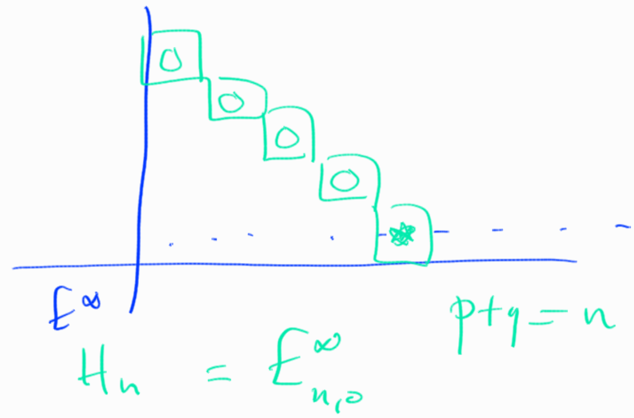
$$E^\infty_{p,q} = G_p H_{p+q}(C_*)$$



<u>Exercice</u> : Formule de Künneth algébrique

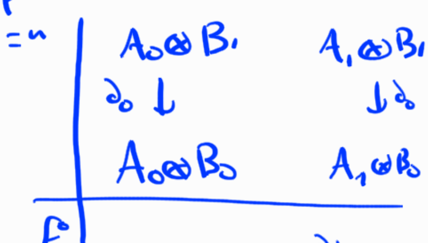
On prend deux complexes de espaces vectoriels A_* et B_* (en degré ≥ 0) et on pose $C_n = \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes B_q$

il est muni d'une différentielle $\partial(x \otimes y) = \partial x \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes \partial y$

Calculons l'homologie de C_n en fonction de celle de A et B

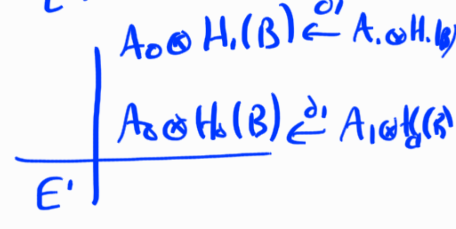
On considère le bicomplexe $C_{p,q} = A_p \otimes B_q$ $\quad \partial' = \partial \otimes 1$, $\quad \partial'' = (-1)^{\deg x} 1 \otimes \partial$

On va regarder la filtration $'F_p C_n = \bigoplus_{\substack{k \leq p \\ k+l=n}} A_k \otimes B_l$

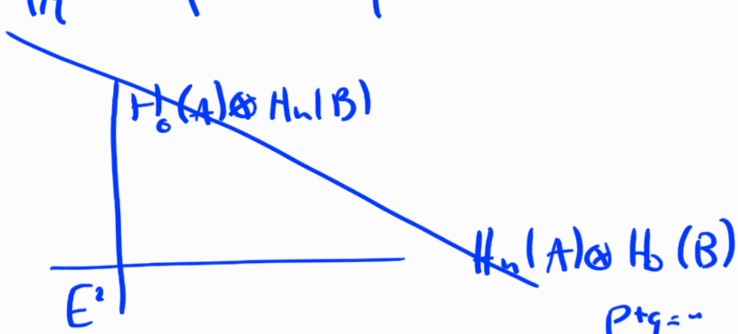


On rappelle que $E^0_{p,q} = A_p \otimes B_q$

$$E^1_{p,q} = A_p \otimes H_q(B)$$



$$E^2_{p,q} = H_p(A) \otimes H_q(B)$$



<u>But</u> : démontrer que $\partial_2, \partial_3, \dots, \partial_n = 0$

or tout élément dans $H_p(A) \otimes H_q(B)$ s'écrit $z = \sum x_i \otimes y_i$

avec $x_i \in A_p$ $\partial x_i = 0$ et $y_i \in B_q$ avec $\partial y_i = 0$

$\Rightarrow \quad \partial z = 0 \quad$ donc $\quad \partial_2 [z] = [\partial z] = 0$

donc $\partial_2 = \partial_3 = \dots = 0.$

$\Rightarrow \quad E^\infty_{p,q} = H_p(A) \otimes H_q(B).$

donc $\exists$ iso $\quad H_n(C_*) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(A) \otimes H_q(B).$

non canonique

Examen mardi 2 mars 14h – 17h.

3.2 Suite spectrale de Leray-Serre

Soit $p : X \to B$ une fibration $\quad b_0 \in B \quad x_0 \in p^{-1}(b_0) = F$

on suppose que B, F, X sont connexes par arcs.

Rappel : $\pi_1(X, x_0)$ agit sur $\pi_n(F)$.

et si $\pi_1(F)$ agit trivialement sur $\pi_n(F)$ alors cette action descend en une action de $\pi_1(B)$.

But : remplacer $\pi_n(F)$ par $H_n(F, \mathbb{Z})$.

comme $\pi_1(X, x_0)$ agit sur $\pi_1(F) \xrightarrow{h} H_1(F)$

cette action descend toujours en une action de $\pi_1(B) \circlearrowright H_q(F)$.

Rappel : supposons que $p : X \to B$ est un fibré.

on rappelle que pour tout $\gamma : [0,1] \to B \quad \gamma(0) = \gamma(1) = b_0$

$\gamma^* X \xleftarrow{\phi} F \times [0,1] \qquad h_0 = \phi|_{F \times \{0\}} : F \to F$

$h_1 = \phi|_{F \times \{1\}} : F \to F$

$\phi_\gamma = h_1 \circ h_0^{-1} \in \mathrm{Homeo}(F)$

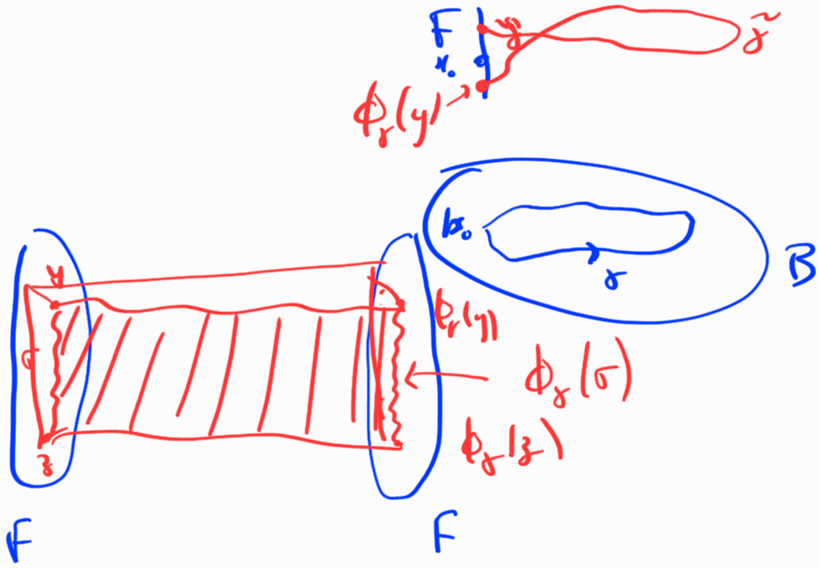
En composant γ et δ on vérifie que $\phi_{\gamma\delta} = \phi_\gamma \circ \phi_\delta$

à homotopie près

$\Rightarrow \pi_1(B)$ agit sur $H_*(F)$ par $\gamma \cdot x = (\phi_\gamma)_*(x).$

Exercice : dans une fibration de Serre on peut encore définir une action de $\pi_1(B)$ sur $H_*(F)$ de la façon suivante.

On définit récursivement par rapport au degré un morphisme $\Phi_\gamma : C_*(F) \longrightarrow C_*$



ϕ_γ induit un iso en homologie.

$\phi_\gamma \circ \phi_\delta \simeq \phi_{\gamma \circ \delta}$ etc...

Deux hypothèses simplificatrices : $p : X \to B$

On suppose que B est un CW-complexe et que p est un fibré

But est de construire une suite spectrale convergeant vers $H_*(X)$

On considère $B^0 \subset B^1 \subset B^2 \subset \dots \subset B^n$ la filtration de B par ses squelettes

et on pose $X^n = p^{-1}(B^n)$ $\qquad X^0 = F \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$

(si on a une seule 0-cellule)

On pose $F_p C_*(X) = C_*(X^p)$

$$E^0_{p,q} = F_p C_{p+q}(X) / F_{p-1} C_{p+q}(X) = C_{p+q}(X^p)/C_{p+q}(X^{p-1})$$

$$= C_{p+q}(X^p, X^{p-1})$$

∂_0 est la différentielle du complexe d'homologie relative.

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(X^p, X^{p-1})$$

Théorème : il existe un isomorphisme naturel

$$E^2_{p,q} \xrightarrow{\phi} H_p(B, H_q(F))$$

où $H_q(F)$ est l'homologie de la fibre F vue comme $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module.

démo : On se donne $e_i : D^p \to B$ la famille des cellules $i \in I_p$ de B de dim p et un disque $D'^p \subset D^p$ fermé à l'intérieur de DP.

Par excision $E'_{p,q} = \bigoplus_{i \in I_p} H_{p+q}\left(p^{-1}(D'^{i}), p^{-1}(\partial D'^{p})\right)$

Or le fibré X est trivial au dessus de D'_p.

i.e $\exists \ \phi : p^{-1}(D'_p) \xrightarrow{\sim} D'_p \times F$

donc $H_{p+q}\left(p^{-1}(D'_p), p^{-1}(\partial D'_p)\right) \simeq H_{p+q}\left(D'_p \times F, \partial D'_p \times F\right)$

$\simeq H_q(F)$

car $H_{p+q}\left((D'_p, \partial D'_p) \times F\right) = \bigoplus_{k+l=p+q} \underbrace{H_k(D'_p, \partial D'_p)}_{\substack{=0 \text{ si } k \neq p \\ = \mathbb{Z} \text{ si } k=p}} \otimes H_l(F)$

$= H_q(F)$.

$$E'_{p,q} = \bigoplus_{i \in I_p} H_q(F)$$

Pour éclaircir cette formule on choisit un point $y_i \in e_i(D'_p)$

L'isomorphisme canonique est plutôt $\quad | F_{y_i}$

$$\boxed{E'_{p,q} = \bigoplus_{i \in I_p} H_q(F_{y_i})}$$

On veut relier cela à $C_p^{cell}(B,B) \underset{\pi}{\otimes} H_q(F)$

Pour le faire on rappelle que une cellule marquée de $C_p^{cell}(B,B)$ est un couple (e_i, γ_i) où $\gamma_i : [0,1] \to B$ qui relie b_0 à un point $e_i(c_p) = y_i$

le même chemin γ_i permet d'identifier $H_q(F_{y_i}) \xrightarrow[\phi_{\gamma_i}]{\text{avec}} H_q(F)$

On obtient donc un isomorphisme

$$E'_{p,q} = \bigoplus_{i \in I_p} H_q(F_i) \simeq C_p^{cell}(B,B) \underset{\pi}{\otimes} H_q(F)$$

$$x \xrightarrow[\sim]{} (e_i, \gamma_i) \otimes \phi_{\gamma_i}(x)$$

Il faut après vérifier que la différentielle $\partial_1 : E'_{p,q} \to E'_{p-1,q}$ s'identifie à la différentielle dans $C_*^{cell}(B,B) \otimes H_q(F)$.

avant d'expliquer le cas général regardons deux exemples.

$$H_*(SU_2, \mathbb{Z}) \simeq H_*(S^3, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = 0, 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons $H_*(SU_3, \mathbb{Z})$

SU_3 agit sur $\mathbb{C}^3$ et préserve $S^5 \subset \mathbb{C}^3$

elle agit transitivement et le stabilisateur d'un point $s_0 \in S^5$ est SU_2

Cela donne un fibré

$$p : SU_3 \to S^5, \quad g \mapsto g s_0$$

$$\begin{array}{ccc} SU_2 & \hookrightarrow & SU_3 \\ & & \downarrow \\ & & S^5 \end{array}$$

La suite spectrale de Serre a pour 2ème page

$$E^2_{p,q} = H_p(S^5, H_q(SU_2, \mathbb{Z})). \qquad \pi_1 S^5 = 0$$

homologie à coefficients triviaux.

$$H_q(SU_2,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbb{Z}[\pi] = \bigoplus_{g \in \pi} \mathbb{Z} g$$

$$\begin{array}{c|cccccc} 3 & H_0(S^5) & 0 & 0 & 0 & 0 & H_5(S^5) \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_0(S^5) & 0 & 0 & 0 & 0 & H_5(S^5) \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

∂_5, ∂_3, ∂_2

$E^\infty = E^2$

on se rend compte que toutes les diff. sont nécessairement nulles!

$$E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q} = G_p H_{p+q}(SU_3, \mathbb{Z})$$

$H_0(SU_3) = \mathbb{Z}$ $\quad H_1(SU_3) = 0$ $\quad H_2(SU_3) = 0$ $\quad H_3 = \mathbb{Z}$ $\quad H_4 = 0$ $\quad H_5 = \mathbb{Z}$

$H_8 = \mathbb{Z}$ $\quad$ les autres valent 0.

$$H_k(SU_3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \quad \text{si } k = 0, 3, 5, 8 \quad 0 \text{ sinon.}$$

[en fait avec la suite spectrale en cohomologie

on verra $\quad H^*(SU_n) = H^*(S^3) \otimes H^*(S^5) \otimes \cdots \otimes H^*(S^{2n-1})$

$$E^r_{p,q} = E^\infty_{p,q} = G_p H_{p+q}$$

<u>Exemple</u> : Si $p : X \to B$ est un fibré en sphères S^{n-1}

<u>Rappel</u>. On suppose que le fibré est orientable ie $\pi_{n-1}(F) \simeq \mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}[\pi_1(B)]$-module trivial

L'obstruction à trouver une section de ce fibré est $e_n(X) \in H^n(X, \mathbb{Z})$

Calculons l'homologie avec la suite spectrale de Serre.

La page $E^2_{p,q} = H_p(B, H_q(F))$ où $F = S^{n-1}$

donc $H_q(F) = \mathbb{Z}$ si $q = 0$ ou $n-1$, 0 sinon.

dans le cas orientable $H_{n-1}(F) \simeq \mathbb{Z}$ avec action triviale de $\pi_1(B)$

$$
\begin{array}{l|llllll}
q=n-1 & H_0(B) & H_1(B) & H_2(B) & \cdots & & \\
 & \vdots & & & & & \\
 & 0 & & & & & \\
 & 0 & & & & & \\
q=0 & H_0(B) & H_1(B) & H_2(B) & H_3(B) & \cdots & H_n(B) \\
\hline
E^2 & & & & & &
\end{array}
$$

∂_2, ∂_3, ∂_n degré $(-n, n-1)$

La première différentielle potentiellement non nulle est

$\partial_n^{(k)} : H_k(B) \longrightarrow H_{n-k}(B)$ à la page E^n.

$$
\begin{array}{l|lllllll}
 & \mathrm{Coker}(\partial_n^{(n)}) & \mathrm{Coker}(\partial_n^{(n+1)}) & \cdots & & & & \boxed{\cdots} \\
 & 0 & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & \\
 & H_0(B) & H_1(B) & & H_{n-1}(B) & \mathrm{Ker}\,\partial_n^{(n)} & \mathrm{Ker}(\partial_n^{(n+1)}) & \boxed{\cdots} \\
\hline
E^{n+1} & & & & & & &
\end{array}
$$

$p+q=k$

donc $E^{n+1}_{p,q} = E^{\infty}_{p,q} = G_p(H_{p+q}(X))$.

$$0 \to \mathrm{Coker}\left(H_{n+k}(B) \xrightarrow{\partial_n} H_k(B)\right) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow \left(\mathrm{Ker}\ H_k(B) \xrightarrow{\partial_n} H_{k-n}(B)\right) \to 0$$

Ceci se réécrit plus élégamment à l'aide d'une suite exacte longue.

$$\underbrace{H_{n+k}(B)}_{k+n} \xrightarrow{\partial_n} \underbrace{H_k(B) \to H_k(X) \xrightarrow{p_*} H_k(B)}_{k} \xrightarrow{\partial_n} \underbrace{H_{k-n}(B) \to H_{k-n}(X) \to}_{k-n}$$

Cette suite s'appelle la suite exacte de Gysin (version homologique).

(On peut montrer que l'application $\partial_n : H_k(B) \to H_{k-n}(B)$ est le cap-produit avec $e_n \in H^n(B, \mathbb{Z})$.)

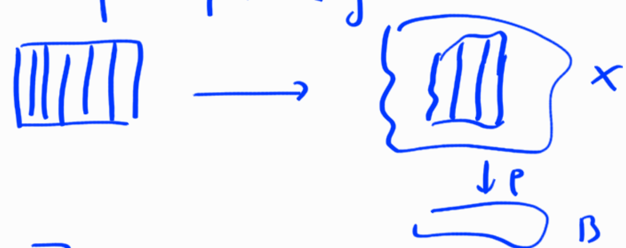
Indication sur comment généraliser la suite spectrale de Serre aux fibrations en enlevant les hypothèses sur B. (Version due à Dress).

Dress définit un (p,q) simplexe dans $p : X \to B$ comme une application

$$\begin{tikzcd} \sigma : \Delta_p \times \Delta_q \arrow[r] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d] \\ \Delta_p \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

ie "$p(\sigma(x,y))$ ne dépend pas de y"

ex. $p = q = 1$



On définit $C_{p,q} = \bigoplus_{\sigma\ (p,q)\text{-simplexes}} \mathbb{Z}\sigma$.

On va poser $\partial'\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ (\delta_i \times 1)$ $\quad \partial''\sigma = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{p+j} \sigma \circ (1 \times \delta_j)$

cela forme un bi-complexe. On considère alors les deux filtrations

On montre que $H_q(H_p(C_{*,*}, \partial'), \partial'') = \begin{cases} H_p(X) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

donc l'homologie du complexe total en degré p est $H_p(X)$.

Pour l'autre filtration $H_p(H_q(C, \partial''), \partial') = H_p(B, H_q(F))$
$= E^2_{p,q}$ dans la suite sp. de Serre

cela retrouve et généralise le cas précédent.

<u>Dernier exemple</u> : on utilise la suite spectrale "à l'envers".

On fixe $n \geq 2$ et on cherche à calculer $H_*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$

On rappelle qu'il existe une fibration $\Omega S^n \hookrightarrow PS^n = \{\gamma : [0,1] \to S^n\}$, $\gamma(0) = s_0$

$$\begin{tikzcd} PS^n \arrow[d] & \gamma \arrow[d, mapsto] \\ S^n & \gamma(1) \end{tikzcd}$$

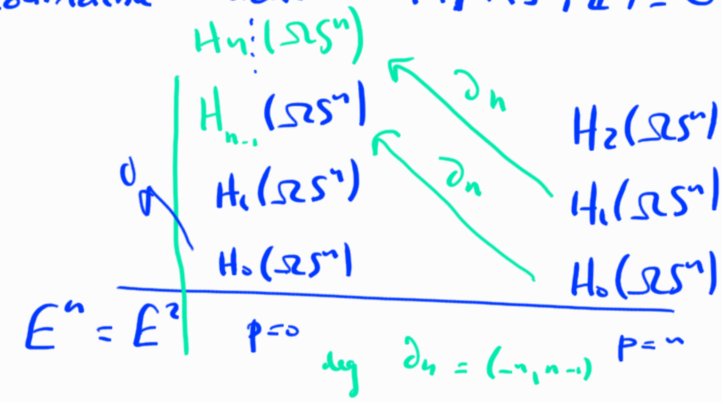
Il existe une suite spectrale qui converge vers $H_*(PS^n, \mathbb{Z})$

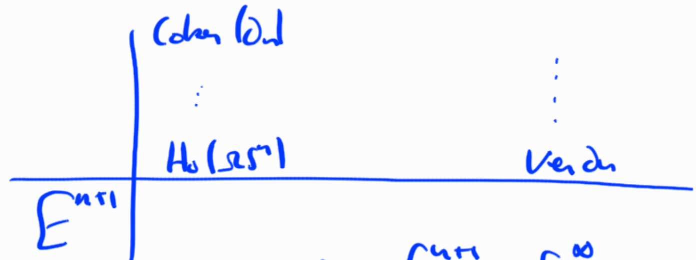
tq $E^2_{p,q} = H_p(S^n, H_q(\Omega S^n))$ $\qquad \pi_1 S^n = 0$ coeffs non tordus.

On PS^n est contractible donc $H_*(PS^n,\mathbb{Z})=0$.

On dessine E^2

$H_n(S^n,V)\simeq V$

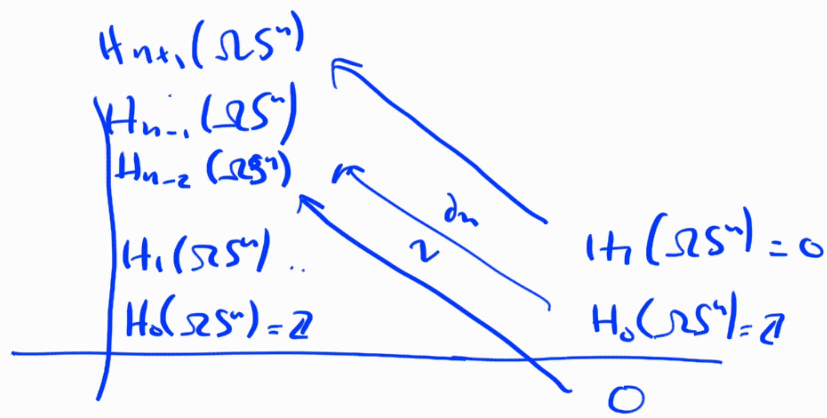




puis $E^{n+1}_{p,q} = E^{\infty}_{p,q}$

la suite spectrale dégénère à la $(n+1)$ page.

on en déduit que ∂_n est un isomorphisme



$\Rightarrow \quad H_1(\Omega S^n) = \dots = H_{n-2}(\Omega S^n) = 0$

$H_{n-1}(\Omega S^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

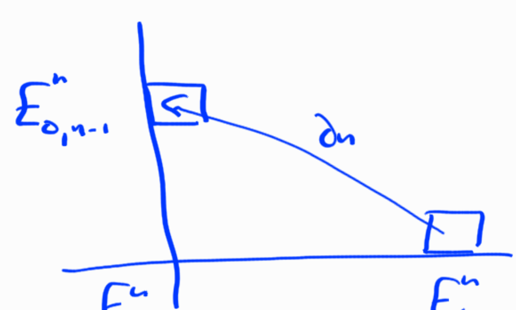
en général on a $\quad H_{k+n-1}(\Omega S^n) = H_k(\Omega S^n)$

Conclusion : $\quad H_k(\Omega S^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ si $(n-1)\mid k$

$= 0$ sinon.

Prochaine séance : Transgression.

cette différentielle est critique



On interprète topologiquement cette application

$$\begin{tikzcd} & H_n(X,F) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "p_*"] & H_{n-1}(F) \\ H_n(B) \arrow[r, "i_*"] \arrow[urr, "\tau"] & H_n(B,b_0) & \end{tikzcd}$$

les contraintes nécessaires pour définir τ sont les mêmes que celles qui permettent construire $\partial_n : E^n_{n,0} \longrightarrow E^n_{0,n-1}$

Application : stabilité des groupes d'homotopie des sphères
Th Freudenthal

$$\pi_k(S^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \pi_{k+1}(S^n)$$
si $k \leq 2n-4$

$$\begin{tikzcd} \pi_n(F) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\text{tuer l'action de } \pi_1(F)"'] & & H_n(F) \\ & \pi_n'(F) \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

$A \qquad X = A \cup \{\text{cellules de dim} \geq 2\}$

$\Rightarrow (X, A)$ est 1-connexe. prop 4.