Examen - Surfaces de Riemann - 24/10/2013

Exercice 1. *Soit X une surface de Riemann connexe et G un groupe discret agissant proprement, holomorphiquement et fidèlement sur X. On rappelle que cela veut dire que*

- *pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $\{g \in G / gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini,*
- *pour tout $g \in G \setminus \{e\}$, l'application $x \mapsto gx$ est holomorphe et différente de l'identité.*

1. *Soit $x \in X$ et notons G_x le stabilisateur de x. Montrer que G_x est fini et que l'ensemble $\{x \in X / G_x \neq \{e\}\}$ est discret dans X.*
2. *Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe un ouvert U simplement connexe contenant x tel que $gU \cap U = \emptyset$ pour tout $g \in G \setminus G_x$ et $gU = U$ pour tout $g \in G_x$.* [1]
3. *Montrer qu'il existe un biholomorphisme $\varphi : U \to \mathbb{D}$, un entier n et un morphisme $\lambda : G_x \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\forall g \in G_x, \forall y \in U$, $\varphi(gy) = \exp(\frac{2i\pi\lambda(g)}{n})\varphi(y)$.* [2]
4. *Montrer que le quotient X/G est muni d'un système de cartes holomorphes tel que la projection canonique $\pi : X \to X/G$ soit holomorphe.*
5. *Montrer que si X est compact, G est fini et on a la formule suivante :*

$$\chi(X/G) = \frac{\chi(X)}{|G|} + \sum_{x \in X} \frac{|G_x| - 1}{|G|}.$$

6. *Soit G le sous-groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$ qui préserve le réseau $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus j\mathbb{Z}$ avec $j = \exp(2i\pi/3)$. Montrer que $X = \mathbb{C}/G$ est une surface de Riemann et qu'il existe une application holomorphe $\pi : \mathbb{C}/\Lambda \to X$. Déterminer le genre de X.*

Exercice 2. *Soit n un entier strictement positif.*

1. *Montrer que la courbe $X_n \subset \mathbb{P}^2$ d'équation $x^n + y^n + z^n = 0$ est une surface de Riemann.*
2. *Montrer que la fonction $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ définie par $\varphi([x, y, z]) = [x, z]$ est holomorphe et déterminer ses points de ramifications. En déduire le genre de X_n.*
3. *Montrer que la forme différentielle $\omega = \frac{dx}{y^{n-1}} = -\frac{dy}{x^{n-1}}$ définie sur la carte $z = 1$ se prolonge en une forme différentielle holomorphe sur X_n.*
4. *Déterminer à quelle condition sur $i, j \in \mathbb{Z}$ la forme différentielle $x^i y^j \omega$ définie sur la carte $z = 1$ se prolonge en une différentielle holomorphe sur X_n. Exhiber une base de $H^0(X_n, K)$.*

Exercice 3. *Dans cet exercice, toutes les surfaces de Riemann sont supposées compactes et connexes.*

1. *Soit $\varphi : X \to Y$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann. On note $C = \{x \in X / \varphi'(x) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de φ et on pose*

1. On admettra le fait suivant : un ouvert connexe U du plan est simplement connexe si et seulement si pour toute courbe de Jordan $\gamma \subset U$, l'intérieur de γ est contenu dans U.

2. On utilisera le théorème de représentation de Riemann.

$R_\varphi = \bigotimes_{x\in C} L_x^{k_x-1}$ où k_x désigne l'indice de ramification de x. Montrer qu'on a un isomorphisme de fibré
$$K_X \simeq \varphi^* K_Y \otimes R_\varphi$$
où K_X et K_Y désignent respectivement les fibrés canoniques de X et Y. En déduire qu'il existe une inclusion naturelle $j : H^0(X,\varphi^*K_Y) \to H^0(X,K_X)$.

2. *Soit $\varphi : X \to Y$ une application holomorphe de degré 2.*
   - *Montrer que l'application $\iota : X \to X$ définie par $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x, \iota(x)\}$ est une involution holomorphe qui agit par involution sur $H^0(X,K_X)$.*
   - *Déterminer le nombre de points critiques de φ en fonction du genre de X et de Y.*
   - *Montrer qu'une forme différentielle $\omega \in H^0(X,K_X)$ est dans l'image de l'application j si et seulement si elle vérifie $\iota^*\omega = \omega$. En déduire qu'on a la décomposition*
   $$H^0(X,K_X) = H^0(X,\varphi^*K_Y) \oplus H^0(X,K_X)^-$$
   où $H^0(X,K_X)^- = \{\omega \in H^0(X,K_X) / \iota^*\omega = -\omega\}$.
3. *Soit $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ une application holomorphe de degré 2. Montrer que tout $\omega \in H^0(X,K_X)$ vérifie $\iota^*\omega = -\omega$. En déduire que l'application canonique $\Phi : X \to \mathbb{P}(H^0(X,K_X)^*)$ se factorise sous la forme $\Phi = f \circ \varphi$.*
4. *Déterminer le degré du fibré $f^*\mathcal{O}(1)$.*
5. *Montrer que si $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ a son image incluse dans aucun hyperplan et vérifie $\deg f^*\mathcal{O}(1) = n$ alors f s'écrit dans des coordonnées convenables comme $f([x,y]) = [x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n]$. On dit que f est un plongement de Veronese. En déduire que Φ est la composée de la projection φ et d'un plongement de Veronese.*

Exercice 4. *Question préliminaire : soit W un espace vectoriel de dimension 2, et $D \in \mathbb{P}(W)$. Soit $D' \in \mathbb{P}(W)$ une droite distincte de D. Exhiber un isomorphisme $\mathbb{P}(W)\setminus D' \simeq Hom(D, D')$. En déduire une identification naturelle $T_D\mathbb{P}(W) = Hom(D, V/D)$.*

Soit V un espace vectoriel de dimension 3 et $X \subset \mathbb{P}(V)$ une courbe algébrique lisse de degré d. On notera $i : X \to \mathbb{P}(V)$ l'application d'inclusion. On suppose que l'ensemble $\hat{X} = \{T_xX, x \in X\} \subset \mathbb{P}(V^*)$ est aussi une courbe algébrique lisse. On notera $\hat{d}$ son degré.

1. *Justifier que l'application $\varphi : X \to \hat{X}$ définie par $\varphi(x) = T_xX$ est holomorphe.*
2. *Pour tout $x \in X$, expliciter les fibres en x des fibrés suivants :*
   $$L = i^*\mathcal{O}(1), K = K_X, \hat{L} = (\varphi \circ i)^*\mathcal{O}(1).$$
3. *Soit V_1, V_2 deux sous-espaces vectoriels de V de dimension respectives 1 et 2 et tels que $V_1 \subset V_2$. Montrer que l'application*
   $$\begin{cases} V_1 \times V_2 \times V \to \Lambda^3 V \\ (v_1, v_2, v_3) \mapsto v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \end{cases}$$
   induit un isomorphisme $V_1 \otimes (V_2/V_1) \otimes (V/V_2) \to \Lambda^3 V$. En déduire l'isomorphisme $\hat{L} = L^2 \otimes K$.
4. *En déduire une relation entre le genre de X, le degré de φ, d et $\hat{d}$.*
5. *Déterminer les cas où φ est un isomorphisme.*