeur propre associée est $-n(n+2)$ (de mémoire).

Ce qu'on vient de faire se réinterprète en disant qu'on a diagonalisé le Laplacien sur la sphère.