

Topologie algébrique des variétés I

1 Rappels d'homologie singulière

1.1 Définitions et propriétés de base

Soit e_0, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} et Δ_n l'enveloppe convexe de ces vecteurs, à savoir

$$\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n), t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}.$$

On note $\delta_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ l'unique application affine envoyant e_0, \dots, e_{n-1} sur $e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n$, c'est-à-dire $\delta_i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$.

Etant donné un espace topologique X et un groupe abélien M , on notera $C_n(X, M)$ la somme directe de copies de M indexées par l'ensemble des applications continues $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$. Un élément de $C_n(X, M)$ sera noté $x = \sum_{i \in I} m_i \sigma_i$ avec I fini, $\sigma_i : \Delta_n \rightarrow X$ et $m_i \in M$.

On définit l'application $\partial_n : C_n(X, M) \rightarrow C_{n-1}(X, M)$ comme l'unique morphisme vérifiant

$$\partial_n(m\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i m \sigma \circ \delta_i.$$

Le plus souvent, on notera cette application ∂ et on l'appellera *bord* vu que les images des applications δ_i décrivent le bord topologique du simplexe Δ_n .

On laisse le lecteur vérifier que $\partial \circ \partial = 0$ ce qui permet de définir les groupes

$$Z_n = \ker \partial_n, \quad B_n = \text{im } \partial_{n+1}, \quad H_n(X, M) = Z_n / B_n.$$

Les seuls groupes d'homologie qui soient faciles à calculer sont ceux pour lesquels X est réduit à un point que l'on notera pt . Dans ce cas, $C_n(\text{pt}, M) = M$. On vérifie que $\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i$. Cela donne le complexe

$$M \xleftarrow{0} M \xleftarrow{\sim} M \xleftarrow{0} M \xleftarrow{\sim} M \xleftarrow{\dots}$$

d'où $H_k(\text{pt}, M) = M$ si $k = 0$, 0 sinon.

On peut aussi facilement montrer que $H_n(\coprod_{i \in I} X_i, M) = \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i, M)$. A part cela, rien n'est facile à calculer, même calculer l'homologie de S^1 nécessite de longs développements.

Cela dit, on va montrer dans ce chapitre que $H_n(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si $n = 0, 1$, 0 sinon. Les générateurs de ces deux groupes sont $\sigma_0 : \Delta_0 \rightarrow S^1$ (quelconque) et $\sigma_1 : \Delta_1 \rightarrow S^1$ défini par $\sigma_1(t) = e^{2i\pi t}$, formule dans laquelle on identifie Δ_1 à $[0, 1]$ et S^1 au cercle unité dans \mathbb{C} . Une observation cruciale est que choisir un générateur de $H_1(S^1, \mathbb{Z})$ revient à choisir une orientation du cercle.

La dernière propriété évidente est la functorialité: toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme $f_* : C_n(X, M) \rightarrow C_n(Y, M)$ défini par $f_*(m\sigma) = m\sigma \circ f$. On vérifie immédiatement que f_* commute avec ∂ , i.e. $f_* \circ \partial = \partial \circ f_*$ de sorte que f induit un morphisme $f_* : H_n(X, M) \rightarrow H_n(Y, M)$. Ce morphisme est fonctoriel au sens où il est compatible avec la composition.

Une conséquence cruciale est que deux espaces homéomorphes ont des groupes d'homologie isomorphes.

1.2 Homologie relative et suites exactes longues

Etant donné un sous-espace $A \subset X$ (et un groupe abélien M), le complexe $C_*(A, M)$ s'identifie à un sous-complexe de $C_*(X, M)$ de sorte qu'on peut former le quotient qu'on note $C_*(X, A, M)$. C'est à nouveau un complexe dont l'homologie est notée $H_*(X, A, M)$.

A partir de la suite exacte courte de complexes

$$0 \rightarrow C_*(A, M) \rightarrow C_*(X, M) \rightarrow C_*(X, A, M) \rightarrow 0$$

on obtient une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H_n(A, M) \rightarrow H_n(X, M) \rightarrow H_n(X, A, M) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A, M) \rightarrow \cdots$$

Dans cette suite, seuls les morphismes δ_n ne sont pas évidents: ils sont définis comme suit. Un cycle relatif $x \in C_n(X, A, M)$ est une combinaison $x = \sum_{i \in I} m_i \sigma_i$ avec $\sigma_i : \Delta_n \rightarrow X$ telle que $\partial x \in C_{n-1}(A, M)$. On note $\delta_n(x) = [\partial x] \in H_{n-1}(A, M)$. Comme $\partial^2 = 0$, il s'agit bien d'un cycle. L'exactitude de la suite longue est une conséquence classique du lemme du serpent.

On peut démontrer les deux variantes utiles suivantes: si on a $A \subset B \subset X$, on a une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H_n(B, A, M) \rightarrow H_n(X, A, M) \rightarrow H_n(X, B, M) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(B, A, M) \rightarrow \cdots$$

De même, étant donné X et M comme ci-dessus, il est parfois pratique d'augmenter le complexe, c'est-à-dire de poser $C_{-1}(X, M) = M$ avec

$$\epsilon : C_0(X, M) \rightarrow C_{-1}(X, M)$$

défini par $\epsilon(m\sigma) = m$. On vérifie immédiatement que c'est à nouveau un complexe, noté $\tilde{C}_*(X, M)$ dont l'homologie est notée $\tilde{H}_n(X, M)$ et appelée homologie réduite. A partir de la suite exacte

$$0 \rightarrow M^{[-1]} \rightarrow \tilde{C}_*(X, M) \rightarrow C_*(X, M) \rightarrow 0$$

on obtient $\tilde{H}_n(X, M) = H_n(X, M)$ si $n > 0$ et $\tilde{H}_0(X, M) = 0$ ssi M est connexe par arcs.

1.3 Invariance par homotopie

La première propriété qui requiert un peu de travail et qui est pourtant cruciale est l'invariance par homotopie. Il s'agit de la proposition suivante:

Proposition 1.1. *Soit (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces et $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ deux applications homotopes. Alors f_* et g_* définissent les mêmes applications $H_n(X, A, M) \rightarrow H_n(Y, B, M)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout groupe M .*

On rappelle qu'une application $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(A) \subset B$. Une homotopie est une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $H(x, t) \in B$ pour tout $x \in A$ et $t \in [0, 1]$.

On va introduire un outil pour formaliser la preuve qui nous sera utile plus tard: il s'agit d'un produit (noté \times)

$$C_m(X, \mathbb{Z}) \times C_n(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{m+n}(X \times Y, \mathbb{Z})$$

qui induira une application bilinéaire $H_m(X, \mathbb{Z}) \times H_n(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{m+n}(X \times Y, \mathbb{Z})$.

Etant donné $\sigma : \Delta_m \rightarrow X$ et $\tau : \Delta_n \rightarrow Y$, le produit $\sigma \times \tau : \Delta_{m+n} \rightarrow X \times Y$ est obtenu en subdivisant $\Delta_m \times \Delta_n$ en $(m+n)$ -simplexes puis appliquant $\sigma \times \tau$. Cela requiert un choix en général, comme le montre le cas de $\Delta_1 \times \Delta_1$: c'est un carré qu'on peut subdiviser en deux triangles à l'aide d'une diagonale, mais il n'y a pas de raison de choisir l'une plutôt que l'autre.

On procède comme suit. Notons e_0, \dots, e_m les sommets de Δ_m et f_0, \dots, f_n ceux de Δ_n . On fait correspondre à chaque couple (e_i, f_j) le point de \mathbb{R}^2 de coordonnées (i, j) . Soit γ un chemin dans \mathbb{R}^2 formé de $m+n$ segments horizontaux et verticaux de longueur 1 reliant $(0, 0)$ et (m, n) à l'aide de pas allant soit vers le haut, soit vers la droite.

A chaque chemin γ passant par $(0, 0) = (i_0, j_0), \dots, (i_{m+n}, j_{m+n}) = (m, n)$ correspond un simplexe affine $l_\gamma : \Delta_{m+n} \rightarrow \Delta_m \times \Delta_n$ envoyant le k -ème sommet sur (e_{i_k}, f_{j_k}) . On note alors $|\gamma|$ le nombre de carrés de la grille $[0, m] \times [0, n]$ situés sous γ et on pose

$$\sigma \times \tau = \sum_{\gamma} (-1)^{|\gamma|} (\sigma \times \tau) \circ l_\gamma.$$

Lemme 1.1. *L'application $\times : C_m(X, \mathbb{Z}) \times C_n(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{m+n}(X \times Y, \mathbb{Z})$ ainsi définie vérifie $\partial(x \times y) = \partial x \times y + (-1)^m x \times \partial y$.*

Proof. C'est un calcul désagréable laissé en exercice. □

Une conséquence immédiate de cette formule est que le produit de deux cycles est un cycle, puis que le produit d'un cycle par un bord est un bord. Ainsi, le produit \times induit bien un morphisme en homologie. On peut en fait montrer que ce produit définit un quasi-isomorphisme

$$\times : C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y).$$

Il s'agit alors d'un problème d'algèbre homologique de relier l'homologie d'un produit tensoriel de complexes au produit tensoriel des homologies. La formule

de Künneth nous dira que sous certaines hypothèses, le morphisme induit ci-dessous est un isomorphisme:

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X, \mathbb{Z}) \otimes H_q(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X \times Y, \mathbb{Z}).$$

Voyons plutôt comment s'en servir pour prouver la Proposition 1.1 dans le cas absolu, le cas relatif se traitant de la même façon.

Proof. Soit $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ une homotopie entre f et g . Cette application induit un morphisme $H_* : C_{n+1}([0, 1] \times X, M) \rightarrow C_{n+1}(Y, M)$. Notons $K : C_n(X, M) \rightarrow C_{n+1}(Y, M)$ le morphisme défini par $K(\sigma) = H_*(i_1 \times \sigma)$ où $i_1 : \Delta_1 \rightarrow [0, 1]$ est l'application affine envoyant e_0, e_1 sur 0 et 1 respectivement. On calcule $\partial K(\sigma) = \partial H_*(i_1 \times \sigma) = H_* \partial(i_1 \times \sigma) = H_*(\partial i_1 \times \sigma) - H_*(i_1 \times \partial \sigma)$. D'où $\partial K(\sigma) + K(\partial \sigma) = g_* \sigma - f_* \sigma$. Cette formule se prolonge par linéarité et montre que si x est un cycle, $f_*(x)$ et $g_*(x)$ diffèrent d'un bord et donc induisent bien la même application en homologie. \square

On déduit de cet énoncé que tout espace contractile a la même homologie que le point. C'est bien, mais on n'a toujours pas calculé un groupe d'homologie non trivial.

1.4 Excision et suite de Mayer-Vietoris

Supposons que l'on ait un cycle $x = \sum_{i \in I} \pm \sigma_i \in Z_n(X, \mathbb{Z})$. On choisit l'un des simplexes que l'on veut remplacer par $(n+1)$ simplexes obtenus en faisant le cône de chaque face par rapport au sommet. En considérant la projection de $\Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$ qui envoie le dernier sommet sur le barycentre, on voit que la différence est bien un cobord, ainsi x est cobordant à x' où on a remplacé l'un des simplexes par une somme de simplexes *plus petits*.

La procédure qu'on vient de décrire peut-être systématisée (avec quelques efforts) pour montrer que l'on peut, pour calculer l'homologie d'un espace, supposer que les simplexes sont arbitrairement petits, c'est-à-dire à support dans un recouvrement. Formalisons cela.

Soit $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$ une famille de sous-ensembles de X dont les intérieurs recouvrent X et notons $C_n^{\mathcal{U}}(X, M)$ le sous-complexe de $C_n(X, M)$ formé des chaînes $\sum_{i \in I} m_i \sigma_i$ telles que pour tout $i \in I$ l'image de $\sigma_i : \Delta_n \rightarrow X$ soit contenue dans l'un des U_j .

Proposition 1.2 (Petites chaînes). *Dans les notations ci-dessus, l'inclusion $C_n^{\mathcal{U}}(X, M) \rightarrow C_n(X, M)$ induit un isomorphisme $H_n^{\mathcal{U}}(X, M) \rightarrow H_n(X, M)$.*

On remet la preuve à plus tard et on en déduit les deux résultats fondamentaux suivants.

Théorème 1.1 (Mayer-Vietoris). *Soit $A, B \subset X$ deux sous-ensembles dont les intérieurs recouvrent X . Il existe alors une suite exacte longue (coefficients dans M omis):*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{i_*^A + i_*^B} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{j_*^A - j_*^B} H_n(X) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

Proof. On a noté $i^A : A \cap B \rightarrow A, i^B : A \cap B \rightarrow B, j^A : A \rightarrow X, j^B : B \rightarrow X$ les inclusions. Bien sûr, cette suite exacte longue vient d'une suite exacte courte de complexes, à savoir

$$0 \longrightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{i_*^A - i_*^B} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{j_*^A + j_*^B} C_*^{\{A,B\}}(X) \longrightarrow 0$$

Comme d'après la Proposition 1.2 l'inclusion $C_*^{\{A,B\}}(X, M) \rightarrow C_*(X, M)$ induit un isomorphisme en homologie, le résultat s'en suit. \square

Théorème 1.2 (Excision). *Soit $A \subset B \subset X$ tels que l'adhérence de A soit incluse dans l'intérieur de B . Alors l'inclusion de la paire $(X \setminus A, B \setminus A) \hookrightarrow (X, B)$ induit un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$H_n(X \setminus A, B \setminus A, M) \xrightarrow{\sim} H_n(X, B, M).$$

Proof. Oublions les coefficients pour simplifier la notation. Le morphisme ci-dessus est induit par le morphisme de complexes $C_*(X \setminus A)/C_*(B \setminus A) \rightarrow C_*(X)/C_*(B)$. Comme par hypothèse, les intérieurs de B et $X \setminus A$ recouvrent X , la proposition 1.2 permet de remplacer $C_*(X)$ par $C_*(B) + C_*(X \setminus A)$. Dans ce cas là, le morphisme précédent est une égalité car $C_*(X) \cap C_*(B) = C_*(B \setminus A)$ et le théorème est démontré. \square

Pour terminer cette section, rappelons la preuve de la proposition des petites chaînes.

Soit Δ_n le simplexe standard. Etant donnés $v_0, \dots, v_k \in \Delta_n$ on note b_{v_0, \dots, v_k} leur barycentre et $[v_0, \dots, v_k] : \Delta_k \rightarrow \Delta_n$ l'unique application affine envoyant les sommets e_0, \dots, e_k de Δ_k sur v_0, \dots, v_k respectivement. On va subdiviser Δ_n barycentriquement: les composantes de la subdivision seront indexées par les permutations $\alpha \in S_{n+1}$ comme suit:

$$l_\alpha = [b_{\alpha_0}, b_{\alpha_0, \alpha_1}, \dots, b_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}]$$

On définit alors $\text{Sb} : C_n(X, M) \rightarrow C_n(X, M)$ en posant pour $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$: $\text{Sb}(m\sigma) = m \sum_{\alpha \in S_{n+1}} \epsilon(\alpha) \sigma \circ l_\alpha$. Il faut alors vérifier qu'on définit bien ainsi un morphisme de complexes.

Lemme 1.2. *Le morphisme Sb est homotope à l'identité au sens où il existe des morphismes $K_n : C_n(X, M) \rightarrow C_{n+1}(X, M)$ tel que $K_{n-1}\partial + \partial K_n = \text{Id} - \text{Sb}$.*

Proof. On pose $K_0 = K_{-1} = 0$ et on suppose par récurrence que K_{n-1} est défini. En notant $i_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ l'identité, on peut se contenter de définir $K(i_n)$ pour poser ensuite $K(\sigma) = \sigma_* K(i_n)$.

La formule du lemme nous dit que $\partial K_n(i_n) = i_n - \text{Sb}i_n - K_{n-1}(\partial i_n)$. Comme l'homologie de Δ_n est triviale en degré > 0 puisque Δ_n est contractile, on peut résoudre cette équation si et seulement si le membre de droite est un cycle, i.e.

$$\partial i_n - \partial \text{Sb}i_n = \partial K_{n-1}(\partial i_n)$$

Or ceci est vrai par hypothèse de récurrence appliquée à ∂i_n . Ceci termine la preuve du lemme. \square

Lemme 1.3. *Etant donné un recouvrement \mathcal{U} de X et $x \in C_n(X, M)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Sb}^k(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X, M)$.*

Proof. On peut par linéarité supposer que x est un simplexe $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$. Les ouverts $V_i = \sigma^{-1}(\dot{U}_i)$ recouvrent le compact Δ_n . Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que toute boule de rayon ϵ est incluse dans l'un des V_i .

Comme le diamètre de chaque simplexe dans $\text{Sb}^k(i_n)$ est inférieur à $(\frac{n}{n+1})^k \sqrt{2}$, il suffit de prendre k assez grand pour que ϵ soit inférieur à cette valeur et le lemme est démontré. \square

Proof. (of Proposition 1.2). On veut donc prouver que l'inclusion $C_*^{\mathcal{U}}(X, M) \rightarrow C_*(X, M)$ induit un isomorphisme en homologie. Prenons $x \in Z_n(X, M)$. Comme x est cobordant à $\text{Sb}^k(x)$ pour tout k et que $\text{Sb}^k(x) \in C_n^{\mathcal{U}}(X, M)$ pour k assez grand, l'application $H_n^{\mathcal{U}}(X, M) \rightarrow H_n(X, M)$ est surjective. Si $x \in Z_n^{\mathcal{U}}(X, M)$ s'écrit $x = \partial y$ avec $y \in C_{n+1}(X, M)$, on peut remplacer y par $\text{Sb}^k(y)$ pour k assez grand, ce qui montre que $x \in B_n^{\mathcal{U}}(X, M)$ et le même morphisme est injectif. Cela clôt la preuve. \square

1.5 L'homologie du cercle

Considérons donc le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$ que l'on découpe en $U = \{z \in S^1, \text{Re}(z) > -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ et $V = \{z \in S^1, \text{Re}(z) < \frac{\sqrt{2}}{2}\}$. On constate que U, V sont contractiles et $U \cap V$ est la réunion de deux ouverts contractiles $W_{\pm} = \{z \in S^1, \pm \text{Im}(z) > \frac{\sqrt{2}}{2}\}$. La suite de Mayer-Vietoris donne donc (à coefficients entiers):

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\delta} H_0(U \cap V) \xrightarrow{\Phi} H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow H_0(S^1) \rightarrow 0.$$

On savait déjà que $H_0(S^1) = \mathbb{Z}$, on apprend que $H_k(S^1) = 0$ si $k > 1$. De plus, $H_0(U \cap V) = H_0(W_+ \amalg W_-) \simeq \mathbb{Z}^2$ et $H_0(U) \oplus H_0(V) \simeq \mathbb{Z}^2$. Le morphisme Φ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dans ces bases. Ainsi un générateur de $H_1(S^1)$ est donné par $\alpha = \delta^{-1}(1, -1)$. Pour voir de qui il s'agit, on revient à la construction du morphisme δ .

Le vecteur $(1, 1)$ correspond à la 0-chaîne $[i] + [-i]$. Considérée dans $H_0(U)$ et $H_0(V)$, cette 0-chaîne borde deux arcs, γ_U et γ_V . Poussés dans $C_*(S^1)$ dans la suite de Mayer-Vietoris, ils donnent $\gamma_U - \gamma_V$. Il s'agit bien d'un cycle dans $H_1(S^1)$, le générateur d'après le raisonnement précédent. Observons qu'il correspond à l'orientation trigonométrique du cercle.

Plus généralement, en découpant la sphère S^n en deux hémisphères, analysant la suite de Mayer-Vietoris associée et par récurrence sur n , on montre le fait fondamental suivant:

$$H_k(S^n, M) = \begin{cases} M & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.6 Coefficients universels

Pour l'instant, le groupe de coefficients M est arbitraire. En pratique, on s'intéressera essentiellement à $M = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Heureusement, les différents groupes d'homologie $H_*(X, A, M)$ sont fortement reliés entre eux. Il suffit de connaître $H_*(X, A, \mathbb{Z})$ pour calculer tous les autres, comme le montre la formule suivante.

Théorème 1.3. *Pour toute paire d'espace topologique (X, A) et tout groupe abélien M on a la suite exacte naturelle suivante:*

$$0 \rightarrow H_n(X, A, \mathbb{Z}) \otimes M \rightarrow H_n(X, A, M) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X, A, \mathbb{Z}), M) \rightarrow 0.$$

De plus cette suite est scindée (mais le scindage n'est pas naturel).

Proof. Il s'agit d'un fait d'algèbre homologique pure: on note $C_* = C_*(X, A, \mathbb{Z})$ le complexe relatif: le seul fait qu'on utilise est que c'est un \mathbb{Z} -module libre. Pour s'en convaincre, on constate qu'il est librement engendré en degré n par les simplexes $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ qui ne sont pas contenus dans A .

Le but de la formule des coefficients universels est alors de comparer l'homologie de $C_* \otimes M$ avec l'homologie de C_* tensorisée par M .

Notons Z_* le sous-complexe de C_* formé des cycles, muni de la différentielle nulle. On note aussi B_* le sous-complexe de C_* formé des bords, muni aussi de la différentielle nulle. La différentielle induit une suite exacte longue de complexes $0 \rightarrow Z_* \rightarrow C_* \xrightarrow{\partial} B_{*-1} \rightarrow 0$.

Comme tous les termes sont libres, les suites sont scindées et on obtient aussi une suite exacte courte en tensorisant par M :

$$0 \rightarrow Z_* \otimes M \rightarrow C_* \otimes M \rightarrow B_{*-1} \otimes M \rightarrow 0.$$

Prenant la suite exacte longue associée et observant que Z_* et B_* sont égaux à leur homologie puisque leur différentielle est nulle on obtient la suite

$$B_n \otimes M \rightarrow Z_n \otimes M \rightarrow H_n(C_* \otimes M) \rightarrow B_{n-1} \otimes M \rightarrow Z_{n-1} \otimes M.$$

En notant $\phi_n : B_n \otimes M \rightarrow Z_n \otimes M$ on peut réécrire cette suite

$$0 \rightarrow \text{coker } \phi_n \rightarrow H_n(C_* \otimes M) \rightarrow \ker \phi_{n-1} \rightarrow 0.$$

On rappelle que toute suite exacte de groupes abéliens $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ induit une suite exacte longue

$$0 \rightarrow \text{Tor}(A, M) \rightarrow \text{Tor}(B, M) \rightarrow \text{Tor}(C, M) \rightarrow A \otimes M \rightarrow B \otimes M \rightarrow C \otimes M \rightarrow 0.$$

Ainsi la suite exacte $0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0$ induit-elle la suite

$$0 \rightarrow \text{Tor}(H_n, M) \rightarrow B_n \otimes M \rightarrow Z_n \otimes M \rightarrow H_n \otimes M \rightarrow 0$$

d'où on tire directement le résultat en identifiant $\text{coker } \phi_n$ et $\ker \phi_{n-1}$. □

2 Complexes et homologie cellulaires

2.1 Définition et exemples

Un CW-complexe est un espace topologique séparé X muni d'une application $d : X \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant certaines propriétés décrites ci-dessous. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle n -cellule une composante connexe de $d^{-1}(n)$ et on note $X^n = \{x \in X, d(x) \leq n\}$ qu'on appelle le n -squelette de X .

1. On suppose que pour chaque n -cellule C il existe une application continue $\phi_C : (D^n, \partial D^n) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ dont la restriction à l'intérieur du disque induit un homéomorphisme de \mathring{D}_n sur C . On l'appelle application caractéristique de C .
2. On suppose de plus que pour chaque cellule C de dimension n , son bord $\overline{C} \setminus C$ est contenu dans un nombre fini de cellules de dimension $< n$.
3. On suppose qu'un sous-ensemble $F \subset X$ est fermé si et seulement si $F \cap \overline{C}$ est fermé dans \overline{C} pour toute cellule C .

Le CW-complexe X est dit de dimension au plus n si $X = X^n$, et fini s'il ne contient qu'un nombre fini de cellules. Un sous-complexe $A \subset X$ est un sous-espace qui est réunion de cellules de sorte que si $C \subset A$ alors $\overline{C} \subset A$. En conséquence, A est lui-même un CW-complexe.

La proposition suivante est fondamentale, elle ramène le calcul de la plupart des invariants topologiques au cas des complexes finis.

Proposition 2.1. *Tout compact d'un CW-complexe est contenu dans un sous-complexe fini.*

Proof. Soit K un compact de X . Montrons d'abord que K ne rencontre qu'un nombre fini de cellules. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite infinie $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ d'éléments de K appartenant à des cellules distinctes. On voudrait montrer que S est fermé. Pour cela il suffit de montrer que $S \cap \overline{C}$ est fermé dans \overline{C} pour toute n -cellule C .

On prouve cela par récurrence sur n , supposons que $S \cap \overline{D}$ est fermé dans \overline{D} pour toute cellule D de dimension $< n$. Par hypothèse de récurrence, $S \cap \partial C$ est fermée comme réunion de $S \cap \overline{D}$ pour un nombre fini de cellules D de dimension $< n$. Comme $C \cap S$ contient au plus un point, nécessairement fermé, S est fermé dans \overline{C} et la propriété est démontrée.

Comme le même argument fonctionne pour toute partie de S , S est discret. Comme S est contenu dans un compact, il est fini et on obtient une contradiction.

Ainsi K est contenu dans une réunion finie de cellules. Il suffit alors de prouver que chaque cellule est contenue dans un sous complexe fini. Mais chaque cellule de dimension n rencontrant dans son bord un nombre fini d'autres cellules. En adjoignant toutes ces cellules par récurrence, on obtient un sous-complexe fini contenant la cellule initiale, et la proposition est démontrée. \square

Tous les espaces topologiques raisonnables sont des CW-complexes: donnons quelques exemples. Toute variété différentiable a une structure de CW-complexe, et d'après un théorème de Kirby et Siebenmann, aussi toute variété topologique de dimension différente de 4.

1. Tout CW-complexe de dimension 0 est un ensemble discret, tout CW-complexe de dimension 1 est un graphe.
2. La sphère S^n . Une 0-cellule $e_0 \in S^n$ et une n -cellule $\phi : D^n \rightarrow S^n$ avec $\phi(\partial D^n) = \{e_0\}$.
3. Les espaces projectifs réels. On a une inclusion $\mathbb{R}\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$. De plus, les homéomorphismes $\mathbb{R}\mathbb{P}^k \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}^{k-1} \simeq \mathbb{R}^k$ munissent $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ d'une structure de CW-complexe avec une cellule en chaque dimension.
4. Les espaces projectifs complexes. On a de même les inclusions $\mathbb{C}\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \subset \dots \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ avec $\mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus \mathbb{C}\mathbb{P}^{k-1} \simeq \mathbb{C}^k$. Cette fois, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ est un CW-complexe avec une cellule en chaque dimension paire.

Les CW-complexes sont stables par quotient: si A est un sous-complexe de X , il existe une structure de CW-complexe naturelle sur X/A . Le sous-complexe A s'identifie à une 0-cellule de X/A , et les autres cellules de X/A sont en bijection avec les cellules de $X \setminus A$. Par exemple, on se convainc aisément que pour tout CW-complexe X , le quotient X^n/X^{n-1} est un bouquet de n -sphères, indexées par les n -cellules de X .

Une propriété technique fondamentale est l'extension des homotopies d'un sous-complexe au complexe total, démontrée dans la proposition suivante.

Proposition 2.2. *Soit (X, A) une paire de CW-complexes et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On se donne une homotopie $f_t : A \rightarrow Y$. Il existe alors une extension de f_t à X tout entier.*

Proof. Il suffit de montrer que $X \times [0, 1]$ se rétracte par déformation sur $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$: on n'a plus qu'à composer la rétraction par f pour prolonger l'homotopie.

On peut facilement rétracter par déformation $D^n \times [0, 1]$ sur $D^n \times \{0\} \cup \partial D_n \times [0, 1]$. Par exemple, on peut faire une combinaison barycentrique d'un point avec sa projection radiale issue de $(0, 2) \in D^n \times \mathbb{R}$. On effectue cette opération sur chaque cellule de dimension n de $X \setminus A$, sur l'intervalle de temps $[1/2^{n+1}, 1/2^n]$. Il n'y a pas de problème de continuité puisque cette rétraction est continue sur X^n pour tout n . \square

On en déduit le lemme suivant qui permet d'interpréter topologiquement l'homologie relative.

Lemme 2.1. *Pour toute paire de CW-complexes (X, A) , on a un isomorphisme*

$$\tilde{H}_*(X/A, M) \simeq H_*(X, A, M).$$

Proof. On note $CA = A \times [0, 1]/(a, 0) \sim (a', 0)$. Montrons que le morphisme $f : X \cup CA \rightarrow X \cup CA/CA = X/A$ est une équivalence d'homotopie. On considère l'homotopie de $f|_A$ qui écrase A sur le sommet du cône. Par la propriété d'extension des homotopies, il existe une homotopie $f_t : X \cup CA \rightarrow X \cup CA$ qui se factorise en une application $\bar{f}_t : X/A \rightarrow X/A$. L'application f_1 induit une application $g : X/A \rightarrow X \cup CA$. On vérifie que c'est un inverse homotopique de f : en effet, $g \circ f = f_1$ est homotope à l'identité via f_t , et $f \circ g = g$ l'est via \bar{f}_t .

On a donc $H_*(X \cup CA, CA) = H_*(X/A, \text{pt}) = \tilde{H}_*(X/A)$. Par excision, on a facilement $H_*(X \cup CA, CA) = H_*(X, A)$ et le lemme est démontré. \square

2.2 L'homologie cellulaire

2.2.1 Le complexe cellulaire

Soit X un CW-complexe et M un groupe abélien. On définit $C_k^{\text{cell}}(X, M) = H_k(X^k, X^{k-1}, M)$. Ce groupe contient une copie de M pour chaque k -cellule de X . Pour le montrer, on prouve la proposition suivante, d'intérêt général.

Proposition 2.3. *Soit X un CW-complexe et $0 < \epsilon < 1$. Il existe pour tout sous-complexe $A \subset X$ un voisinage ouvert $N_\epsilon(A)$ de A qui se rétracte sur A et vérifie $N_\epsilon(A \cap B) = N_\epsilon(A) \cap N_\epsilon(B)$.*

Proof. On pose $x \in N_\epsilon(A)$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in \dot{C}$ et $\phi_C^{-1}(x) \in D^n$ est à distance $< \epsilon$ de $\phi_C^{-1}(A)$. C'est un ouvert puisque sa restriction à chaque cellule est un ouvert et il se rétracte par déformation sur A de façon évidente. La dernière propriété est claire. \square

On a donc par la propriété d'invariance par homotopie $H_k(X^k, X^{k-1}, M) = H_k(X^k, N_\epsilon(X^{k-1}), M)$. On utilise alors la propriété d'excision pour en déduire $H_k(X^k, X^{k-1}) = H_k(X^k \setminus N_{\epsilon/2}(X^{k-1}), N_\epsilon(X^{k-1}) \setminus N_{\epsilon/2}(X^{k-1}), M)$. Comme $X^k \setminus N_{\epsilon/2}$ est une réunion disjointes de boules ouvertes de dimension k , on trouve

$$H_k^{\text{cell}}(X, M) = \bigoplus_{k\text{-cell}} H_k(D^k, \partial D^k, M).$$

Un coup d'oeil à la suite exacte longue de la paire $(D^k, \partial D^k)$ montre que $H_k(D^k, \partial D^k, M) \simeq M$, ainsi l'affirmation du début de la section est démontrée.

Considérons maintenant la suite exacte du triplet $X^{k-1} \subset X^k \subset X^{k+1}$. Le morphisme de connexion définit une application $\partial_{k+1} : H_{k+1}(X^{k+1}, X^k, M) \rightarrow H_k(X^k, X^{k-1}, M)$.

Il est facile de vérifier que $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ car les morphismes ∂_k sont des morphismes ∂ standard, considérés dans certains quotients. La formule $\partial^2 = 0$ perdure donc. On obtient donc bien une structure de complexe sur $C_*^{\text{cell}}(X, M)$.

Théorème 2.1. *Pour tout CW-complexe, il y a un isomorphisme naturel*

$$H_*^{\text{cell}}(X, M) \simeq H_*(X, M).$$

Ce résultat est assez pénible à montrer, en particulier par ce qu'il n'y a pas de morphisme de chaînes naturel du complexe cellulaire vers le complexe singulier (ni l'inverse). La preuve naturelle utilise la technique des suites spectrales qu'on verra plus tard. L'intérêt de ce théorème est à la fois pratique, car les complexes cellulaires sont souvent de dimension finie et explicitement calculables, et théorique car les CW-complexes se prêtent à de nombreuses preuves par récurrence sur la dimension.

2.2.2 Calcul de l'application bord

Une condition pour que l'homologie cellulaire soit effectivement calculable est de savoir calculer le morphisme ∂_k . Pour s'y aider on dispose de l'interprétation suivante (dans laquelle on pose $M = \mathbb{Z}$ pour simplifier).

Soit $(C_i)_{i \in I}$ la famille des cellules de dimension $n + 1$ et $(D_j)_{j \in J}$ celle des cellules de dimension n . On note $\Phi : \coprod_{i \in I} D^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$ l'union disjointe des applications caractéristiques. Cette application induit par restriction $\partial\Phi : \coprod_{i \in I} S^n \rightarrow X^n$ que l'on compose par le quotient $p : X^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$.

On rappelle que ce quotient est homéomorphe à $\bigvee_{j \in J} S^n$, un bouquet de n -sphères indexées par J . En résumé, on a :

$$p \circ \partial\Phi : \coprod_{i \in I} S^n \rightarrow \bigvee_{j \in J} S^n.$$

Le morphisme ∂_n n'est autre que $(p \circ \partial\Phi)_*$ agissant sur les groupes d'homologie de rang n . Le calcul se ramène donc à celui de $f_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z})$ où $f : S^n \rightarrow S^n$. Comme $H_n(S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, f_* consiste à multiplier par un entier, noté $\deg(f)$.

Si ce calcul peut être difficile, il sera on l'espère assez clair dans les exemples. Le raisonnement précédent s'appuie par ailleurs sur le lemme suivant, d'intérêt indépendant.

2.2.3 L'espace projectif réel

Regardons en détail le cas de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. La n -ième cellule $\phi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est paramétrée par

$$\phi_n(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n, 1]$$

On identifie l'intérieur de D^n à \mathbb{R}^n via $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{1 - \sum x_i^2}(x_1, \dots, x_n)$. De cette sorte, l'application bord $\partial\phi_n : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ devient $\partial\phi_n(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n, 0] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$. On constate que les éléments de S^{n-1} envoyés dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-2}$ sont précisément les éléments de l'équateur d'équation $x_n = 0$. L'application $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-2} \simeq S^{n-1}$ se décompose en deux applications de degré ± 1 . En coordonnées, l'une est l'identité, l'autre est son opposée. Le degré de cette application est donc $1 + (-1)^n$. On obtient donc le complexe suivant:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{\dots} \mathbb{Z} \xleftarrow{1+(-1)^n} \mathbb{Z}$$

Et donc les groupes d'homologie de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ sont

$$H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = n \text{ impair} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } 0 < k < n \text{ et } k \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2.4 Autres exemples

1. Dans le cas des espaces projectifs complexes, la situation est encore plus favorable: la description ci-dessus continue d'avoir lieu avec cette fois des disques complexes à la place des disques réels. En conclusion, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ possède une cellule en toute dimension paire. La différentielle cellulaire est triviale et on a

$$H_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } 0 \leq k \leq 2n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Une surface de genre g , notée S_g est obtenue en identifiant les côtés d'un $4g$ -gone à l'aide du motif $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. On en déduit que S_g possède une décomposition cellulaire avec une 0-cellule, $2g$ 1-cellules et une 2-cellule. La différentielle est triviale puisque chaque arête est reliée à un unique sommet et que dans le bord du $4g$ -gone, chaque arête apparaît deux fois avec des orientations opposées. On en déduit le fait fondamental suivant:

$$H_0(S_g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(S_g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_2(S_g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

3. Imaginons la variété de Seifert-Weber M obtenue en identifiant les faces opposées d'un dodécaèdre après rotation de $3\pi/5$. La variété obtenue a une 3-cellule (le dodécaèdre), 6 faces (les 12 faces du dodécaèdre identifiées 2 à deux), 6 arêtes (chaque arête correspond à 5 arêtes du dodécaèdre identifiées) et enfin un seul sommet.

Pour calculer le premier groupe d'homologie, on observe la Figure 2.2.4. En réduisant le système à 6 équations et 6 inconnues, on trouve $H_1(M, \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$.

En analysant le complexe de chaîne $\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}^6 \leftarrow \mathbb{Z}^6 \leftarrow \mathbb{Z}$, on observe que le rang de la différentielle $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$ est 5 et que B_2 est un facteur direct de C_2 . On en déduit que $H_2(M, \mathbb{Z}) = 0$. En conclusion

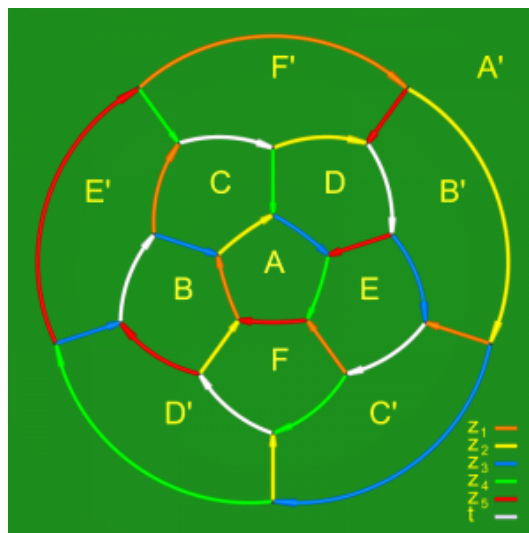
$$H_0(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(M, \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2, \quad H_2(M, \mathbb{Z}) = 0, \quad H_3(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

4. Finissons par un dernier énoncé, contre-intuitif. Toute variété algébrique affine complexe de dimension complexe n se rétracte par déformation sur un CW-complexe fini de dimension n (on attendrait plutôt $2n$, la dimension réelle de cette variété). On entend par là le lieu d'annulation dans \mathbb{C}^N d'une famille de polynômes.

Donnons un exemple non trivial: l'espace des configurations

$$X_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, z_i \neq z_j\}$$

s'identifie au lieu des (z_1, \dots, z_n, t) tels que $t \prod_{i < j} (z_i - z_j) = 1$. Comme variété algébrique affine de dimension n , il vérifie donc $H_k(X_n, \mathbb{Z}) = 0$ pour $k > n$.



3 Cohomologie et produits

3.1 Cohomologie

Etant donné une paire d'espaces X, A et un groupe abélien M , on définit $C^k(X, A, M) = \text{Hom}(C_k(X, A), M)$ et $d_k : C^k(X, A, M) \rightarrow C^{k+1}(X, A, M)$ par $d_k \phi(x) = \phi(\partial_{k+1} x)$.

On définit $H^k(X, A, M) = \ker d_k / \text{im } d_{k-1}$ et on appelle ce groupe cohomologie singulière de X relativement à A à coefficients dans M . Ces groupes jouissent des mêmes propriétés que les groupes d'homologie (en renversant les flèches) mais sont mieux adaptés pour certains problèmes.

3.1.1 Coefficients universels

Il y a une application naturelle $\text{ev} : H^k(X, A, M) \rightarrow \text{Hom}(H_k(X, A), M)$ où les coefficients \mathbb{Z} sont sous-entendus. Elle est définie par $[\phi]([\sigma]) = \phi(\sigma)$ pour $\phi \in Z^k(X, A, M)$ et $\sigma \in C_k(X, A)$.

A un défaut près, la cohomologie d'un espace est le dual de l'homologie: plus précisément on a la formule suivante, dite des coefficients universels.

Théorème 3.1. *Pour toute paire d'espaces (X, A) , l'application ev rentre dans la suite exacte naturelle et scindée suivante:*

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X, A), M) \rightarrow H^n(X, A, M) \xrightarrow{\text{ev}} \text{Hom}(H_n(X, A), M) \rightarrow 0.$$

Proof. La preuve de ce théorème est de l'algèbre homologique pure. On utilise seulement le fait que $C_*(X, A)$ est un complexe de \mathbb{Z} -modules libres qu'on note désormais C_* .

Voyons déjà pourquoi ev est surjective. Partons de la suite exacte

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1} \rightarrow 0. \quad (1)$$

Comme B_{n-1} est un sous-groupe du groupe libre C_{n-1} , c'est un groupe libre et la suite se scinde. Il y a donc une rétraction $p : C_n \rightarrow Z_n$. Ainsi, tout homomorphisme $\phi : Z_n \rightarrow M$ se prolonge via $\phi \circ p$ en un homomorphisme $\phi \circ p : C_n \rightarrow M$. Etant nul sur B_n , on a $d_n(\phi \circ p) = 0$ et $\phi \circ p \in Z^n$. En prenant sa classe dans H^n , on a effectivement construit une section de ev , montrant sa surjectivité et son caractère scindé. Il ne nous reste plus qu'à analyser son noyau.

Rappelons que par construction du foncteur Ext , toute suite exacte de groupes abéliens $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ donne lieu à une suite exacte longue:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \rightarrow \text{Hom}(B, M) \rightarrow \text{Hom}(A, M) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}(C, M) \rightarrow \text{Ext}(B, M) \rightarrow \text{Ext}(A, M) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2)$$

D'autre part, le groupe $\text{Ext}(A, M)$ se calcule facilement grâce aux règles suivantes:

1. $\text{Ext}(A \oplus B, M) = \text{Ext}(A, M) \oplus \text{Ext}(B, M)$
2. $\text{Ext}(A, M) = 0$ si A est libre.
3. $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, M) = M/nM$.

On déduit donc de la suite $0 \rightarrow B_{n-1} \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow H_{n-1} \rightarrow 0$ la suite

$$\text{Hom}(Z_{n-1}, M) \rightarrow \text{Hom}(B_{n-1}, M) \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}, M) \rightarrow 0$$

et de la suite (1) la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}(B_{n-1}, M) \rightarrow \text{Hom}(C_n, M) \rightarrow \text{Hom}(Z_n, M) \rightarrow 0$$

Ainsi, un homomorphisme $\phi \in H^n$ vérifiant $ev(\phi) = 0$ correspond à un élément de $\text{Hom}(C_n, M)$ nul sur Z_n . D'après la suite précédente, c'est donc un élément de $\text{Hom}(B_{n-1}, M)$. Cet élément est un cobord s'il est dans l'image de l'application $\text{Hom}(Z_{n-1}, M) \rightarrow \text{Hom}(B_{n-1}, M)$. On en déduit le résultat. \square

On peut donc calculer la cohomologie entière d'un espace si on connaît son homologie entière. Par exemple, on trouve

$H_0(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$	$H_1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$H_2(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) = 0$
$H^0(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$	$H^1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) = 0$	$H^2(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

3.1.2 Quelques exemples

Le groupe $H^0(X, \mathbb{Z})$ est formé des fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ constantes sur les composantes connexes par arcs. On retrouve sans surprise l'isomorphisme $H^0(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_0(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$. Il est intéressant de construire à la main des cocycles de rang supérieur. Prenons l'exemple de $H^1(S^1, \mathbb{R})$ en identifiant S^1 à \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Par le théorème du relèvement, tout 1-simplexe $\sigma : \Delta_1 = [0, 1] \rightarrow S^1$ se relève en $\tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et on peut poser $\phi(\sigma) = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$. Il est clair que cela ne dépend pas du relèvement et que cela définit un cocycle, vu que si on a $\sigma : \Delta_2 \rightarrow S^1$, on peut le relever à $\tilde{\sigma} : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}$ et l'égalité $\phi(\partial\sigma) = 0$ devient évidente avec ce choix de relevé.

Ce cocycle est un générateur de $H^1(S^1, \mathbb{R})$ et correspond au cocycle d'intégration de la forme $d\theta$. On anticipe ainsi le rapport entre la cohomologie singulière et la cohomologie de De Rham.

On peut facilement se convaincre que le cocycle ϕ est en fait l'image du générateur de $H^1(S^1, \mathbb{Z})$ par l'inclusion $H^1(S^1, \mathbb{R})$. Il doit donc exister une 0-cochaîne $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\phi - df$ soit à valeurs entières, et donc représente le générateur de $H^1(S^1, \mathbb{Z})$. On peut alors prendre pour f la fonction qui à $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ associe son unique représentant dans $[0, 1[$ et constater que $\psi = \phi - df$ est entier et cohomologue à ϕ .

Au final, on aurait pu poser directement $\psi(\sigma) = \lfloor \tilde{\sigma}(1) \rfloor - \lfloor \tilde{\sigma}(0) \rfloor$ mais son sens géométrique aurait été moins clair.

3.1.3 La cohomologie cellulaire

Si X est un CW-complexe et M un groupe abélien, on définit la cohomologie cellulaire en posant $C_{\text{cell}}^n(X, M) = \text{Hom}(C_k^{\text{cell}}(X), M)$ et en prenant pour différentielle l'adjoint de la différentielle cellulaire. On calcule la cohomologie cellulaire aussi facilement que l'homologie cellulaire. Voyons quelques applications.

Théorème 3.2. *Pour tout CW-complexe X on note $[X, S^1]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $f : X \rightarrow S^1$. On le munit d'une structure de groupe abélien en posant $(fg)(x) = f(x)g(x)$. L'application*

$$\Phi : [X, S^1] \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z})$$

définie par $\Phi(f) = f^\omega$ où ω est le générateur standard défini ci-dessus est un isomorphisme de groupes, naturel par rapport à X .*

Proof. Il est clair que Φ est bien définie et naturelle. Vérifions la propriété de morphisme. On a $fg = m \circ f \times g$ où $m : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ est la multiplication. Ainsi il suffit de vérifier que $m^* : H^1(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \rightarrow H^1(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ est l'application diagonale. On obtient cela en constatant que les applications $i_1, i_2 : S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ définies par $i_1(x) = (x, 1), i_2(x) = (1, x)$ induisent les projections $H^1(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ puis que $m \circ i_1 = m \circ i_2 = \text{Id}$.

Voyons maintenant pourquoi Φ est surjectif. On prend $\alpha \in H^1(X, \mathbb{Z})$. Comme X est un CW-complexe, on peut le représenter par un cocycle cellulaire $A : C_1^{\text{cell}}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. On définit alors une application $f : X \rightarrow S^1$ par récurrence sur le squelette.

X^0 : On pose $f(x) = 1$ pour tout $x \in X^0$.

X^1 : Pour toute 1-cellule $e : [0, 1] \rightarrow X^1$ on pose $f(e(t)) = \exp(2i\pi A(e)t)$.

X^2 : Pour toute 2-cellule $e : D^2 \rightarrow X$, on a déjà défini f sur son bord, ce qui définit une application $f|_{\partial e} : S^1 \rightarrow S^1$. Son degré est égal à $A(\partial e)$, soit 0 car A est un cocycle. Ainsi $f|_{\partial e}$ est homotope à une constante. Cette homotopie permet de prolonger f à e tout entier.

X^n : Pour toute n -cellule $e : D^n \rightarrow X$ avec $n > 2$, on a déjà défini f sur $\partial D^n = S^{n-1}$. Comme S^{n-1} est simplement connexe, $f|_{\partial e}$ se prolonge à e et l'application f est construite.

Voyons l'injectivité: prenons $f : X \rightarrow S^1$ avec $f^*\omega = 0$. On veut construire une homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow S^1$ entre f et l'application constante égale à 1. On obtient une décomposition cellulaire de $X \times [0, 1]$ en ajoutant aux cellules de $X \times \{0, 1\}$ des cellules de la forme $e \times [0, 1]$. Comme pour la surjectivité, on construit l'homotopie par récurrence sur le squelette.

Pour chaque 0-cellule e de X , on peut définir $H|_{e \times [0, 1]}$ en reliant $f(e)$ à 1 dans S^1 arbitrairement. Pour chaque 1-cellule $e : [0, 1] \rightarrow X$, on a ainsi défini H sur le bord de $e \times [0, 1]$: cela nous donne un degré $A(e)$ que l'on peut voir comme une cochaîne $A \in C_{\text{cell}}^1(X, \mathbb{Z})$. Bien sûr, elle représente $f^*\omega$: comme cette classe est nulle par hypothèse, A est un cobord, i.e. $A = B \circ \partial$ pour une certaine fonction $B : X^0 \rightarrow \mathbb{Z}$. Cette fonction B nous dit comment modifier le choix arbitraire qu'on a fait pour relier $f(e)$ à 1 à la première étape. Une fois corrigé, il n'y a plus d'obstruction à construire H sur chaque cellule et le résultat est démontré comme pour l'injectivité. \square

On obtient une interprétation topologique de $H^2(X, \mathbb{Z})$ plus difficile mais tout aussi utile, qu'on ne traite pas en détail. On appelle S^1 -fibré principal sur X un espace topologique P muni d'une application $\pi : P \rightarrow X$ et d'une action continue de S^1 sur P agissant simplement et transitivement sur les fibres de π . On demande que P soit localement trivial sur X au sens où X est recouvert par des ouverts U tels que $\pi^{-1}(U) \simeq U \times S^1$ avec l'action évidente de S^1 . On note $\text{Bun}_{S^1}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de S^1 -fibrés sur X .

On observe qu'un S^1 -fibré principal est trivial si et seulement si il admet une section.

Théorème 3.3. *Pour tout CW-complexe X , il existe un isomorphisme naturel*

$$c_1 : \text{Bun}_{S^1}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Proof. La preuve la plus naturelle utilise la cohomologie de Čech, expliquons intuitivement comment on peut construire c_1 comme précédemment. On admet ici le fait relativement élémentaire que tout S^1 -fibré sur un disque est trivial. On peut donc chercher à trivialisier un fibré $\pi : P \rightarrow X$ par récurrence sur ses cellules. Sur le 0-squelette, cela revient à choisir une section de P au-dessus de chaque point. Au-dessus d'une 1-cellule $e : [0, 1] \rightarrow X$, on trivialisera le fibré $e^*P \simeq [0, 1] \times S^1$. Comme S^1 est connexe, on peut relier les deux sections choisies aux extrémités, trivialisant ainsi le fibré au-dessus du 1-squelette. Passons aux 2-cellules $e : D^2 \rightarrow X$. On trivialisera à nouveau $e^*P \simeq D^2 \times S^1$. Cette fois, la section choisie au bord ne peut se prolonger que si son degré $A(e)$ est nul. La fonction A définit un élément $A \in C^2(X, \mathbb{Z})$, souvent appelé première classe de Chern, d'où la notation $c_1(P) \in H^2(X, \mathbb{Z})$. On peut montrer que c_1 est un isomorphisme par des arguments similaires à la preuve du théorème précédent. \square

3.2 Le cup-produit

3.2.1 Construction

Théorème 3.4. *Soit R un anneau commutatif unitaire et X un espace topologique. Il existe une structure d'anneau sur $H^*(X, R)$ vérifiant $x \smile y = (-1)^{pq} y \smile x$ pour $x \in H^p(X, R)$ et $y \in H^q(X, R)$. Cette structure est naturelle au sens où pour tout $f : X \rightarrow Y$, $f^* : H^*(Y, R) \rightarrow H^*(X, R)$ est un morphisme d'algèbre.*

On note $[i_0, \dots, i_k] : \Delta_k \rightarrow \Delta_n$ l'unique application affine envoyant e_0, \dots, e_k sur e_{i_0}, \dots, e_{i_k} . Étant donné $\phi \in C^p(X, R)$ et $\psi \in C^q(X, R)$ on pose pour $\sigma : \Delta_{p+q} \rightarrow X$:

$$\phi \smile \psi(\sigma) = \phi(\sigma[0, \dots, p])\psi(\sigma[p, \dots, p+q]).$$

Pour voir que cette formule induit bien un produit en cohomologie, on établit le lemme suivant:

Lemme 3.1. *Pour tout $\phi \in C^p(X, R)$ et $\psi \in C^q(X, R)$ on a :*

$$d(\phi \smile \psi) = d\phi \smile \psi + (-1)^p \phi \smile d\psi.$$

Proof. On fixe $\sigma : \Delta_{p+q+1} \rightarrow X$ et on calcule $d(\phi \smile \psi)(\sigma) = \phi \smile \psi(\partial\sigma)$. Comme $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \sigma[0, \dots, \hat{i}, \dots, p+q+1]$, on obtient

$$\begin{aligned} d(\phi \smile \psi)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \phi(\sigma[0, \dots, \hat{i}, \dots, p+1])\psi(\sigma[p+1, \dots, p+q+1]) \\ &\quad + \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i \phi(\sigma[0, \dots, p])\psi(\sigma[p, \dots, \hat{i}, \dots, p+q+1]) \end{aligned}$$

En posant $i = p+j$ dans la deuxième somme, on reconnaît bien les deux termes attendus. \square

La distributivité et l'associativité sont claires au niveau des cochaînes. De même, la naturalité (le fait que f^* préserve le produit) est immédiat. Il est clair aussi que $1 \in C^0(X, R)$ envoyant tout 0-simplexe sur 1 est neutre pour le cup-produit.

Finalement c'est la commutativité (au sens gradué) qui est la plus difficile à prouver.

Pour ce faire, étant donné $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ on définit $\bar{\sigma} = \sigma[n, \dots, 0]$. La permutation $(0, \dots, n) \mapsto (n, \dots, 0)$ est de signe $\epsilon_n = (-1)^{n(n+1)/2}$: on définit $\Pi : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ par $\Pi(\sigma) = \epsilon_n \bar{\sigma}$.

Lemme 3.2. *Le morphisme de chaînes Π est homotope à l'identité.*

Voyons d'abord comment cela conclut. Pour $\phi \in C^p(X, R)$ et $\psi \in C^q(X, R)$ on a égalité entre les quantités suivantes:

$$(\Pi^* \phi \smile \Pi^* \psi)(\sigma) = \epsilon_p \phi(\sigma[p, \dots, 0]) \psi(\sigma[p+q, p])$$

$$\Pi^*(\psi \smile \phi)(\sigma) = \epsilon_{p+q} \psi(\sigma[p+q, \dots, p]) \phi(\sigma[p, \dots, 0]).$$

Comme $\epsilon_{p+q} = (-1)^{pq} \epsilon_p \epsilon_q$, on en déduit $\Pi^* \phi \smile \Pi^* \psi = (-1)^{pq} \Pi^*(\psi \smile \phi)$. D'après le lemme, Π est homotope à l'identité, donc son adjoint Π^* agit trivialement en cohomologie. Cela montre l'identité désirée.

Proof. Commençons par prouver que Π est bien un morphisme de chaînes: on calcule

$$\partial \Pi(\sigma) = \epsilon_n \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma[n, \dots, \widehat{n-i}, \dots, 0].$$

$$\Pi(\partial \sigma) = \epsilon_{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma[n, \dots, \hat{i}, \dots, 0].$$

On déduit de $\epsilon_n = (-1)^n \epsilon_{n-1}$ l'égalité $\Pi \circ \partial = \partial \circ \Pi$.

On rappelle avoir construit $i_1 \times \sigma \in C_{n+1}([0, 1] \times X)$ vérifiant $\partial(i_1 \times \sigma) = \partial i_1 \times \sigma - i_1 \times \partial \sigma$. Explicitement, on avait $i_1 \times i_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma[0, \dots, i, i', \dots, n']$ où i désigne le i -ème sommet de $\{0\} \times \Delta_n$ et i' le i -ème sommet de $\{1\} \times \Delta_n$.

En notant $\pi : [0, 1] \times X \rightarrow X$ la deuxième projection, on définit l'opérateur $P : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ par la formule

$$P\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \epsilon_{n-i} \sigma \circ \pi[0, \dots, i, n', \dots, i'].$$

On calcule $\partial P(\sigma)$ en le décomposant en deux sommes:

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i \epsilon_{n-i} (-1)^j \sigma \circ \pi[0, \dots, \hat{j}, \dots, i, n', \dots, i'] \\ &+ \sum_{j \geq i} (-1)^i \epsilon_{n-i} (-1)^{i+1+n-j} \sigma \circ \pi[0, \dots, i, n', \dots, \hat{j}', \dots, i'] \end{aligned}$$

Les termes $j = i$ dans cette somme donnent

$$\begin{aligned} & \epsilon_n \sigma \circ \pi[n, \dots, 0] + \sum_{i>0} \epsilon_{n-i} \sigma \circ \pi[0, \dots, i-1, n', \dots, i'] \\ & + \sum_{i<n} (-1)^{n+1+i} \epsilon_{n-i} \sigma \circ \pi[0, \dots, i, n', \dots, (i+1)'] - \sigma \circ \pi[0, \dots, n] \end{aligned}$$

Les deux sommes du milieu se compensent par changement d'indice vu que $(-1)^{n+i} \epsilon_{n-i+1} = -\epsilon_{n-i}$. Finalement ces termes donnent $\Pi(\sigma) - \sigma$.

On calcule par ailleurs

$$\begin{aligned} P(\partial\sigma) &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \epsilon_{n-i-1} \sigma \circ \pi[0, \dots, i, n', \dots, \hat{j}', \dots, i'] \\ &+ \sum_{j<i} (-1)^{i-1+j} \epsilon_{n-i} \sigma \circ \pi[0, \dots, \hat{j}, \dots, i, n', \dots, i'] \end{aligned}$$

Avec le signe $\epsilon_{n-i} = (-1)^{n-i} \epsilon_{n-i-1}$ on identifie bien $P(\partial\sigma)$ aux termes $i \neq j$ de $-\partial P(\sigma)$. On a donc prouvé $\partial P + P\partial = \Pi - \text{Id}$ et le lemme est démontré. \square

Le cas relatif se traite essentiellement de la même façon. Etant donné $A, B \subset X$, le cup-produit induit un morphisme $H^p(X, A, R) \times H^q(X, B, R) \rightarrow H^{p+q}(X, A+B, R)$ où on a posé $H^*(X, A+B, R)$ comme étant la cohomologie du complexe $\text{Hom}(C_*(X)/C_*(A) + C_*(B), R)$. Si $A = B$, cela munit l'algèbre $H^*(X, A, R)$ d'un produit (sans unité). Si A et B sont ouverts ou s'ils sont des sous-complexes de X , on obtient un produit

$$H^p(X, A, R) \times H^q(X, B, R) \rightarrow H^{p+q}(X, A \cup B, R).$$

3.2.2 Exemple du tore

Regardons le tore $T^n = (S^1)^n$ que l'on peut voir comme quotient de \mathbb{R}^n par \mathbb{Z}^n . On a une décomposition cellulaire de T^n en considérant pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$ le sous-espace $D_I = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n, x_i = 0 \text{ si } i \notin I\}$. Il s'agit bien d'une cellule de dimension $|I|$ dont le bord s'attache à des cellules de dimension inférieure. De plus, pour tout $J \subset I$ avec $I \setminus J = \{x_k\}$, le bord de D_I se recolle à D_J pour $x_k = 0, 1$ avec des signes opposés. La différentielle cellulaire est donc identiquement nulle et l'homologie du tore est librement engendrée par les D_I , sa cohomologie aussi.

Notons e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{Z}^n : l'algèbre extérieure $\Lambda^* \mathbb{Z}^n$ est engendrée par les $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ où $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$. En identifiant e_i à la base duale des D_i dans $H^1(T^n, \mathbb{Z})$ on a un isomorphisme $H^1(T^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$. Le cup-produit induit un morphisme d'anneaux

$$\Lambda^* \mathbb{Z}^n \rightarrow H^*(T^n, \mathbb{Z})$$

Proposition 3.1. *Le morphisme ci-dessus est un isomorphisme d'anneaux.*

Proof. Il s'agit essentiellement de montrer que $\langle e_I, D_J \rangle \pm \delta_{ij}$. La difficulté tient au fait que le cup-produit n'est défini qu'en cohomologie singulière: il faut donc représenter les cycles D_J à l'aide de chaînes singulières.

Une façon très simple de subdiviser un cube en simplexes est de répartir les points (x_1, \dots, x_k) en fonction de l'ordre des coordonnées. Techniquement, étant donné $\alpha \in S_k$, on définit $l_\alpha : \Delta_k \rightarrow [0, 1]^k$ comme l'unique application affine envoyant les sommets e_0, \dots, e_k sur les parties $\emptyset, \{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \dots, \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ où on a identifié les sommets de $[0, 1]^k$ avec les parties de $\{1, \dots, k\}$. On vérifie par le calcul que la somme $\sum_{\alpha \in S_k} \epsilon(\alpha) l_\alpha$ représente bien la chaîne $[0, 1]^k$.

En identifiant $[0, 1]^k$ avec D_J , on note l_α le même simplexe obtenu en prenant tous les éléments de J dans l'ordre donné par $\alpha : \{1, \dots, k\} \rightarrow J$. On a donc

$$\langle e_I, D_J \rangle = \sum_{\alpha: \{1, \dots, k\} \rightarrow J} \epsilon(\alpha) \langle e_{i_1} \smile \dots \smile e_{i_k}, l_\alpha \rangle.$$

On rappelle que e_j est le cocycle de référence sur S^1 composé par la j -ième projection. Pour que l'évaluation $\langle e_{i_1} \smile \dots \smile e_{i_k}, l_\alpha \rangle$ soit non nulle, il faut donc que le premier segment de l_α consiste à passer la coordonnée i_1 de 0 à 1, soit que $\alpha_1 = i_1$. En continuant de la sorte, on voit qu'un seul terme de la somme est non nul: celui pour lequel α est l'identité de I dans J . Cela montre le résultat. \square

3.3 Formule de Künneth

La formule de Künneth relie l'homologie de $X \times Y$ à l'homologie de X et celle de Y . Précisément elle affirme:

Théorème 3.5. *Soit X et Y deux espaces topologiques, il existe une suite exacte courte naturelle reliant les groupes d'homologie à coefficients entiers*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \rightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p(X), H_q(Y)) \rightarrow 0.$$

Il y a dans la preuve de cette formule une partie topologique et une partie algébrique qu'on démontre tout de suite.

3.3.1 Version algébrique

Etant donnés deux complexes (C_*, ∂) et (C'_*, ∂'_*) , on considère le complexe $C_* \otimes C'_*$ dont le n -ième terme est par définition $\bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C'_q$ et la différentielle est donnée par la formule $\partial(x \otimes y) = \partial x \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial y$.

Proposition 3.2. *Soit C_* et C'_* deux complexes de chaînes formés de groupes abéliens libres. Notons H_* et H'_* les homologies de ces deux complexes: il existe alors une suite exacte naturelle*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p \otimes H'_q \rightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}(H_p, H'_q) \rightarrow 0.$$

Proof. On peut décomposer $C'_k = Z'_k \oplus B'_{k-1}$ de façon non canonique. Comme la différentielle $\partial : C'_{k+1} \rightarrow C'_k$ envoie B'_k sur Z'_k , on définit un complexe K_*^k

concentré en degrés $k + 1$ ou il vaut B'_k et k ou il vaut Z'_k . Il est muni de la différentielle $\partial : K_{k+1}^k \rightarrow K_k^k$ s'inscrivant dans la suite exacte $0 \rightarrow B'_k \rightarrow Z'_k \rightarrow H'_k \rightarrow 0$. Ce complexe vérifie donc $H_n(K_*^k) = H'_k$ si $n = k$ et 0 sinon.

Comme on a en tant que complexes la décomposition $C'_* = \bigoplus K_*^k$, on peut donc se contenter de calculer l'homologie de $C_* \otimes K_*^k$. Ce complexe s'inscrit dans une suite exacte courte

$$0 \rightarrow C_{*-k} \otimes Z'_k \rightarrow C_* \otimes K_*^k \rightarrow C_{*-k-1} \otimes B'_k \rightarrow 0.$$

Ecrivons la suite exacte longue associée:

$$H_{n-k}(C_*, B'_k) \rightarrow H_{n-k}(C_*, Z'_k) \rightarrow H_n(C_* \otimes K_*^k) \rightarrow H_{n-k-1}(C_*, B'_k) \rightarrow H_{n-k-1}(C_*, Z'_k). \quad (3)$$

Comme B'_k et Z'_k sont libres, on a $H_n(C_*, B'_k) = H_n \otimes B'_k$, de même pour Z'_k . En tensorisant la suite exacte $0 \rightarrow B'_k \rightarrow Z'_k \rightarrow H'_k \rightarrow 0$ par H_n , on trouve la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Tor}(H_n, H'_k) \rightarrow H_n \otimes B'_k \xrightarrow{\phi_{n,k}} H_n \otimes Z'_k \rightarrow H_n \otimes H'_k \rightarrow 0$$

qui permet d'identifier le noyau et le conoyau de $\phi_{n,k}$. En injectant cela dans la suite (3) on trouve

$$0 \rightarrow H_{n-k} \otimes H'_k \rightarrow H_n(C_* \otimes K_*^k) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-k-1}, H'_k) \rightarrow 0.$$

En sommant sur toutes les valeurs de k , on trouve bien la formule de l'énoncé. \square

3.3.2 Version topologique

On a expliqué dans la Section 1.1 qu'étant donnés X, Y , il existait un produit $\times : C_m(X) \times C_n(Y) \rightarrow C_{n+m}(X \times Y)$ vérifiant $\partial(\sigma \times \tau) = \partial\sigma \times \tau + (-1)^m \sigma \times \partial\tau$. Cette opération définit donc un morphisme de complexes $\Phi : C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y)$. On va voir que, de manière duale, le cup-produit va nous permettre de construire un morphisme dans l'autre sens.

Précisément, le cup-produit sur le complexe des cochaînes n'est autre que le dual d'un coproduit sur le complexe des chaînes $\Delta : C_*(X, R) \rightarrow C_*(X, R) \otimes C_*(X, R)$. Celui-ci est donné explicitement par la formule suivante où $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$:

$$\Delta(\sigma) = \sum_{p+q=n} \sigma[0, \dots, p] \otimes \sigma[p, \dots, p+q].$$

Le Lemme 3.1 donne par dualité que Δ est un morphisme de chaînes. On définit $\Psi : C_*(X \times Y, R) \rightarrow C_*(X, R) \otimes C_*(Y, R)$ par $\Psi = (p_1)_* \otimes (p_2)_* \circ \Delta$.

Théorème 3.6. *Les morphisme Φ et Ψ sont inverses l'un de l'autre en homologie. En d'autres termes, les complexes $C_*(X, R) \otimes C_*(Y, R)$ et $C_*(X \times Y, R)$ sont quasi-isomorphes.*

Proof. Regardons d'abord la composée $\Phi \circ \Psi : C_*(X \times Y, R) \rightarrow C_*(X \times Y, R)$. On cherche un opérateur $K : C_*(X \times Y, R) \rightarrow C_{*+1}(X \times Y, R)$ tel que $\Phi \circ \Psi - \text{Id} = K\partial + \partial K$. Comme les morphismes Φ et Ψ sont fonctoriels, il suffit de considérer un seul simplexe $\sigma : \Delta_n \rightarrow X \times Y$ que l'on voit comme $\sigma = (\sigma_X \times \sigma_Y) \circ d_n$ où $d_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n \times \Delta_n$ est la diagonale vue comme élément de $C_n(\Delta_n \times \Delta_n)$.

Si on a $\Phi \circ \Psi(d_n) - d_n = K\partial d_n + \partial K(d_n)$, le résultat s'en suivra en composant par $\sigma_X \times \sigma_Y$. On construit alors $K(d_n) \in C_{n+1}(\Delta_n \times \Delta_n)$ par récurrence sur n en partant de $K(d_0) = 0$.

Etant construit $K(d_{n-1})$, on doit résoudre l'équation $\partial K(d_n) = \Phi \circ \Psi(d_n) - d_n - K(\partial d_n)$.

Comme $\Delta_n \times \Delta_n$ est contractile, il suffit de vérifier que le membre de droite est bien un cycle pour s'assurer de l'existence de $K(d_n)$. Or son bord est $\Phi \circ \Psi(\partial d_n) - \partial d_n - \partial K(\partial d_n)$. Par hypothèse de récurrence, cela vaut 0 et le résultat est démontré.

Regardons maintenant la composée $\Psi \circ \Phi : C_*(X, R) \otimes C_*(Y, R) \rightarrow C_*(X, R) \otimes C_*(Y, R)$.

Etant donné $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ et $\tau : \Delta_q \rightarrow Y$. On se ramène à nouveau par fonctorialité au cas de $i_p \times i_q$ où $i_p \in C_p(\Delta_p, R)$ et $i_q \in C_q(\Delta_q, R)$ désignent les identités respectives. On cherche à définir $K_{p,q} \in \bigoplus_{p'+q'=p+q+1} C_{p'}(X, R) \otimes C_{q'}(Y, R)$ tel que $\Psi(i_p \times i_q) - i_p \otimes i_q = \partial K_{p,q} + K\partial(i_p \otimes i_q)$. La même preuve se répète car le complexe $C_*(\Delta_p, R) \otimes C_*(\Delta_q, R)$ est acyclique, comme produit tensoriel de complexes acycliques. \square

3.3.3 Version cohomologique

La formule de Künneth a une version cohomologique: étant donné X, Y et un anneau R , on définit le produit $\times : H^p(X, R) \times H^q(Y, R) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y, R)$ par la formule $\phi \times \psi = p_1^* \phi \smile p_2^* \psi$. On constate que cette opération est obtenue en dualisant l'opération Ψ de la section précédente.

Théorème 3.7. *Soit X, Y deux espaces topologiques tels que $H^p(X, \mathbb{Z})$ est de type fini pour tout p . On a alors la suite exacte scindée*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(Y) \rightarrow H^n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}(H^p(X), H^q(Y)) \rightarrow 0.$$

L'exemple fondamental (et non trivial) d'algèbre de cohomologie est le suivant.

Théorème 3.8. *Posons $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} et choisissons R un anneau avec $2 = 0$ si $K = \mathbb{R}$. Alors $H^*(K\mathbb{P}^n, R) = R[u]/(u^{n+1})$ où u est de degré $d = \dim_{\mathbb{R}} K$.*

Proof. On démontre ici le cas $K = \mathbb{C}$ et $R = \mathbb{Q}$.

La structure additive a été établie à l'aide de la structure cellulaire. Notons que celle-ci provient des inclusions $\mathbb{C}\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \subset \dots \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Ainsi $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ a une cellule en chaque dimension $0, 2, \dots, 2n$. La différentielle cellulaire est nulle donc la cohomologie est engendrée linéairement par les cellules. Ce qui nous intéresse ici est d'étudier la structure multiplicative.

Notons $u \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ le générateur qui se restreint sur le générateur standard de $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$.

Prenons $V = \mathbb{C}^2$. L'application $V^n \rightarrow V^{\otimes n}$ définie par $(v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ induit un plongement $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{2^n-1}$. Cette application induit $f^* : H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{2^n-1}) \rightarrow H^*((\mathbb{C}\mathbb{P}^1)^n)$.

D'après la formule de Künneth cohomologique, cette dernière algèbre est isomorphe à $\mathbb{Q}[u_1, \dots, u_n]/(u_1^2, \dots, u_n^2)$.

Notons ω le point à l'infini de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et $\alpha_i : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow (\mathbb{C}\mathbb{P}^1)^n$ définie par $\alpha_i(x) = (\omega, \dots, x, \dots, \omega)$. On a bien sûr $\alpha_i^*(u_j) = \delta_{ij}u$.

Calculons la composée $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{2^n-1}) \xrightarrow{f^*} H^*((\mathbb{C}\mathbb{P}^1)^n) \xrightarrow{\alpha_i^*} H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$.

Comme $\beta_i = f_n \circ \alpha_i$ correspond à un plongement $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, on a $\beta_i^*(u) = u$. En notant $f^*u = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$, on en déduit que $a_1 = \dots = a_n = 1$.

Fixons $p \leq n$. On a

$$\begin{aligned} f^*(u^p) &= (u_1 + \dots + u_n)^p = \sum_{i_1 + \dots + i_n = p} \frac{p!}{i_1! \dots i_n!} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n} \\ &= \binom{n}{p} \sum_{j_1 < \dots < j_p} u_{j_1} \dots u_{j_p} \end{aligned}$$

car $u_i^2 = 0$. En particulier $f^*(u^p) \neq 0$, donc $u^p \neq 0$.

En considérant le plongement $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{2^n-1}$, on déduit du fait que $u^n \in H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{2^n-1})$ est non nul que c'est aussi le cas dans $H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$. Ainsi le morphisme

$$\mathbb{Q}[u]/(u^{n+1}) \rightarrow H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Q})$$

est injectif, et donc aussi surjectif vu que les deux espaces ont la même dimension. \square

4 Dualité de Poincaré

4.1 Orientation des variétés topologiques

4.1.1 Variétés topologiques à bord

On appelle variété topologique à bord de dimension n un espace topologique séparé X tel que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0\}$.

Une variété est sans bord si on peut remplacer \mathbb{R}_+^n par \mathbb{R}^n .

On définit ∂X comme l'ensemble des points x pour lesquels il existe un homéomorphisme $\phi_x : V_x \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ tel que $\phi_x(x) \in \partial\mathbb{R}_+^n$.

Lemme 4.1. *Le bord de X est bien défini au sens où si $\phi : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}_+^n alors $\phi(U \cap \partial\mathbb{R}_+^n) = V \cap \partial\mathbb{R}_+^n$.*

Proof. Si $x \notin U \cap \partial\mathbb{R}_+^n$, $H_n(U, U \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) = H_n(D^n, D^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ par excision.

Si $x \in U \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ on a $H_n(U, U \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) = H_n(D^n \cap \mathbb{R}_+^n, D^n \cap \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}, \mathbb{Z})$ à nouveau par excision. Ce groupe est nul car $D^n \cap \mathbb{R}_+^n$ se rétracte par déformation sur $D^n \cap \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.

Il est maintenant clair qu'un homéomorphisme préserve ces groupes d'homologie, un point du bord (respectivement à l'intérieur) doit donc être envoyé vers un point du bord (respectivement à l'intérieur). \square

Le bord de X est donc localement homéomorphe à un ouvert de $\partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}$. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Le bord d'une variété topologique à bord est une variété topologique sans bord.*

4.1.2 Orientation

Soit V un espace vectoriel réel de dimension $n > 0$. Une orientation de V est une classe d'équivalence de bases, deux bases étant équivalentes si la matrice de passage est de déterminant > 0 . On note $\Omega(V)$ l'ensemble des orientations de V . Conventionnellement, on pose $\Omega(\{0\}) = \{\pm 1\}$. Si $\omega \in \Omega(V)$, on note $-\omega$ l'orientation opposée. Enfin si V et W sont deux espaces orientés, on munit $V \oplus W$ de l'orientation obtenue en concaténant une base orientée de V avec une base orientée de W . Avec cette convention, on a $W \oplus V = (-1)^{\dim V \dim W} V \oplus W$.

Le lemme suivant permet d'en donner une définition bien plus compliquée, mais purement topologique. Rappelons qu'on a posé $I = [0, 1]$:

Lemme 4.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V . L'application $\phi_{\mathcal{B}} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (V, V \setminus \{0\})$ définie par $(t_1, \dots, t_n) \mapsto \sum t_i e_i$ envoie le générateur de $H_n(I^n, \partial I^n, \mathbb{Z})$ vers un élément $\omega_{\mathcal{B}} \in H_n(V, V \setminus \{0\}, \mathbb{Z})$. L'application $\mathcal{B} \mapsto \omega_{\mathcal{B}}$ identifie $\Omega(V)$ à $H_n(V, V \setminus 0, \mathbb{Z})^\times$.*

Proof. Il est clair que $\phi_{\mathcal{B}}$ définit un isomorphisme en homologie car $(V, V \setminus \{0\})$ se rétracte par déformation sur la paire $(I^n, \partial I^n)$. Il est aussi clair que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ agit continument sur les bases, puis sur les applications $\phi_{\mathcal{B}}$. Comme le groupe $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, $\omega_{\mathcal{B}}$ ne dépend que du signe du déterminant. Il reste à voir qu'une réflexion changeant e_1 en $-e_1$ par exemple agit par -1 sur $H_n(V, V \setminus \{0\})$. Ceci peut se montrer de multiples façons: une méthode est d'utiliser l'isomorphisme de Künneth $H_n(I^n, \partial I^n, \mathbb{Z}) = H_1(I, \partial I, \mathbb{Z})^{\otimes n}$. La réflexion change le signe du premier facteur, et donc agit globalement par -1 . \square

Si X une variété différentiable à bord, on appelle orientation de X la donnée d'une orientation sur $T_x X$ pour tout $x \in X \setminus \partial X$ telle qu'il existe un atlas (U_i, ϕ) tel que chaque différentielle $D_x \phi_i : T_x X \rightarrow \mathbb{R}^n$ préserve l'orientation. On observe que cette définition induit une orientation du bord: elle est choisie par la convention suivante: si X est un champ de vecteurs sur ∂X sortant, on demande à ce que la décomposition $\mathbb{R}X \oplus T\partial X = TX$ respecte l'orientation.

C'est raisonnable: si on considère l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ muni de l'orientation naturelle de \mathbb{R} , l'orientation de son bord sera $+1$ en 1 et -1 en 0 .

Une variété topologique n'a pas d'espace tangent, on va trouver une astuce pour parler quand même d'orientation locale en un point, puis une orientation globale. On fixe dans la suite un anneau commutatif unitaire R .

Etant donné un espace vectoriel orienté V , on rappelle que pour tout $x \in V$ on a l'isomorphisme $\Omega(V) = H_n(V, V \setminus \{x\}, \mathbb{Z})^\times$. L'image de l'orientation donne donc une famille d'éléments $\omega_x \in H_n(V, V \setminus \{x\}, \mathbb{Z})$ qu'on appelle classes fondamentales locales.

Définition 4.1. Une R -orientation sur une variété à bord X est la donnée pour tout $x \in X \setminus \partial X$ d'un élément $\omega_x \in H_n(X, X \setminus \{x\}, R)$ de sorte qu'il existe un système de cartes $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ envoyant pour tout i les classes fondamentales de $x \in U_i$ sur la classe fondamentale locale de \mathbb{R}^n en $\phi_i(x)$.

Remarquons que si $0 \neq 2$ dans R , une R -orientation équivaut à une \mathbb{Z} -orientation et si $0 = 2$, toute variété est R -orientée. On pourrait donc se contenter des anneaux \mathbb{Z} et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Comme dans le cas différentiable, on a la proposition suivante:

Proposition 4.2. Si on a une variété topologique X à bord R -orientée, alors le système de cartes induit par celui de X préserve les orientations du bord. Il y a donc une R -orientation naturellement induite sur le bord.

Proof. Vérifions précisément de quelle manière on induit une orientation sur le bord. On choisit un point du bord et une carte contenant ce point, de sorte qu'on se ramène à la situation suivante. Soit $D_+^n = \{(x_1, \dots, x_n), \sum x_i^2 \leq 1, x_1 \geq 0\}$, la donnée des orientations locales pour $x \in D_+^n$ revient au choix d'un générateur ω de $H_n(D_+^n, \partial D_+^n, R)$. Notons $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in D_+^n, x_1 > 0\}$ de sorte que $\partial D_+^n = D^{n-1} \cup A$. En écrivant un bout de la suite du triplet $(A, \partial D_+^n, D_+^n)$, on obtient

$$H_n(D_+^n, \partial D_+^n) \rightarrow H_{n-1}(D_+^n, A) \underset{\text{excision}}{=} H_{n-1}(D^{n-1}, \partial D^{n-1}).$$

Ce morphisme est donc un isomorphisme qui envoie ω sur une orientation du bord. On voudrait vérifier que cette façon de faire est compatible avec la version différentiable.

Pour cela, on passe du disque au cube I^n et on définit $A \subset I^n$ par l'équation $x_1 > 0$. Le cube I^{n-1} est l'intersection de I^n avec $x_1 = 0$. On est donc amené à étudier le signe de l'isomorphisme $H_n(I^n, \partial I^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-1}(\partial I^n, A, \mathbb{Z}) = H_{n-1}(I^{n-1}, \partial I^{n-1}, \mathbb{Z})$. Comme il correspond à la face $x_1 = 0$, ce morphisme envoie le générateur standard ω_n sur $-\omega_{n-1}$. La convention différentiable veut que $(-e_1, \mathcal{B})$ soit une base orientée. La base canonique e_2, \dots, e_n ne faisant pas l'affaire, les deux conventions sont les mêmes. □

4.2 Enoncés de dualité

4.2.1 Cap produit

Soit R un anneau commutatif unitaire et X un espace topologique. Il existe une opération bilinéaire $\frown : H^p(X, R) \times H_n(X, R) \rightarrow H_{n-p}(X, R)$ définie au niveau

des chaînes par

$$\phi \frown \sigma = \phi(\sigma[0, \dots, p])\sigma[p, \dots, n].$$

Formellement le cap produit est induit par un morphisme $\mu : C^*(X, R) \otimes C_*(X, R) \rightarrow C_*(X, R)$ défini par $\mu = \text{ev} \otimes \text{Id} \circ \text{Id} \otimes \Delta$: cela assure que l'opération \frown est bien définie en (co)-homologie.

Dans le cas relatif, supposons que X contient deux ouverts A et B .

Proposition 4.3. *L'opération μ ci-dessus induit un cap produit*

$$H^p(X, A, R) \times H_n(X, A \cup B, R) \rightarrow H_{n-p}(X, B, R)$$

vérifiant la propriété de naturalité suivante: si $f : X \rightarrow X'$ envoie A dans A' et B dans B' alors pour $\phi \in H^p(X', A', R)$ et $u \in H_n(X, A \cup B, R)$ on a:

$$f_*(f^*\phi \frown u) = \phi \frown f_*(u).$$

Proof. La propriété de naturalité est assez évidente. Voyons pourquoi la formule du cap-produit passe au cas relatif. Un élément $\phi \in H^p(X, A, R)$ est représenté par une application linéaire $\phi : C_p(X) \rightarrow R$ nulle sur $C_p(A)$. Par le lemme des petites chaînes, on peut représenter $u \in H_n(X, A \cup B)$ par un élément $u \in C_n(X)/C_n(A) + C_n(B)$. Si $u \in C_n(A)$, alors $\phi \cap u$ est nul car ϕ s'annule sur les chaînes à valeurs dans A et si $u \in C_n(B)$, $\phi \cap u$ est à valeurs dans $C_{n-p}(B)$ et donc le cap produit est bien défini comme

$$\mu : C^p(X, A) \otimes C_n(X)/C_n(A) + C_n(B) \rightarrow C_{n-p}(X)/C_{n-p}(B).$$

□

Si $n = p$, on peut comparer le cap-produit et l'évaluation avec le morphisme d'évaluation. On a le lemme suivant dont la vérification est immédiate:

Lemme 4.3. *Pour tout $\phi \in H^n(X, A, R)$ et $u \in H_n(X, A, R)$, on a $\text{ev}(\phi, u) = \epsilon(\phi \frown u)$.*

Pour finir, voyons la compatibilité entre cup-produit et cap-produit:

Lemme 4.4. *Si $\phi \in H^p(X, A, R)$, $\psi \in H^q(X, A, R)$, $u \in H_n(X, A, R)$, on a*

$$(\phi \smile \psi) \frown u = \psi \frown (\phi \frown u).$$

Proof. On a

$$\begin{aligned} (\phi \smile \psi) \frown \sigma &= (\phi \smile \psi)(\sigma[0, \dots, p+q])z[p+q, n] \\ &= \phi(\sigma[0, \dots, p])\psi(\sigma[p, \dots, p+q])\sigma[p+q, \dots, n]. \end{aligned}$$

□

4.2.2 Énoncés

On énonce maintenant le théorème de dualité de Poincaré en plusieurs étapes.

Théorème 4.1. *Soit X une variété topologique compacte R -orientée à bord. Il existe une unique classe $[X] \in H_n(X, \partial X, R)$ telle que pour tout $x \in X \setminus \partial X$, le morphisme $H_n(X, \partial X, R) \rightarrow H_n(X, X \setminus \{x\}, R)$ envoie $[X]$ sur ω_x , l'orientation de X en x . On appelle $[X]$ la classe fondamentale de X .*

Théorème 4.2. *Soit X une variété topologique compacte R -orientée à bord de dimension n et $[X] \in H_n(X, \partial X, R)$ sa classe fondamentale. Alors*

1. Si $\partial X = \emptyset$, l'application suivante est un isomorphisme pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$H^p(X, R) \xrightarrow{\cap [X]} H_{n-p}(X, R).$$

2. Dans le cas général, les deux applications suivantes sont des isomorphismes:

$$H^p(X, R) \xrightarrow{\cap [X]} H_{n-p}(X, \partial X, R) \text{ et } H^p(X, \partial X, R) \xrightarrow{\cap [X]} H_{n-p}(X, R).$$

3. Si $\partial X = A \cup B$ où A et B sont des sous-variétés vérifiant (*) alors on a l'isomorphisme suivant, plus symétrique:

$$H^p(X, A, R) \xrightarrow{\cap [X]} H_{n-p}(X, B, R).$$

Précisons l'hypothèse (*): ici $\partial A = \partial B = Y$, une sous-variété de ∂X de dimension $n - 2$. On suppose qu'il existe un voisinage ouvert U de Y dans ∂X homéomorphe à $Y \times]-1, 1[$ de sorte que $A' = A \cup U$ et $B' = B \cup U$ se rétractent par déformation sur A et B respectivement. En remplaçant A et B par A' et B' , le cap-produit est alors bien défini sans que les groupes concernés aient changé.

4.2.3 Conséquences

Elles sont nombreuses, contentons nous des plus simples à établir.

Tout d'abord, pour toute variété à bord X de dimension n R -orientée muni d'un découpage du bord $\partial X = A \cup B$, on a $H_k(X, A, R) = H^k(X, A, R) = 0$ si $k > n$. On a aussi $H^n(X, A, R) \simeq H_0(X, B)$. Si X est connexe, ce groupe vaut R si B est vide ($A = \partial X$) et 0 sinon. Le même énoncé vaut en homologie.

Corollaire 4.1. *Soit X une variété topologique compacte k -orientée où k est un corps. Alors $H_p(X, k)$ est de dimension finie et*

$$\dim H_p(X, k) = \dim H_{n-p}(X, k) \text{ pour } p = 0, \dots, n.$$

Le même énoncé est vraie pour la cohomologie.

Proof. Posons $E_p = H_p(X, k)$. Par la formule des coefficients universels, on a $H^p(X, k) = H_p(X, k)^* = E_p^*$ et par dualité de Poincaré $H^p(X, k) \simeq H_{n-p}(X, k) = E_{n-p}$. Ainsi, en notant $E = \bigoplus_p E_p$, on a $E \simeq E^*$. Si E est de dimension infinie, $\dim E < \dim E^*$ donc E est de dimension finie et le résultat est démontré. \square

En se fatigant beaucoup plus, on peut montrer sous les mêmes hypothèses que $H_p(X, \mathbb{Z})$ est de type fini pour tout p . Bien sûr, c'est immédiat si on sait que X a une structure de CW-complexe fini, ce qui est le cas si X est différentiable, mais il existe (en dimension 4) des variétés topologiques compactes pour lesquelles ce n'est pas le cas.

4.3 Preuve

Commençons par observer quelques compatibilités avec les classes fondamentales.

Lemme 4.5. *L'image de $[X]$ par l'application $H_n(X, \partial X, R) \rightarrow H_{n-1}(\partial X, R)$ donnée par la suite exacte de la paire $(X, \partial X)$ est $[\partial X]$.*

Proof. C'est un énoncé local, dont la démonstration se trouve dans la Proposition 4.2. \square

Le lemme suivant est assez évident:

Lemme 4.6. *Si X est une variété compacte sans bord de dimension n munie d'une classe fondamentale $[X] \in H_n(X, R)$ et que Y est une sous-variété de même dimension, alors l'application de restriction $H_n(X, R) \rightarrow H_n(Y, \partial Y, R)$ envoie $[X]$ sur $[Y]$.*

4.3.1 Réduction au cas où A est vide

Regardons la suite exacte de la paire (X, A) (coefficients R sous-entendus):

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{p-1}(X) & \longrightarrow & H^{p-1}(A) & \longrightarrow & H^p(X, A) & \longrightarrow & H^p(X) & \longrightarrow & H^p(A) \\ \downarrow \cap [X] & & \downarrow \cap [A] & & \downarrow \cap [X] & & \downarrow \cap [X] & & \downarrow \cap [\partial X] \\ H_{n-p}(X, \partial X) & \longrightarrow & H_{n-p}(\partial X, B) & \longrightarrow & H_{n-p}(X) & \longrightarrow & H_{n-p}(X, \partial X) & \longrightarrow & H_{n-p-1}(\partial X, B) \end{array}$$

On doit alors se convaincre que ce diagramme est commutatif (au signe près) et que la suite du bas est la suite exacte du triple $(X, \partial X, B)$. D'après le lemme des cinq, si on suppose que les flèches verticales sont des isomorphismes à part celle du milieu, alors celle du milieu l'est nécessairement. En remplaçant par excision $H_{n-p}(\partial X, B)$ par $H_{n-p}(A, \partial A)$, on constate que toutes les flèches verticales sont bien des morphismes de Poincaré. Le cas $A \neq \emptyset$ se déduit donc du cas $A = \emptyset$.

4.3.2 Réduction au cas sans bord

On va utiliser l'astuce suivante: contrairement au cas différentiable, le produit de deux variétés à bord est une variété à bord. De plus $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y \cup X \times \partial Y$: pensons au cas $X = Y = [0, 1]$ pour s'en convaincre. Pour ramener la dualité de Poincaré au cas sans bord, il faut plonger une variété à bord dans une variété sans bord. Une façon de faire est de prendre son double.

Soit X une variété à bord R -orientée de dimension n et $W : X \times [0, 1]$. La variété W est R -orientée et son bord s'écrit $\partial W = X_0 \cup X_1 \cup \partial X \times [0, 1]$ où $X_0 = X \times \{0\}$ et $X_1 = X \times \{1\}$.

Par hypothèse, ∂W étant R -orientée et sans bord, on a une classe fondamentale $[\partial W] \in H_n(\partial W, R)$ qu'on peut restreindre en une classe fondamentale $[X]$ dans $H_n(\partial W, X_1 \cup X \times [0, 1]) = H_n(X, \partial X)$.

On considère alors la suite de la paire $\partial W, X_0 \cup X_1$:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^p(\partial W, X_0 \cup X_1) & \longrightarrow & H^p(\partial W) & \longrightarrow & H^p(X_0 \cup X_1) & \longrightarrow & H^{p+1}(\partial W, X_0 \cup X_1) & \longrightarrow & H^{p+1}(\partial W) \\ \downarrow \cap [W] & & \downarrow \cap [\partial W] & & \downarrow \cap [X_0] \oplus [X_1] & & \downarrow \cap [W] & & \downarrow \cap [W] \\ H_{n-p}(\partial W \setminus X_0 \cup X_1) & \longrightarrow & H_{n-p}(\partial W) & \longrightarrow & H_{n-p}(X_0 \cup X_1) & \longrightarrow & H_{n-p-1}(\partial W \setminus X_0 \cup X_1) & \longrightarrow & H_{n-p-1}(\partial W) \end{array}$$

Le but est bien sûr d'appliquer le lemme des 5. L'hypothèse assure que les deuxièmes et cinquièmes colonnes sont des isomorphismes. Pour analyser les premières et quatrièmes, on les remplace par excision avec les morphismes $H^p(\partial X \times [0, 1], \partial X \times \{0, 1\}) \rightarrow H_{n-p}(\partial X \times [0, 1])$.

Le résultat se déduit du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} H^p(\partial X \times [0, 1], \partial X \times \{0, 1\}) & \longrightarrow & H_{n-p}(\partial X \times [0, 1]) \\ \downarrow K & & \downarrow \\ H^{p-1}(\partial X) & \xrightarrow{\cap [\partial X]} & H_{n-p}(\partial X) \end{array}$$

Par hypothèse, le cap-produit $\cap [\partial X]$ est un isomorphisme puisque ∂X est une variété sans bord. L'isomorphisme K se déduit de la formule de Künneth $H^p(\partial X \times [0, 1], \partial X \times \{0, 1\}) = H^{p-1}(\partial X) \otimes H^1([0, 1], \{0, 1\})$.

4.3.3 Le cas sans bord

Pour démontrer le théorème, on va produire un énoncé de dualité relatif à un compact K dans X puis faire grossir le compact jusqu'à X . Si K est une sous-variété de dimension n de X , l'énoncé cherché est simplement l'isomorphisme $H^p(K) \simeq H_{n-p}(K, \partial K)$. Pour faire fonctionner la preuve, on a besoin de prendre des compacts quelconques: on doit donc modifier les deux termes de l'égalité. On remplace le deuxième par $H_{n-p}(X, X \setminus K)$, noté $H_{n-p}(X|K)$.

Pour le premier, on considère

$$\widehat{H}^p(K, R) = \lim_{K \subset U} H^p(U, R).$$

La limite court sur les ouverts contenant K . Si on a U et V deux tels ouverts, on identifie $x \in H^p(U, R)$ et $y \in H^p(V, R)$ si leur restriction à $H^p(U \cap V, R)$ coïncident. C'est donc une limite directe.

On va démontrer la proposition suivante:

Proposition 4.4. *Soit X une variété compacte sans bord R -orientée et K un compact de X . Il existe $\omega_K \in H_n(X|K)$ qui induit la R -orientation ω_x pour tout $x \in K$ et telle qu'on ait l'isomorphisme*

$$\cap \omega_K : \widehat{H}^p(K) \rightarrow H_{n-p}(X|K).$$

Si $x \in H^p(U)$ représente un élément de $\widehat{H}^p(K)$ avec $K \subset U$, on peut représenter par excision ω_K par un élément de $H_n(U, U \setminus K)$. Le cap-produit $\omega_K \cap x \in H_{n-p}(U, U \setminus K)$ est alors bien défini.

Disons qu'un compact est bon s'il vérifie la Proposition 4.4. L'objectif est de prouver que X est bon. On va procéder par les étapes suivantes.

1. Tous les compacts convexes de \mathbb{R}^n , vus dans S^n , sont bons.
2. Si $K, K', K \cap K'$ sont bons, alors $K \cup K'$ aussi.
3. Les intersections décroissantes de bons compacts sont bons.
4. Tous les compacts de X sont bons.

1. Soit ω_n la classe fondamentale de S^n et $i : K \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ l'inclusion. La classe $\omega_K = i_*\omega_n \in H_n(S^n|K)$ représente bien la classe fondamentale ω_x pour tout $x \in K$. De plus, comme $S^n \setminus K$ se rétracte par déformation sur l'infini, on a $H_k(S^n|K) = H_k(S^n, \infty)$, ce qui vaut R si $k = n$, 0 sinon.

Calculons maintenant $\widehat{H}^p(K)$. La limite sur la famille des ouverts contenant K peut être remplacée par la limite sur les voisinages U_n de taille $1/n$ de K . En effet, tout ouvert contenant K contient un U_n pour n assez grand. Ces ouverts sont convexes donc $H^p(U_n, R) = R$ si $p = 0$ et 0 sinon. Prenant la limite sur n , on trouve la même chose pour $\widehat{H}^p(K)$. On vérifie que l'isomorphisme $\widehat{H}^0(K) \rightarrow H_n(S^n|K)$ est bien réalisé par cap-produit avec 1 puisque le générateur du dernier groupe est ω_K .

2. Supposons que $K, L, K \cap L \subset X$ sont bons. On écrit la suite de Mayer-Vietoris suivante:

$$\rightarrow H_n(X|K \cup L) \rightarrow H_n(X|K) \oplus H_n(X|L) \rightarrow H_n(X|K \cap L) \rightarrow$$

En notant ω_K et ω_L les deux classes fondamentales, on rappelle qu'elles coïncident nécessairement sur $K \cap L$. Donc $\omega_K - \omega_L$ s'envoie sur 0 dans la suite ci-dessus et il existe par exactitude un élément $\omega_{K \cup L}$ qui se restreint en ω_K sur K et ω_L sur L . Cet élément est donc une classe fondamentale.

Considérons alors U et V deux voisinages ouverts de K et L respectivement et écrivons la suite de Mayer-Vietoris:

$$\rightarrow H^p(U \cup V) \rightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \rightarrow H^p(U \cap V) \rightarrow$$

En passant à la limite sur les ouverts U et V on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \widehat{H}^p(K \cup L) & \longrightarrow & \widehat{H}^p(K) \oplus \widehat{H}^p(L) & \longrightarrow & \widehat{H}^p(K \cap L) & \longrightarrow \\ & \downarrow \cap \omega_{K \cup L} & & \downarrow \cap \omega_K \oplus \omega_L & & \downarrow \cap \omega_{K \cap L} & \\ \longrightarrow & H_{n-p}(X|K \cup L) & \longrightarrow & H_{n-p}(X|K) \oplus H_{n-p}(X|L) & \longrightarrow & H_{n-p}(X|K \cap L) & \longrightarrow \end{array}$$

Par hypothèse, le cap-produit avec ω_K, ω_L et $\omega_{K \cap L}$ est un isomorphisme. Le résultat s'en suit par le lemme des 5.

3. Supposons que $K = \bigcap_k K_k$ est une intersection décroissante de bons compacts de X . On note $\omega_k \in H_n(X|K_k)$ la classe fondamentale de K_k . Comme

ces classes sont compatibles entre elles, elles se projettent toutes sur une classe $\omega \in H_n(X|K)$ qui est la classe fondamentale de K .

A partir du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}^p(K_k) & \xrightarrow{\cap \omega_k} & H_{n-p}(X|K_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{H}^p(K_{k+1}) & \xrightarrow{\cap \omega_{k+1}} & H_{n-p}(X|K_{k+1}) \end{array}$$

On déduit bien par passage à la limite un isomorphisme

$$\lim_k \widehat{H}^p(K_k) \simeq \lim_k H_{n-p}(X|K_k).$$

Le troisième point est alors démontré une fois les deux lemmes suivants établis.

Lemme 4.7. *L'application naturelle $\alpha : \lim_k H_{n-p}(X|K_k) \rightarrow H_{n-p}(X|K)$ est un isomorphisme.*

Proof. Notons $U_k = X \setminus K_k$. C'est une suite croissante d'ouverts avec $\bigcup_k U_k = U = X \setminus K$. Montrons que α est injective. Tout $x \in \ker \alpha$ est représenté par un couple (U_k, x_k) avec $x_k \in C_{n-p}(X, U_k)$. Etant nul dans $H_{n-p}(X, U)$, il existe $y_k \in C_{n-p+1}(X)$ tel que $x_k - \partial y_k \in C_{n-p}(U)$. Comme $C_{n-p}(U) = \lim_k C_{n-p}(U_k)$, on aura $x_k - \partial y_k \in C_{n-p}(U_{k'})$ pour k' assez grand, donc x_k devient 0 dans $H_{n-p}(X, U_{k'})$ et $x = 0$.

Pour la surjectivité, prenons $x \in H_{n-p}(X, U)$. Il est représenté par un cycle $x \in C_{n-p}(X)$ avec $\partial x \in C_{n-p-1}(U)$. A nouveau, il existe k tel que $\partial x \in C_{n-p-1}(U_k)$, et donc $x \in H_{n-p}(X, U_k)$ et α est surjective. \square

Lemme 4.8. *L'application $\lim_k \widehat{H}^p(K_k) \rightarrow \widehat{H}^p(K)$ est un isomorphisme.*

Proof. La famille d'applications $\widehat{H}^p(K_k) \rightarrow \widehat{H}^p(K)$ induit bien une application telle que décrite par le lemme. De plus, tout ouvert U contenant K contient K_n pour n assez grand, ainsi on peut définir un morphisme dans l'autre sens, dont il est facile de montrer que c'est l'inverse. \square

4. Prenons un compact K quelconque de \mathbb{R}^n vu dans S^n . En le recouvrant par un nombre fini de boules de rayon $1/n$, on le voit comme $K = \bigcap K_n$ où K_n est bon car réunion finie de bons compacts. Ainsi K est bon.

On prend maintenant un compact $K \subset X$ quelconque. On peut trouver un nombre fini de cartes $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ recouvrant K , puis K_i compact de U_i tels que $K = \bigcup K_i$. Comme $\phi(K_i)$ est bon, la même chose est vraie pour K_i , et le théorème est démontré.

4.4 Le cas non orientable

Prenons ici $R = \mathbb{Z}$, pour lequel la R -orientation désigne l'orientation usuelle. On a prouvé que si X est une variété topologique compacte connexe orientable de dimension n alors $H_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Que peut-on dire si X n'est pas orientable?

On peut considérer l'ensemble

$$W = \{(x, u_x), x \in X, u_x \in H_n(X, X \setminus \{x\}, \mathbb{R}), |u_x| \leq 1\}.$$

Précisons le sens de cette définition, il y a un isomorphisme $H_n(X, X \setminus \{x\}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ bien défini au signe près: il envoie les deux orientations locales sur ± 1 . En particulier, la valeur absolue est bien définie. La première projection $p : W \rightarrow X$ permet de munir W d'une structure de fibré en intervalles sur X .

Lemme 4.9. *L'ensemble W est naturellement une variété topologique orientée de dimension $n + 1$ et la restriction de p à ∂W est un revêtement double. Ce revêtement est trivial si et seulement si X est orientée.*

Proof. La preuve de ce lemme est facile, expliquons juste pourquoi W est orientée: localement, X est homéomorphe à un ouvert U de \mathbb{R}^n et W au produit $U \times H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. En choisissant une orientation ω de \mathbb{R}^n , on obtient une orientation de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ et donc du produit. Si on change l'orientation de \mathbb{R}^n , la somme conserve la même orientation. Cela permet de définir une orientation globale sur W . \square

Proposition 4.5. *Soit X une variété topologique de dimension n compacte connexe sans bord et non orientable. On a $H_k(X, \mathbb{Z}) = 0$ pour tout $k \geq n$.*

Proof. Soit W la variété construite ci-dessus. On peut voir X comme sous-variété de W via la section nulle et W se rétracte par déformation sur X . On en déduit déjà l'annulation de l'homologie en degré $> n$: il nous faut seulement prouver que $H_n(W, \mathbb{Z}) = 0$. Considérons la suite exacte de la paire $(W, \partial W)$:

$$H_{n+1}(W, \partial W) \rightarrow H_n(\partial W) \rightarrow H_n(W) \rightarrow H_n(W, \partial W) \rightarrow H_{n-1}(\partial W)$$

Par dualité de Poincaré on sait que les générateurs de $H_{n+1}(W, \partial W)$ et $H_n(\partial W) = \mathbb{Z}$ sont $[W]$ et $[\partial W]$ et que $\partial[W] = [\partial W]$. On en déduit que $H_n(W)$ est le noyau du morphisme $H_n(W, \partial W) \rightarrow H_{n-1}(\partial W)$. Par dualité, ce morphisme est isomorphe au morphisme $H^1(W) \rightarrow H^1(\partial W)$: on doit donc prouver son injectivité.

Rappelons que ∂W est un revêtement double non trivial de X et donc son groupe fondamental s'insère dans une suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_1(\partial W) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Le théorème d'Hurewicz donne l'isomorphisme $H^1(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z})$. Il est alors clair que tout morphisme $\lambda : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ dont la restriction à $\pi_1(\partial W)$ est triviale est trivial. En effet pour tout $x \in \pi_1(X)$ on a $x^2 \in \pi_1(\partial W)$ et donc $\lambda(x^2) = 2\lambda(x) = 0$ d'où $\lambda = 0$. \square

Notons qu'on aurait aussi pu raisonner entièrement en cohomologie en utilisant le transfert $H^1(\partial W) \rightarrow H^1(X)$.

5 Théorie de l'intersection

5.1 Forme d'intersection et forme d'enlacement

Soit X une variété R -orientée de dimension n munie d'un découpage du bord $\partial X = A \cup B$. On choisit p, q tels que $p + q = n$. La forme d'intersection

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_p(X, A, R) \times H_q(X, B, R) \rightarrow R$$

est définie par $\langle x, y \rangle = \text{ev}(D^{-1}x, y)$ où on a noté $D = \cap[X] : H^q(X, B) \rightarrow H_p(X, A)$.

Proposition 5.1. *La forme d'intersection vérifie*

$$\langle x, y \rangle = (-1)^{(n-p)(n-q)} \langle y, x \rangle.$$

De plus, si $R = \mathbb{Z}$, elle induit une forme bilinéaire non-dégénérée

$$H_p(X, A, \mathbb{Z})/TH_p(X, A, \mathbb{Z}) \times H_q(X, B, \mathbb{Z})/TH_q(X, B, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Proof. Prenons $u = D^{-1}(x) \in H^{n-p}(X, B)$ et $v = D^{-1}(y) \in H^{n-q}(X, A)$. On a $\langle x, y \rangle = \text{ev}(u, Dv) = \text{ev}(u, v \cap [X]) = \epsilon(u \frown (v \frown [X])) = \epsilon((v \smile u) \frown [X]) = \text{ev}(v \smile u, [X])$. La symétrie devient alors claire.

Montrons le deuxième point: tout d'abord il est clair que la forme d'intersection s'annule sur la partie de torsion. De plus, la forme d'intersection peut-être vue comme un homomorphisme $x \mapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle)$ de $H_p(X, A) \rightarrow H_q(X, B)^*$. Par définition, ce morphisme est la composée

$$H_p(X, A) \xrightarrow{D^{-1}} H^q(X, B) \rightarrow \text{Hom}(H_q(X, B), \mathbb{Z}).$$

Le premier morphisme est un isomorphisme par le théorème de dualité, le deuxième est le morphisme de coefficients universels:

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{q-1}(X, B), \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X, B) \rightarrow \text{Hom}(H_q(X, B), \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Le groupe de gauche étant de torsion, la forme d'intersection induit bien un isomorphisme $H_p(X, A)/TH_p(X, A) \rightarrow \text{Hom}(H_q(X, B)/TH_q(X, B), \mathbb{Z})$, ce qui prouve le résultat. \square

Corollaire 5.1. *Soit k un corps et X une variété compacte k -orientée de dimension $2n$ bordant une variété W de dimension $2n + 1$. Alors le noyau L de l'inclusion $i_* : H_n(X, k) \rightarrow H_n(W, k)$ est égal à son orthogonal pour la forme d'intersection. En particulier, $\dim L = \frac{1}{2} \dim H_n(X, k)$.*

Proof. Il suffit d'observer le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} H_{n+1}(W, X, k) & \xrightarrow{\alpha} & H_n(X, k) & \xrightarrow{\beta} & H_n(W, k) \\ \downarrow D^{-1} & & \downarrow D^{-1} & & \downarrow D^{-1} \\ H^n(W, k) & \longrightarrow & H^n(X, k) & \longrightarrow & H^{n+1}(W, X, k) \\ \downarrow \text{ev} & & \downarrow \text{ev} & & \downarrow \text{ev} \\ H_n(W, k)^* & \xrightarrow{\beta^*} & H_n(X, k)^* & \xrightarrow{\alpha^*} & H_{n+1}(W, X, k)^* \end{array}$$

Si $x, y \in L$ on a $\langle x, y \rangle = \langle \alpha(u), y \rangle = \text{ev}(D^{-1}\alpha(u), \beta(y)) = 0$ car $\beta(y) = 0$. On a donc $L \subset L^\perp$. L'égalité des dimensions vient des formules $\dim L = \text{rk}(\alpha) = \text{rk} \beta$ et $\dim H_n(X, k) = \dim \ker \beta + \text{rk}(\beta) = \text{rk}(\alpha) + \text{rk}(\beta)$. \square

Définition 5.1. Soit X une variété compacte orientée de dimension $4n$. La forme d'intersection sur $H_{2n}(X, \mathbb{R})$ est non dégénérée: on définit la signature de X , notée $\sigma(X)$, comme étant la signature de la forme quadratique associée.

On rappelle que si on peut écrire $\langle x, x \rangle = \lambda_1(x)^2 + \dots + \lambda_p(x)^2 - \mu_1(x)^2 - \dots - \mu_q(x)^2$ où λ_i, μ_j sont des formes linéaires sur $H_{2n}(X, \mathbb{R})$ alors $\sigma(X) = p - q$.

Proposition 5.2. Si X est le bord d'une variété compacte orientée de dimension $4n + 1$, alors $\sigma(X) = 0$.

Proof. Par le corollaire précédent, le noyau L du morphisme induit par l'inclusion $H_{2n}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H_{2n}(W, \mathbb{R})$ est un sous-espace isotrope de dimension moitié. Cela implique que la signature est nulle. Par exemple $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est de signature 1, ce n'est donc pas le bord d'une variété de dimension 5. \square

Pour comprendre ce que dit la dualité sur la partie de torsion, on introduit la notion d'enlacement. Elle est définie pour $p + q = n - 1$ comme une application bilinéaire non-dégénérée

$$\lambda : TH_p(X, A, \mathbb{Z}) \times TH_q(X, B, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

de la façon suivante: représentons $x = [u], y = [v]$ avec $u \in C_p(X, A, \mathbb{Z})$, $v \in C_q(X, B, \mathbb{Z})$. Par hypothèse, il existe un entier a tels que $au = \partial u'$. Autrement dit, x s'annule dans $H_p(X, A, \mathbb{Q})$ et u'/a est un cycle dans $H_{p+1}(X, A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ qui relève x dans la suite suivante, associée aux coefficients $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$:

$$\dots \rightarrow H_{p+1}(X, A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H_p(X, A, \mathbb{Z}) \rightarrow H_p(X, A, \mathbb{Q}) \rightarrow \dots$$

On a alors $D^{-1}(u'/a) \in H^q(X, B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et on pose à nouveau

$$\lambda(x, y) = \text{ev}(D^{-1}(u'/a), y).$$

Comme pour la proposition précédente on a:

Proposition 5.3. La forme d'enlacement définie ci-dessus est non dégénérée et vérifie $\lambda(y, x) = (-1)^{pq+n}\lambda(x, y)$.

5.2 Classe de Thom

5.2.1 Isomorphisme de Thom

Soit X une variété compacte orientée (éventuellement à bord) et $p : E \rightarrow X$ un fibré en disques orienté sur X . Cela signifie qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X et des homéomorphismes $\phi_i : p^{-1}(U_i) \times D^k \rightarrow U_i \times D^k$ commutant aux projections sur U_i . De plus, on demande que les applications $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ restreintes aux fibres préservent l'orientation.

On admet qu'un tel fibré admet toujours une section (résultat peu surprenant mais technique). A un tel fibré correspond un fibré en $(k-1)$ -sphères SE obtenu en prenant la réunion du bord des fibres de E .

Théorème 5.1. *Si $p : E \rightarrow X$ désigne un fibré orienté en disques de dimension k sur une variété orientée de dimension n , il existe une unique classe $\tau_E \in H^k(E, SE, \mathbb{Z})$ induisant l'orientation sur chaque fibre. De plus, le cup-produit avec τ_E définit l'isomorphisme suivant*

$$H^i(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\tau_E \smile \mathcal{D}^*} H^{i+k}(E, SE, \mathbb{Z}).$$

Proof. Cet isomorphisme, appelé isomorphisme de Thom, vaut pour une base quelconque (paracompacte) mais on en propose une preuve basée sur la dualité de Poincaré, d'où l'hypothèse que X est une variété orientée. On constate que E est une variété compacte de dimension $n+k$ dont le bord se décompose en $\partial E = E|_{\partial X} \cup SE$. La dualité de Poincaré nous donne les isomorphismes

$$H^k(E, SE, \mathbb{Z}) \xrightarrow{D} H_n(E, E|_{\partial X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} H_n(X, \partial X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

On définit la classe de Thom comme l'image de la classe fondamentale $[X]$ par ces isomorphismes, i.e. $\tau_E = D^{-1}(p_*^{-1}[X])$.

Si $Y \subset X$ est une sous-variété de dimension n , on peut restreindre le fibré E à Y et comparer la classe de Thom de Y avec la restriction de la classe de Thom de X . Comme la restriction de la classe fondamentale de X est égale à celle de Y , on trouve que la classe de Thom de i^*E est égale à $i^*\tau_E$, où $i : Y \rightarrow X$ désigne l'inclusion.

Vérifions maintenant les assertions du théorème. On se donne une fibre E_x de E et un générateur $\omega_x \in H_k(E_x, SE_x, \mathbb{Z})$. Comme cette fibre est incluse dans i^*E où $i : D^n \rightarrow X$ désigne un disque centré en x , il suffit de faire le calcul sur le disque D^n . On a alors $E = D^n \times D^k$ et $\tau \in H^k(D^n \times D^k, D^n \times S^{k-1}, \mathbb{Z})$.

$$\begin{array}{ccc} H^k(D^n \times D^k, D^n \times S^{k-1}, \mathbb{Z}) & \xleftarrow{K} & H^0(D^n, \mathbb{Z}) \otimes H^k(D^k, S^{k-1}, \mathbb{Z}) \\ \downarrow D & & \downarrow D \otimes D \\ H_n(D^n \times D^k, S^{n-1} \times D^k) & \xleftarrow{K} & H_n(D^n, S^{n-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_0(D^k, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Le résultat provient de la compatibilité entre la dualité de Poincaré et la formule de Künneth qui fait que la classe de Thom correspond aux générateurs canoniques des groupes de la colonne de droite.

L'isomorphisme de l'énoncé provient de la commutativité du diagramme d'isomorphismes suivant où $s : X \rightarrow E$ désigne une section:

$$\begin{array}{ccccc} H^i(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{p^*} & H^i(E, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tau_E \smile} & H^{i+k}(E, SE, \mathbb{Z}) \\ \downarrow D & & & & \downarrow D \\ H_{n-i}(X, \partial X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{s_*} & H_{n-i}(E, E|_{\partial X}, \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

□

Faisons deux remarques importantes sur cette proposition: **1.** La construction de la classe de Thom nécessite une orientation sur X : elle n'en dépend pas. En effet, dans la formule $\tau_E = D^{-1}(p_*)^{-1}([X])$, la classe $[X]$ apparaît deux fois.

2. On a dans la preuve utilisé la compatibilité de la classe de Thom avec la restriction à une sous-variété de même dimension. En fait, la propriété qui caractérise la classe de Thom est que la restriction à une fibre soit le générateur. Cela implique que pour n'importe quelle application $f : Y \rightarrow X$, on a

$$\tau_{f^*E} = f^*\tau_E.$$

5.2.2 Dual de Poincaré d'une sous-variété

Soit X une variété compacte orientée de dimension n et Y une sous-variété orientée de X de dimension p . Cela signifie que pour tout $y \in Y$ il existe un voisinage U de y et un homéomorphisme $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ avec $\phi(Y \cap U) = \mathbb{R}^p \cap V$. On admet le lemme technique suivant (Morton Brown, 1962):

Lemme 5.1. *Il existe un fibré en boules $E \rightarrow V$ orienté de dimension $n - p$ et un voisinage tubulaire U_Y , i.e. un voisinage de Y muni d'un homéomorphisme préservant l'orientation $\phi_Y : E \rightarrow U_Y$ tel que $\phi^{-1}|_Y$ soit une section de E .*

Proposition 5.4. *Soit $\tau_E \in H^{n-p}(E, SE, \mathbb{Z})$ la classe de Thom du fibré E . L'image τ_E par les morphismes*

$$H^{n-p}(E, SE, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{exc}} H^{n-p}(X, X \setminus U_Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n-p}(X, \mathbb{Z})$$

envoie τ_E sur $D^{-1}(i_*[V])$ où $i : V \rightarrow X$ désigne l'inclusion.

Proof. Notons τ_Y l'image de τ_E dans $H^{n-p}(X, \mathbb{Z})$. On doit donc montrer l'égalité $\tau_Y \frown [X] = i_*[Y]$. Or ce calcul a lieu entièrement dans le voisinage U_Y : il suffit de le démontrer en remplaçant $[X]$ par $[U_Y]$. Via l'homéomorphisme ϕ_Y , on se ramène finalement à le montrer dans E , i.e. à prouver l'égalité $j^*\tau_E \frown [E] = i_*[Y]$ où cette fois, $i : Y \rightarrow E$ est la section canonique et $j : E \rightarrow (E, SE)$ la projection canonique. On retrouve la définition de la classe de Thom comme dual de Poincaré de la section canonique. □

5.2.3 Classes de Thom et intersection

Soit X une variété compacte R -orientée et Y, Z deux sous-variétés orientées transverses de dimension respectives p, q . On entend par là que $Y \cap Z$ est recouvert par des ouverts U munis d'homéomorphismes $\phi : U \rightarrow V$ tels que

- $\phi(U \cap Y) = \mathbb{R}^p \times \{0\}$
- $\phi(U \cap Z) = \{0\} \times \mathbb{R}^q$
- $\phi(U \cap Y \cap Z) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-p-q} \times \{0\}$.

Dans le cas différentiable, on observe qu'en tout point $x \in Y \cap Z$, les espaces tangents rentrent dans une suite exacte

$$0 \rightarrow T_x(Y \cap Z) \rightarrow T_x Y \oplus T_x Z \rightarrow T_x X \rightarrow 0.$$

On met sur $Y \cap Z$ l'orientation qui fait que pour toute section, on a un isomorphisme orienté $T_x(Y \cap Z) \oplus T_x X \simeq T_x Y \oplus T_x Z$. Dans le cas continu, on fait la même chose à travers les cartes.

Théorème 5.2. *Soit $Y, Z \subset X$ des sous-variétés orientées transverses. On a l'égalité*

$$\tau_Y \smile \tau_Z = \tau_{Y \cap Z}.$$

Le cas le plus important est celui où $p + q = n$. Dans ce cas, $Y \cap Z$ est un ensemble fini de points orientés $(x_1, \epsilon_1), \dots, (x_k, \epsilon_k)$ et cela donne la formule fondamentale

$$\text{ev}(\tau_Y \cup \tau_Z, [X]) = \langle [Y], [Z] \rangle = \sum_{i=1}^k \epsilon_i.$$

Proof. Comme d'après la Proposition 5.4 on a pour toute sous-variété $D(\tau_Y) = \tau_Y \frown [X] = [Y]$ où on identifie $[Y]$ à son image dans $H_p(X, \mathbb{Z})$, on calcule

$$D(\tau_Y \smile \tau_Z) = (\tau_Y \smile \tau_Z) \frown [X] = \tau_Z \frown [Y].$$

La compatibilité de la classe de Thom par restriction montre que, en notant $j : Y \rightarrow X$, la classe $j^* \tau_Y$ est le dual de Poincaré de $Y \cap Z$ dans Z . Le résultat s'en suit. \square

5.3 Poincaré-Hopf et Lefschetz

5.3.1 La classe fondamentale de la diagonale

Soit X une variété compacte connexe orientée de dimension n sans bord. On note $\Delta : X \rightarrow X \times X$ l'application diagonale définie par $\Delta(x) = (x, x)$.

Prenons comme système de coefficients \mathbb{Q} pour que la formule de Künneth fonctionne sans correction. On a alors un morphisme

$$\Delta_* : H_*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(X, \mathbb{Q}) \otimes H_*(X, \mathbb{Q}).$$

Lemme 5.2. *L'image de la classe fondamentale $\Delta_*([X])$ s'écrit $\sum_i \text{Id}_i$ où on a utilisé la notation*

$$\text{Id}_i \in \text{End}(H_i(X, \mathbb{Q})) = H_i(X, \mathbb{Q}) \otimes H^i(X, \mathbb{Q}) = H_i(X, \mathbb{Q}) \otimes H_{n-i}(X, \mathbb{Q}).$$

Cette classe vérifie $\langle [\Delta], [\Delta] \rangle = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H_i(X, \mathbb{Q}) = \chi(X)$.

Proof. Rappelons que la composition

$$H^p(X, \mathbb{Q}) \times H^q(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{p+q}(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X, \mathbb{Q})$$

n'est rien d'autre que le cup-produit usuel. Si $p + q = n$, l'évaluation sur la classe fondamentale définit une dualité parfaite $H^p(X, \mathbb{Q}) \times H^q(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$. En notant temporairement $V = H^p(X, \mathbb{Q})$, cette dualité identifie $H^q(X, \mathbb{Q})$ à V^* . Or l'adjoint de l'application d'évaluation $\text{ev} : V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{Q}$ est l'application $\mathbb{Q} \rightarrow V^* \otimes V$ qui à 1 associe l'identité de V . Ainsi le morphisme Δ_* , qui est l'adjoint de Δ^* envoie la classe fondamentale sur la somme des identités et le premier point est démontré.

Par le même principe, le dual de Poincaré de $[\Delta]$ est donné par $\sum_i \text{Id}_i$ où cette fois Id_i désigne l'identité de $H^i(X, \mathbb{Q})$.

Prenons $A \in \text{End}(H^p) \subset H^n(X \times X, \mathbb{Q})$ et $B \in \text{End}(H^q) \subset H^n(X \times X, \mathbb{Q})$ et déterminons $\text{ev}(A \smile B, [X \times X])$.

Pour cela, on peut supposer $A = \phi \otimes u$ et $B = \psi \otimes v$ avec $\phi \in H^p, u \in H_p, \psi \in H^q, v \in H_q$. Si $p + q \neq n$ on trouve 0, sinon on trouve $A \cup B = (-1)^q \phi \smile \psi \otimes D^{-1}(u) \smile D^{-1}(v)$. En évaluant sur la classe fondamentale on trouve $(-1)^q \text{ev}(\phi \smile \psi, [X]) \langle u, v \rangle$.

Or $A \in \text{End}(V)$ et $B \in \text{End}(V^*)$: on reconnaît dans l'expression ci-dessus la quantité $(-1)^q \text{Tr}(AB^*)$. Cela donne en particulier l'expression attendue pour l'auto-intersection de la diagonale. \square

5.3.2 Classe d'Euler

Soit $\mathcal{E} \rightarrow X$ un fibré vectoriel orienté de rank k sur une variété orientée. On peut lui associer un fibré en boules E en compactifiant les fibres à l'aide d'un fibré en sphères. La classe de Thom $\tau_E \in H^k(E, SE, \mathbb{Z}) = H^k(\mathcal{E}, \mathcal{E} \setminus X, \mathbb{Z})$ se restreint à X par la section nulle pour définir une classe $e_E \in H^k(X, \mathbb{Z})$ appelée classe d'Euler de E . Celle-ci a l'interprétation géométrique suivante.

Proposition 5.5. *Soit $s : X \rightarrow E$ une sections de E telle que $s(X)$ intersecte transversalement la section nulle. Alors e_E est Poincaré dual de la sous-variété définie par l'équation $s = 0$.*

Le cas où X est de dimension k est particulièrement intéressant: il dit que $\text{ev}(e_E, [X])$ est égal au nombre algébrique de zéros de la section s . Regardons un cas encore plus particulier.

Théorème 5.3 (Poincaré-Hopf). *Soit X une variété différentiable compacte orientée sans bord de dimension n et X un champ de vecteur transverse à la section nulle. Alors le nombre algébrique de zéros du champ de vecteurs est égal à $\text{ev}(e_{TX}, [X]) = \chi(X)$.*

L'exemple le plus célèbre est celui des sphères S^n : comme elles ont une décomposition cellulaire avec seulement deux cellules en dimension 0 et n on a $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$, qui est non nul si n est pair. Dans ce cas tout champ de vecteurs doit s'annuler, en deux points précisément s'il s'annule transversalement. C'est le théorème de la boule chevelue.

Un autre cas très fréquent est celui où $\mathcal{E} \rightarrow X$ est un fibré en droites complexes. On peut alors le voir comme un fibré réel de rang 2 orienté. Sa classe

d'Euler est alors un élément de $H^2(X, \mathbb{Z})$ noté $c_1((E))$ et appelé première classe de Chern.

Exemple: Soit E un espace vectoriel complexe de dimension 2. On note $\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ le fibré tautologique défini par $\mathcal{O}(-1) = \{(D, v), D \in \mathbb{P}(E), v \in D\}$ et $p : \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ défini par $p(D, v) = D$. On note aussi $\mathcal{O}(1)$ le fibré dual et $\mathcal{O}(n)$ le fibré obtenu par produit tensoriel. Il est classique de montrer que $H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(n)) = S^n E^* = \mathbb{C}_n[X, Y]$ si $n \geq 0$, et 0 sinon. En particulier le fibré $\mathcal{O}(n)$ admet des sections holomorphes s'annulant (positivement) en n points distincts. On a donc la belle formule:

$$\int_{\mathbb{P}(E)} c_1(\mathcal{O}(n)) = n.$$

5.3.3 Formule de Lefschetz

Théorème 5.4. *Soit X une variété de dimension n compacte connexe orientée et $f : X \rightarrow X$ une application continue telle que le graphe $\Gamma(f) = \{(x, f(x)), x \in X\}$ intersecte transversalement la diagonale Δ . Cette intersection consiste en points fixes x de f , qui se retrouvent munis d'un signe $\epsilon(x)$.*

On a

$$\sum_{f(x)=x} \epsilon(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}(f_*^i)$$

où $f_*^i : H_i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_i(X, \mathbb{Q})$ désigne l'action de f sur le groupe $H_i(X, \mathbb{Q})$.

Proof. Ce n'est qu'une variation sur le thème de la diagonale: le graphe $\Gamma(f)$ est l'image de $[\Delta]$ par l'application $f \times \text{Id}$, ainsi $[\Gamma(f)] = \sum f_i \in \bigoplus \text{End}(H_i(X, \mathbb{Q}))$ et le résultat s'en suit comme précédemment. \square

Exemple: Prenons $f : T^n \rightarrow T^n$ et supposons que $\Gamma(f)$ est transverse à la diagonale. Alors le nombre de points fixes de f comptés avec signe vaut $\det(\text{Id} - f_*^1)$. En effet, comme f^* est un endomorphisme de l'algèbre de cohomologie $H^*(T^n, \mathbb{Q}) = \Lambda^*(\mathbb{Q}^n)$, il est déterminé par son action sur le premier degré. En notant $A = f_*^1 \in M_n(\mathbb{Z})$ la matrice de cette application, on est amené à calculer $\Lambda(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{tr}(\Lambda^i A)$. Pour cela on peut prendre les coefficients complexes pour trigonaliser A : on aura alors

$$\Lambda(f) = \sum_i (-1)^i \sum_{j_1 < \dots < j_i} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_i} = \prod_i (1 - \lambda_i) = \det(\text{Id} - A).$$

On observe que si f est obtenue en passant au quotient un isomorphisme linéaire $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors on a exactement autant de points fixes que prévu par la formule de Lefschetz.