TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE DES VARIÉTÉS II
EXAMEN DU 21 FÉVRIER 2020

*L'examen dure trois heures, les notes de cours sont autorisées. Les questions marquées * sont plus difficiles et hors barème.*

Exercice 1: Action de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ sur S^n

Soit p un nombre premier et $n > 0$. On note $\mathbb{Z}_p$ le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et L_p^n le quotient de $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ par l'action de $\mathbb{Z}_p$ suivante:

$$[k].(z_1, \ldots, z_n) = (\exp(2i\pi k/p)z_1, \ldots, \exp(2i\pi k/p)z_n).$$

L'application $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_n, 0)$ induit une inclusion $L_p^n \to L_p^{n+1}$.

1. Montrer que la paire (L_p^{n+1}, L_p^n) est $(2n-1)$-connexe.

2. Déduire du point précédent et de la dualité de Poincaré les groupes $H_k(L_p^n, \mathbb{Z}_p)$, puis $H_k(K(\mathbb{Z}_p, 1), \mathbb{Z}_p)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ agit librement sur S^n.

3. Construire un $K(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, 1)$ à partir du quotient de S^n et en déduire que $H^{n+1}(K(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, 1), \mathbb{Z}_p)$ est de dimension 1 au plus.

4. Conclure qu'une telle action n'existe pas.

Exercice 2: Structures presque complexes

Soit M une variété différentiable. Une structure presque complexe est une section différentiable J de $\mathrm{End}(TM)$ vérifiant $J^2 = -\mathrm{Id}$.

1. Montrer que si la variété M admet une telle structure, elle est nécessairement de dimension paire et orientable.

2. Pour un espace vectoriel V orienté de dimension $2n$, on note

$$\mathcal{J}(V) = \{J \in \mathrm{End}(V), J^2 = -1, J > 0\}$$

où $J > 0$ signifie qu'il existe $v_1, \ldots, v_n \in V$ tel que $v_1, Jv_1, \ldots, v_n, Jv_n$ soit une base positivement orientée. Montrer que $\mathcal{J}_n = \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ est homotopiquement équivalent à $SO(2n)/U(n)$.

3. On admet avoir le diagramme commutatif suivant ou les flèches verticales sont des isomorphismes (démontrez le s'il vous reste du temps)

$$\begin{tikzcd}
U(2) \arrow[r] \arrow[d] & SO(4) \arrow[d] \\
S^1 \times SU_2/\sim \arrow[r] & SU_2 \times SU_2/\sim
\end{tikzcd}$$

où $(x, y) \sim (-x, -y)$ et $S^1 \subset SU_2$ correspond aux matrices diagonales. En déduire $\pi_k(\mathcal{J}_2)$ pour $k \leq 3$.

4*. Montrer que l'action de $\pi_1(M)$ sur $\pi_k(\mathcal{J}_2)$ est triviale pour $k \leq 3$.

5. Montrer que pour mettre une structure presque complexe sur une variété orientable de dimension 4, il y a deux obstructions: $\alpha \in H^3(M, \mathbb{Z})$ et $\beta \in H^4(M, \mathbb{Z})$.

6*. Montrer que α est nul si et seulement si $w_2(M)$ est représenté par une classe entière, où $w_2(M) \in H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est la première obstruction à trivialiser le fibré tangent de M.

Exercice 3: Premiers groupes d'homologie des groupes

Soit $1 \to A \to B \to C \to 1$ une suite exacte de groupes.

1. Montrer qu'on peut choisir des espaces $K(A, 1), K(B, 1), K(C, 1)$ de sorte qu'il y ait une fibration $p : K(B, 1) \to K(C, 1)$ de fibre $K(A, 1)$.

2. On note $H_k(A) = H_k(K(A, 1), \mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe une suite exacte

$$H_2(B) \to H_2(C) \to H_0(C, H_1(A)) \to H_1(B) \to H_1(C) \to 0$$

3. Décrire le groupe $H_0(C, H_1(A))$ en terme de l'extension $A \to B \to C$.

4*. Soit G un groupe donné par une présentation $G = F/R$ où F est un groupe libre. Montrer qu'on a l'isomorphisme suivant (dû à Hopf)

$$H_2(G) = [F, F] \cap R/[F, R].$$

Exercice 4: Fibré en surface sur une surface

Soit S_1 et S_2 deux variétés compactes orientées de dimension 2 de points bases respectifs x_1, x_2 et de genres respectifs g_1, g_2.

On note $\pi = \pi_1(S_1, x_1)$ et on se donne un morphisme $\rho : \pi \to \mathrm{Homeo}(S_2)$ vérifiant que pour tout $\gamma \in \pi$, $\rho(\gamma)$ préserve l'orientation de S_2 et fixe x_2.

On note $M = \widetilde{S_1} \times S_2/\pi$ où π agit par $\gamma.(x, y) = (\gamma.x, \rho(\gamma)y)$.

1. Montrer que M est une variété compacte orientable de dimension 4 et qu'il existe une fibration $p : M \to S_1$ de fibre S_2.

Dans toute la suite, on munit les groupes $H_q(S_2, \mathbb{Q})$ d'une structure de $\mathbb{Z}[\pi]$-module en posant $\gamma.x = \rho(\gamma)_* x$.

2. Soit $d = \dim H_0(S_1, H_1(S_2, \mathbb{Q}))$. Calculer les dimensions de tous les groupes $H_p(S_1, H_q(S_2, \mathbb{Q}))$ en fonction de d. [1].

3. Calculer les dimensions de $H_p(M, \mathbb{Q})$ pour tout p en fonction de g_1, g_2 et d. On pourra montrer que le morphisme de transgression est nul.

4. Déterminer en fonction de ρ la torsion dans chaque groupe $H_p(M, \mathbb{Z})$.

5*. Calculer la signature de M en fonction de celle de la forme quadratique "double cup-produit" définie sur $H^1(S_1, H^1(S_2, \mathbb{Q}))$.

[1] On utilisera librement la dualité de Poincaré à coefficients tordus à savoir $H_k(S_1, M) \simeq H^{2-k}(S_1, M)$ pour tout $\mathbb{Z}[\pi]$-module M.