Géométrie différentielle et riemannienne - 27/10/2017

Durée de trois heures. Les notes de cours sont autorisées, pas les téléphones portables.

Exercice 1 : Tiré en arrière d'une connexion

Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel muni d'une connexion ∇ et $f : N \to M$ une application différentiable. Soit x un point de N.

1. Montrer qu'il existe un voisinage de $f(x)$ et une base de sections $s_1, \ldots, s_p$ de E dans ce voisinage telle que les sections $s_1 \circ f, \ldots, s_p \circ f$ forment une base de sections de f^*E dans un voisinage de x.
2. En déduire qu'il existe une unique connexion ∇' sur le fibré f^*E telle que pour toute section $s \in \Gamma(M, E)$, tout $x \in N$ et tout $X \in T_xN$ on a

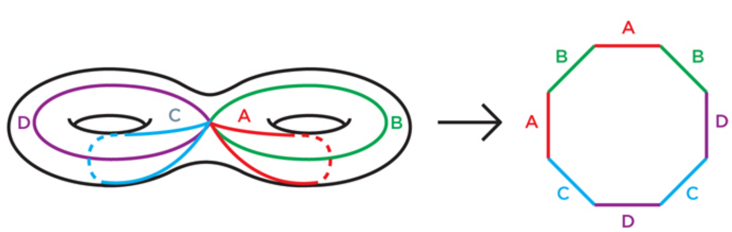
$$\nabla'_X(s \circ f) = (\nabla_{d_xf(X)}s) \circ f$$

3. Montrer que si on a $\nabla = d + \Gamma$ dans un système de coordonnées et sections locales, on aura $\nabla' = d + f^*\Gamma$.
4. Relier la courbure de ∇' à celle de ∇.

Exercice 2 : Courbure et transport parallèle

Soit Σ une surface compacte connexe et orientée munie d'une métrique g. Soit D le disque unité fermé et $\varphi : D \to \Sigma$ un plongement différentiable.

1. Montrer que pour tout $x \in \Sigma$, l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de $T_x\Sigma$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}$, puis que la courbure de la connexion de Levi-Civita ∇ peut être vue comme une 2-forme ω sur Σ.
2. Expliquer dans quelle mesure on peut écrire $\nabla|_D = d + a$ avec $a \in \Omega^1(D, \mathbb{R})$ et $da = \omega$.
3. En déduire que le transport parallèle le long du bord de D est une rotation d'angle $-\int_D \omega$.
4. Supposons que Σ est obtenue par l'identification des côtés du $4g$-gone représenté sur la figure pour $g = 2$. Admettant qu'on peut prendre pour D le polygone, montrer que l'intégrale $\int_\Sigma \omega$ est un multiple de 2π.



5. En déduire que l'intégrale $\int_\Sigma \omega$ est indépendante de la métrique et le calculer pour Σ une sphère ou un tore.

Exercice 3 : Groupe d'Heisenberg

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ posons $H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'image de H est un groupe de Lie, noté $\mathcal{H}$ et identifier son espace tangent en 1, noté $\mathfrak{h}$.
2. Soit q la métrique sur $\mathcal{H}$ telle que $H^*q = dx^2 + (dz - xdy)^2 + dy^2$. Montrer que la multiplication à gauche $L_g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ agit par isométrie sur $\mathcal{H}$.
3. Soit $\epsilon > 0$ et $c :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathcal{H}$ une géodésique pour la métrique q telle que $c(0) = 1$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathfrak{h}$ la fonction $t \mapsto \langle c(t)^{-1}c'(t), \xi \rangle$ est constante. En déduire la forme de toutes les géodésiques de $\mathcal{H}$.
4. Montrer que $P = \{H(0, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ est de courbure nulle et calculer sa deuxième forme fondamentale.
5. Calculer la courbure sectionnelle de $\mathcal{H}$ en 1 dans le plan tangent à P. L'espace $\mathcal{H}$ est-il de courbure constante ?

Exercice 4 : Surface de Scherk

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\cos(x) - e^z \cos(y) = 0$.

1. Montrer que c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2. Expliquer pourquoi il suffit de l'étudier pour $|x|$ et $|y|$ inférieurs à $\frac{\pi}{2}$.
3. Trouver sans calcul des géodésiques dans S.
4. Montrer que S est une surface minimale.