Topologie algébrique des variétés II

<u>Ref classiques</u> : Algebraic topology - Hatcher

3 parties ① Groupes d'homotopie supérieurs
théorèmes d'Hurewicz, fibrations

② Théorie de l'obstruction

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ X \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

\- problème de top. alg.

\- $p : E \to B$ fibration existe-t-il une section. Solution : construire des classes de cohomologie qui sont nulles ssi le pb. a une solution.

Homologie à coefficients tordus.

③ Suites spectrales
Etudier l'homologie d'un complexe à l'aide d'une filtration.
<u>Exemple</u> : homologie d'une fibration.
suite spectrale de Leray - Serre.

<u>Fil conducteur</u> : groupes d'homotopie des sphères.

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sphère de dim n

$\pi_k(S^n) = \{ f : S^k \to S^n \}$ à homotopie près

$k \geq 1$ c'est un groupe abélien.

	π_1	π_2	π_3	π_4		
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0		
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/12$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$

$f : S^2 \xrightarrow[C^\infty]{} S^2$ deg $x \in S^2$ valeur rég.

$f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$

$$\deg f = \sum_i \text{signe} \det d_{y_i} f \in \mathbb{Z}$$

$$\pi_2 S^2 \xrightarrow[\deg]{\sim} \mathbb{Z}$$

$\pi_3 S^2 = \mathbb{Z}$ $H : S^3 \to S^2$ fibration

groupe d'homotopie stable $\pi_{n+k}(S^n)$ stabilise quand k augmente.

Ces groupes ne sont toujours pas connus en général

Pour $n > 100$ ils ne sont pas connus.

<u>But</u> : développer les outils qui permettent de savoir le plus de choses possibles sur ces groupes.

$\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}/2$

I Groupes d'homotopie supérieurs et relatifs

1. suite exacte longue d'homotopie relative.

Soit X un espace top. $A \subset X$ $x_0 \in A$.

On se donne $n \geq 0$ et $s_0 \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ $s_0 = (1, 0, \dots, 0)$

<u>def</u> : $\pi_n(X, A, x_0) = \{ f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, \{x_0\}) \} / \sim$

$f : D^n \to X$ continue et $f(S^{n-1}) \subset A$ et $f(s_0) = x_0$

La relation d'homotopie est $f \sim g$ s'il existe

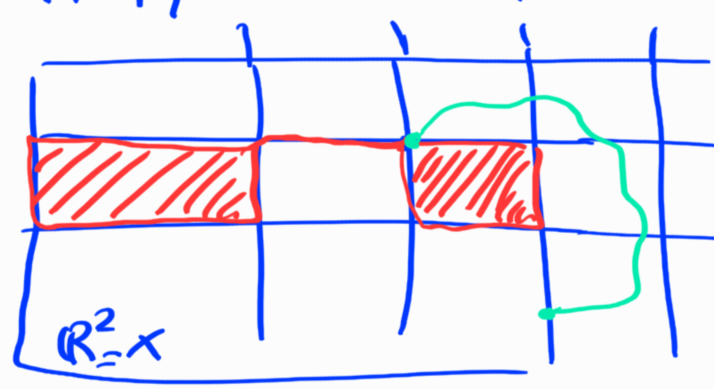
$H : D^n \times [0,1]$ $H(x, 0) = f(x)$ $H(x,1) = g(x)$

et $\forall t \in [0,1]$ $H(S^{n-1} \times \{t\}) \subset A$ $H(s_0, t) = x_0$.

<u>ex</u> :

$\pi_2(X, A, x_0) =$

$\{ f : D^2 \to \mathbb{R}^2$
$\partial D^2 \subset A$



$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ $x_0 = (0,0)$

<u>exemple particulier</u> : $n = 1$ $\pi_1(X, A) = \{ f : [0,1] \to X$, $f(0) = x_0$, $f(1) \in A \}$

Ceci n'est pas un groupe.

n quelconque et $A = \{x_0\}$

$\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) \underset{\text{def}}{=} \pi_n(X, x_0) = \left\{ f : D^n \to X \atop f(\partial D^n) = \{x_0\} \right\}$

groupe d'homotopie supérieur "absolu" / cas relatif.

Fait. $\pi_n(X, A, x_0)$ est un groupe si $n \geq 2$ | abélien $n \geq 3$
ou si $A = \{x_0\}$ et $n \geq 1$ | abélien $n \geq 2$

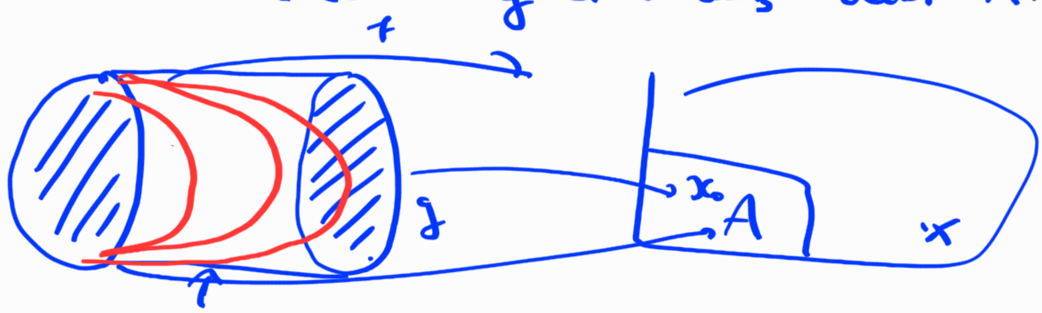
Lemme Critère de compression

Une application $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ est homotope à une constante dans $\pi_n(X, A, x_0)$ ssi f est homotope relativement au bord à une application à valeurs dans A

Rappel : une homotopie relative au bord est une famille $H(\cdot, t)$ tq $\forall t$ $H(x,t) = f(x)$ si $x \in \partial D^n = S^{n-1}$

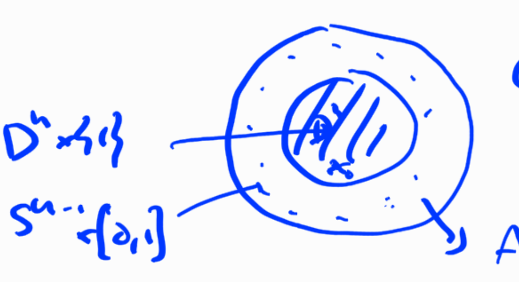
démo : supposons que f est homotope à g relativement au bord avec g à valeurs dans A.

$n = 2$



$f = g = H(\cdot, t)$ sur ∂D^n

$\Rightarrow$ On décompose le cylindre $D^n \times [0,1]$ en une réunion de disque D^n dont le premier est $D^n \times \{0\}$ et le dernier est $D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times [0,1] \simeq D^n$



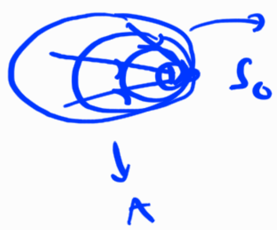
On a supposé que $f \sim$ Cte.

$\Rightarrow g =$ cte $= x_0$

chaque disque rouge a le même bord

En balayant le cylindre, on peut continuer de f à une application qui est à valeur dans A. Cela prouve $\Rightarrow$.

Si on note $g : D^n \to A$ l'application à laquelle f est homotope relativement au bord $\Rightarrow [f] = [g] \in \pi_n(X, A, x_0)$



on peut rétracter par déf. D^n sur s_0

cela fait une homotopie entre g et l'application constante x_0. □

$$H(x,t) = g((1-t)x + t s_0).$$

<u>Loi de groupe</u> : on peut trouver une application

$c : D^n \longrightarrow D^n \vee_{s_0} D^n$ bouquet de deux disques

qui écrase un disque méridien sur s_0

Si on se donne $f, g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$

on peut construire $f \vee g : D^n \vee_{s_0} D^n \longrightarrow D^n$

$$x \longmapsto f(x) \qquad * \longmapsto g(x)$$

<u>Def</u> : on déf. $f \cdot g = f \vee g \circ c : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$

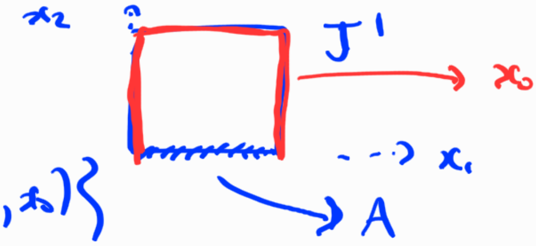
<u>Lemme</u> : le produit définit une structure de groupe sur $\pi_n(X, A, x_0)$ abélien si $n \geq 3$ ou si $n \geq 2$ et $A = \{x_0\}$.

<u>Exercice</u> : ① on peut faire une variante

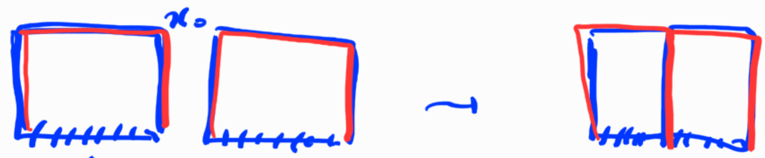
$I = [0,1]$ $\quad J^{n-1}$ = complémentaire dans $\partial(I^n)$ de la face d'équation $x_n = 0$

Montrer que $\pi_n(X, A, x_0)$

$$= \{ f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0) \}$$



<u>But:</u> la loi de groupe est la loi habituelle ds le π_1 où on fait jouer la 1ère coordonnée.



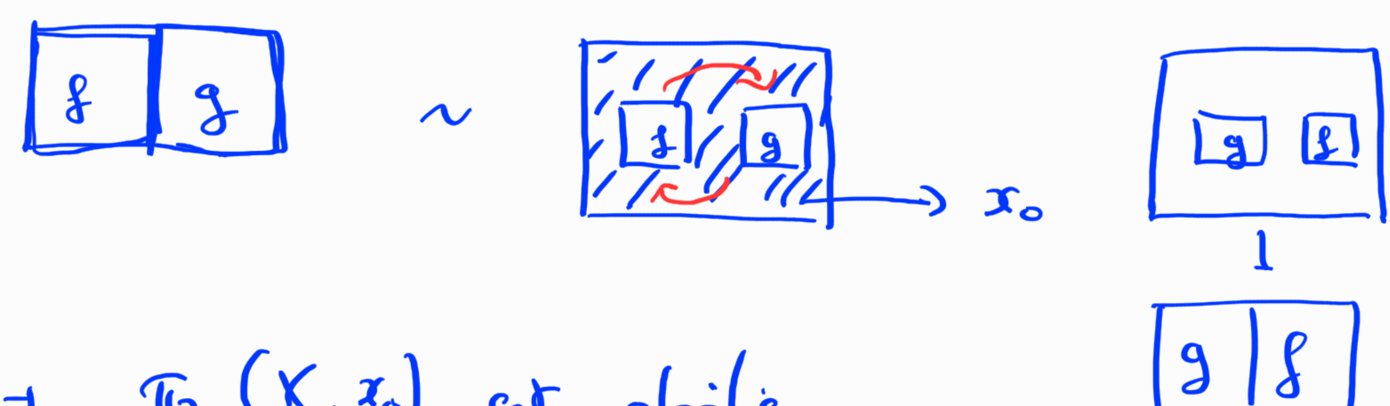
α β $\alpha \circ \beta$ ds $\pi_1(A)$

② Montrer que $\pi_n(D^n, S^{n-1}, s_0)$ est non trivial.

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(D^2, S^1, s_0) & \simeq & \mathbb{Z} \\ f \downarrow & & \wr\!\wr \\ f|_{\partial D^2} & & \pi_1(S^1) \end{array}$$

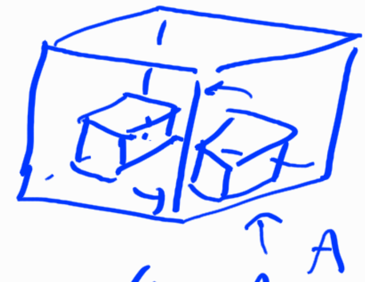
générateur est l'identité

idée pourquoi $\pi_2(X, x_0)$ est un groupe abélien.



$\Rightarrow \pi_2(X, x_0)$ est abélien.

Si on a un triplet (X, A, x_0)



on a une inclusion $(X, \{x_0\}, x_0) \to (X, A, x_0)$

$$f \mapsto f$$

qui induit un morphisme de groupes

$$\pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0)$$

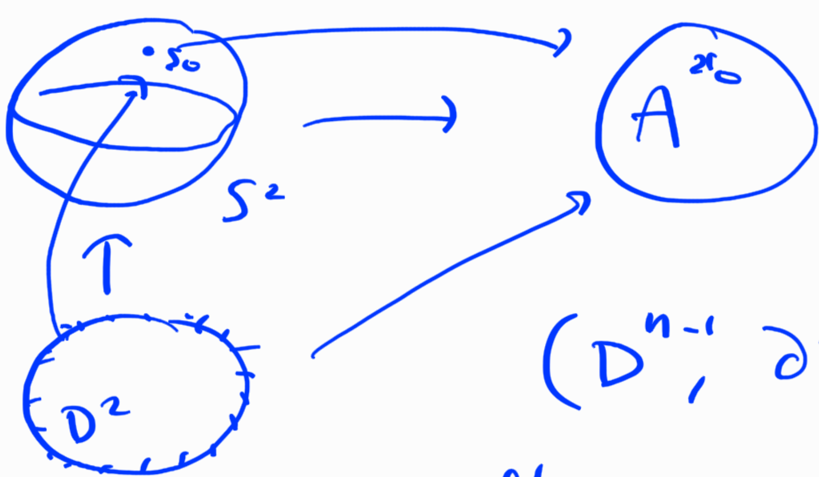
De même, si $f : (D^n, \partial D^n) \to (A, x_0)$

elle induit une application $f : (D^n, \partial D^n) \to (X, x_0)$

cela déf. un morphisme $\pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$

Finalement si $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$

on peut considérer $f|_{S^{n-1}} : (S^{n-1}, s_0) \to (A, x_0)$.



$$(D^{n-1}, \partial D^{n-1}) \to (A, x_0)$$

$$f|_{S^{n-1}} \in \pi_{n-1}(A, x_0).$$

<u>Proposition</u>: Si (X, A) est une paire d'espaces avec $x_0 \in A$. Alors on a une suite exacte longue

$$\pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0)$$
$$\downarrow$$
etc...

<u>Commentaire</u> : si on une suite d'application entre ensembles pointés. On dit qu'elle exacte si l'image réciproque de l'élément privilégié est l'image de l'ensemble précédent.

$$\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_0(A, x_0) \to \pi_0(X, x_0)$$

On fait la preuve mais elle est essentiellement formelle.

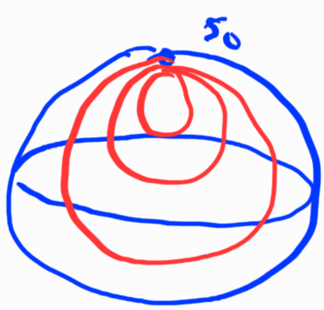
1) Montrons l'exactitude en $\pi_{n-1}(A, x_0)$:

$$\pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, x_0) \to \pi_{n-1}(X, x_0)$$

$$f : (D^n, S^{n-1}; s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$$

$f|_{S^{n-1}} : (S^{n-1}; s_0)$ à valeurs dans A que l'on considère comme à valeurs dans X.

Est-elle homotope à une constante ?



$n=3$ $\longrightarrow$ X

$$H(x, t) = f((1-t)x + t s_0).$$

crée une homotopie entre f et x_0.
parmi les applications à valeurs ds X.

Réciproquement, si $f : S^{n-1} \longrightarrow A$
$s_0 \longrightarrow x_0$

qui devient triviale dans X. Alors
$\exists\ H,\ S^{n-1} \times [0,1] \longrightarrow X$
tq $H(x,0) = f(x)$ $\quad H(s_0,t) = x_0$
$H(x,1) = x_0$

Cette homotopie H définit une application
$F : D^n \longrightarrow X$ tq $F(x) = f(x)$
$\forall x \in S^{n-1}$

l'homotopie H prolonge f à l'intérieur du disque.

Exactitude en $\pi_n(X, A, x_0)$

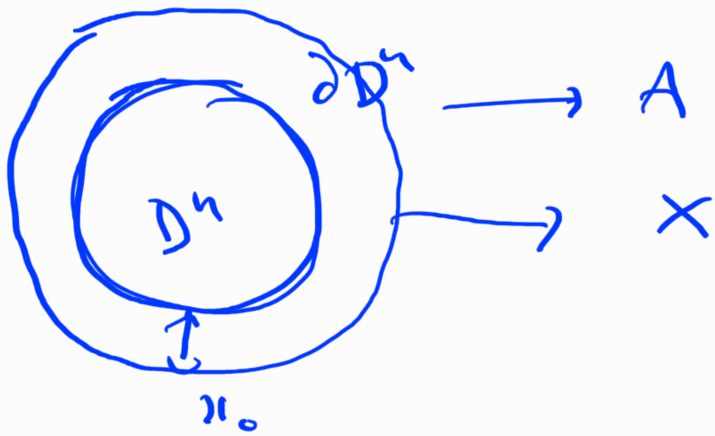
$$\pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$$

$f : D^n \longrightarrow X$ $\qquad f \longmapsto f|_{\partial D^n = S^{n-1}}$
$S^{n-1} \longrightarrow x_0$

est l'application const.

Réciproquement, $f : (D^n, S^{n-1}, x_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$

et on suppose que $f|_{\partial D^n = S^{n-1}} \sim x_0$



$D^n \cup S^{n-1} \times [0,1) \simeq D^n$

et $f + H$ définissent une application $D^n \to X$

cette application définit un élément de $\pi_n(X, x_0)$ qui se projette sur f.

<u>Exactitude en $\pi_n(X, x_0)$</u>

$$\pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, x)$$

$f : D^n \longrightarrow A \subset X$
$\partial D^n \longrightarrow x_0$

$f : (D^n, S^{n-1}, x_0) \to (X, A, x_0)$

cette application est entièrement à valeurs dans A.

$\Rightarrow$ $[f]$ dans $\pi_n(X, A, x_0)$ est triviale

Réciproquement, $f:(D^n,S^{n-1})\to(X,x_0)$ trivial dans $\pi_n(X,A,x_0)$. D'après le lemme de compression, f est homotope relativement au bord à une application $g:(D^n,S^{n-1})\to(A,x_0)$ cqfd.

<u>Exercice</u> : Calculer $\pi_n(M,\partial M,x_0)$ dans le cas où $M =$  $= S^1\times[0,1]$

et $x_0\in\partial M$

et dans le cas où $M =$ 

Cas du ruban de Möbius.

M se rétracte sur S^1

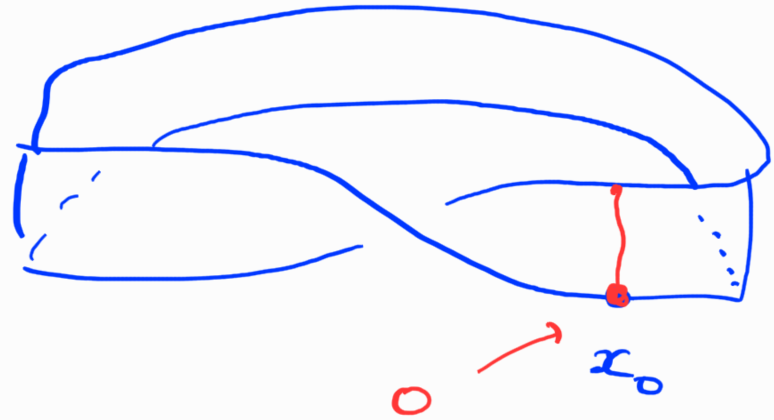
∂M aussi

$$\cancel{\pi_3(\partial M)}\to\cancel{\pi_3(M)}\to\overset{0}{\overset{/\!/}{\pi_3(M,\partial M)}}\to\cancel{\pi_2(\partial M)}\to\overset{0}{\overset{\|}{\cancel{\pi_2(M)}}}$$

$$\to\underset{\overset{\wr\!\wr}{0}}{\pi_2(M,\partial M)}\to\underset{\overset{\wr\!\wr}{\mathbb{Z}}}{\pi_1(\partial M)}\to\underset{\overset{\wr\!\wr}{\mathbb{Z}}}{\pi_1(M)}\to\underset{\overset{\|}{\mathbb{Z}/2}}{\pi_1(M,\partial M)}$$

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{\times 2}\mathbb{Z}$$

$\pi_1(\Pi, \partial\Pi)$:



Def : On dit que X est 0-connexe s'il est connexe par arcs. Il est dit n-connexe $(n \geq 1)$ s'il est 0-connexe et si $\pi_k(X, x_0) = 0$ $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ pour un certain $x_0 \in X$
(si c'est vrai pour un c'est vrai pour tous).

ex : S^3 est 2-connexe.

Def : Une paire (X, A) est 0-connexe si tout composante connexe de X contient un point de A $[H_0(X, A, \mathbb{Z}) = 0]$
Elle est dite n-connexe si elle est 0-connexe et $\pi_k(X, A, x_0) = 0$ $\forall 1 \leq k \leq n$ $\forall x_0 \in A$.

<u>Exercice</u> : trouver l'ordre de connexité des paires

$(D^2, \partial D^2)$ 1-connexe

$(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$

$(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$

$(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$

En fait : une paire (X, A) est n-connexe si on peut construire X en ajoutant à A des cellules de dim $\geq n$.

<u>ex</u> :

1 - connexe

1 - connexe.

Jeudi - Théorème d'Hurewicz

comparaison $\pi_n(X, A) \underset{?}{\simeq} H_n(X, A, \mathbb{Z})$.