<u>Rappel</u> : la suite spectrale de Serre. $p: X \to B$
une fibration avec base, espace total et fibre X connexe par arcs.

Il existe une suite spectrale dont la deuxième page est
$E^2_{p,q} = H_p(B, H_q(F))$ et qui converge vers $H_*(X)$

$E^\infty_{p,q} = G_p H_{p+q}(X)$ pour une certaine filtration.

<u>Transgression</u> : on cherche ici à interpréter certaines différentielles dans $E^n_{p,q}$: précisément $\partial_n : E^n_{n,0} \to E^n_{0,n-1}$ à partir de la fibration. $(n \geq 2)$

$$\begin{tikzcd} & H_n(X,F) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "p_*"] & H_{n-1}(F) \\ H_n(B) \arrow[r, "\sim", "j_*"'] \arrow[urr, "\tau"] & H_n(B, b_0) & \end{tikzcd}$$

On peut définir le morphisme $\tau : j_*^{-1}(\operatorname{Im} p_*) \to H_{n-1}(F)/\partial \operatorname{Ker} p_*$

$j_*^{-1}(\operatorname{Im} p_*) \subset H_n(B)$, $\quad H_{n-1}(F) \to H_{n-1}(F)/\partial \operatorname{Ker} p_*$

on l'appelle morphisme de transgression.

<u>Proposition</u> : il y a un diag. commutatif

$$\begin{tikzcd} j_*^{-1}(\operatorname{Im} p_*) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H_{n-1}(F)/\partial \operatorname{Ker} p_* \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ E^n_{n,0} \arrow[r, "\partial_n"] & E^n_{0,n-1} \end{tikzcd}$$

<u>Utilisation courante</u> : si la fibration $p: X \to B$ admet une section alors $\partial_n = 0$

$$\begin{tikzcd} H_n(X,F) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "p_*"'] & H_{n-1}(F) \\ H_n(B,b_0) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "s_*"'] \arrow[ur, "=0"] & H_{n-1}(b_0) = 0 \arrow[u, "s_*"'] \end{tikzcd}$$

$\tau = 0$ donc $\partial_n = 0$ aussi

<u>idée de preuve</u> :

$\boxed{H_0(B, H_{n-1}(F))} \xleftarrow{\partial_2}$

$H_0(B, H_1(F)) \xleftarrow{\partial_2}$

$H_0(B, H_0(F)) \quad H_1(B, H_0(F)) \quad H_2(B, H_0(F)) \qquad \xleftarrow{\partial_2} \boxed{H_n(B, H_0(F))}$

E^2

déjà $\quad E^2_{n,0} = H_n(B) \qquad E^3_{n,0} = \operatorname{Ker} \partial_2 : (H_n(B) \to ?) \subset H_n(B)$

etc $\quad E^4_{n,0} = \operatorname{Ker} \partial_3 \subset \operatorname{Ker} \partial_2 \subset H_n(B)$

ainsi de suite $\quad E^n_{n,0}$ est un sous-groupe de $H_n(B)$

il faut l'identifier à $j_*^{-1}(p_*(H_n(X,F)))$.

déjà $\quad E^2_{0,n-1} = H_0(B, H_{n-1}(F)) = H_{n-1}(F)_{\pi_1(B)} = H_{n-1}(F) / \underset{\gamma \in \pi_1(B)}{(\gamma x - x)}$

"coinvariants"

c'est un quotient de $H_{n-1}(F)$.

$E^3_{0,n-1} = H_{n-1}(F)_\pi / \operatorname{im}(\partial_2 : ? \to E^2_{0,n-1})$

$=$ quotient de $H_{n-1}(F)$

à chaque étape on requotiente.

$E^n_{0,n-1}$ est aussi un quotient de $H_{n-1}(F)$

$$\partial_n : \underset{\underset{H_n(B)}{\cap}}{E^n_{0,n}} \longrightarrow \underset{\underset{H_{n-1}(F)}{\uparrow}}{E^n_{0,n-1}}$$

<u>Rque</u> : ces groupes se stabilisent :

$$\begin{cases} E^{n+1}_{n,0} = \operatorname{Ker}(\partial_n) = E^\infty_{n,0} \leftarrow H_n(X) \\ E^{n+1}_{0,n-1} = \operatorname{Coker}(\partial_n) = E^\infty_{0,n-1} \subset H_{n-1}(X) \end{cases}$$

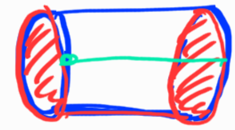
<u>Application</u> : un théorème de Freudenthal. Stabilité des groupes d'homotopie des sphères.

Si X est un espace topologique avec pt base x_0, on note ΣX la suspension réduite

$\Sigma X = X \times [0,1] / A \qquad$ où $A = X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times [0,1] \cup X \times \{1\}$.

<u>ex</u> : $\quad \Sigma([0,1])$

$$\Sigma S^{n-1} = S^n$$



$\exists$ une application tautologique $f : X \to \Omega \Sigma X$

$$x \mapsto [t \mapsto (x,t)]$$

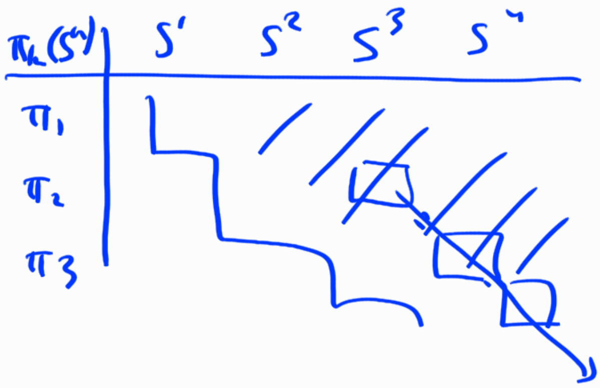
Elle induit des morphismes $f_* : \pi_k X \to \pi_k(\Omega\Sigma X) = \pi_{k+1}(\Sigma X)$

$\to$ morphisme de suspension.

dans le cas des sphères on a $\quad \pi_k S^{n-1} \to \pi_{k+1} S^n$

<u>Th</u> (Freudenthal) il s'agit d'un isomorphisme si $k \leq 2n-4$

surjectif si $k = 2n-3$



domaine de stabilité

définit groupe d'homotopie <u>stable</u>.

<u>démo</u> : $\quad f : S^{n-1} \to \Omega\Sigma S^{n-1} = \Omega S^n$

On veut prouver que f_* est iso (surj) sur π_k si $k \leq 2n-4$ (si $k = 2n-3$)

On regarde $Cf = S^{n-1} \times [0,1] \sqcup \Omega S^n \big/_{(x,1) \sim f(x)} \simeq \Omega S^n$

et $\quad S^{n-1} \subset Cf$

$\quad x \mapsto (x,0)$

$$\begin{tikzcd}
\pi_k(S^{n-1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "f_*"'] & \pi_k(Cf) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \pi_k(Cf, S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\|"] & \pi_{k-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "f_*"'] & \pi_{k-1}(Cf) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\
& \pi_k(\Omega S^n) & 0 & & \pi_{k-1}(\Omega S^n)
\end{tikzcd}$$

L'énoncé est équivalent à $\quad \pi_k(Cf, S^{n-1}) = 0 \quad \forall k \leq 2n-3.$

Par Hurewicz $\quad \Longleftrightarrow \quad H_k(Cf, S^{n-1}) = 0 \quad \forall k \leq 2n-3$

En faisant le même argument avec H_k à la place de π_k

On se ramène à montrer que $\quad f_* : H_k(S^{n-1}) \to H_k(\Omega S^n)$

est un iso pour $k \leq 2n-4$ et surj pour $k = 2n-3$.

<u>Rappel</u> : en utilisant $\begin{array}{ccc} \Omega S^n & \to & PS^n \\ & & \downarrow \\ & & S^n \end{array}$ et la suite spectrale associée

On a prouvé que $H_k(\Omega S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n-1 \mid k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$H_k(S^{n-1}) \neq 0$ seulement si $k = n-1$

$H_{n-1}(\Omega S^n) \simeq \mathbb{Z}$.

f_* peut être un isomorphisme que jusqu'à $k = 2n-2$.

Tout le problème se ramène à montrer que

$$f_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(\Omega S^n) \text{ est un isomorphisme.}$$

D'une part il y a un morphisme de suspension $H_{n-1}(S^{n-1}) \simeq H_n(S^n) = \mathbb{Z}$

<u>But</u> : identifier $f_* : \underset{\substack{\wr\!\wr \\ H_n(S^n)}}{H_{n-1}(S^{n-1})} \longrightarrow H_{n-1}(\Omega S^n)$

à un morphisme de transgression dans la fibration

$$\begin{tikzcd}
\Omega S^n \arrow[r] & PS^n \arrow[d] & & H_n(PS^n, \Omega S^n) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(\Omega S^n) \\
 & S^n & H_n(S^n) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[urr, dashed, bend left, "\tau"] & H_n(S^n, s_0) & \\
 & & & \pi_n(S^n) \arrow[ull, "h"] \arrow[r, "\partial", "\sim"'] & \pi_{n-1}(\Omega S^n) \arrow[uu, "h"']
\end{tikzcd}$$

<u>1ère étape</u> : mq $\tau = f_*$

Pour cela on compose ceci avec la suite exacte d'homotopie induite par la même fibration

<u>2ème étape</u> : on revient à la suite spectrale

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(\Omega S^n) & \\
H_2(\Omega S^n) & H_2(\Omega S^n) \\
H_1(\Omega S^n) & H_1(\Omega S^n) \\
H_0(\Omega S^n) & H_0(\Omega S^n) \arrow[uuul, "d_n", "\tau"'] \\
E^2 \quad p=0 & p=n
\end{tikzcd}$$

$E^{n+1} = E^\infty$ converge vers l'homologie de PS^n $= 0$ en degré > 0.

$\Rightarrow$ La différentielle d_n doit être un isomorphisme

τ la transgression aussi

$f_*: H_n(S^n) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(\Omega S^n)$ cqfd.

$$f: S^{n-1} \longrightarrow \Omega \Sigma S^{n-1} = \Omega S^n$$

$$\boxed{f_* = \tau}$$

$$\begin{tikzcd}
H_n(PS^n) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & H_n(PS^n, \Omega S^n) \arrow[r] \arrow[d, "\tau = f_*"] & H_{n-1}(\Omega S^n) \\
H_n(S^n) \arrow[r] \arrow[urr, bend left] & H_n(S^n, s_0) & \\
 & \pi_n(PS^n, \Omega S^n) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \pi_{n-1}(\Omega S^n) \arrow[uu, "h"'] \\
 & \pi_n(S^n) \arrow[uul, "h"] \arrow[ur, "\partial"'] &
\end{tikzcd}$$

$$f: E \to F$$

$$f^{-1}: \operatorname{Im} F \longrightarrow E/\operatorname{Ker} f$$

3.4 Suites spectrales cohomologiques

On se donne un col-complexe $C^0 \xrightarrow{d} C^1 \xrightarrow{d} C^2 \to$ $\quad d^2 = 0$

qu'on munit d'une filtration décroissante $\quad F_p C_n \supset F_{p+1} C_n \supset \cdots$

compatible avec la différentielle $\quad d\, F_p C_n \subset F_p C_{n+1}$

De même cette filtration induit une filtration sur $H^*(C)$

$$F_p H^n(C) = \{ [x] \text{ tq } x \in F_p C_n \quad dx = 0 \}.$$

puis $\quad G_p H^n(C) = F_p H^n(C) / F_{p+1} H^n(C)$

But de la suite : essayer de calculer ces gradués.

$$E_0^{p,q} = G_p C^{p+q} = F_p C^{p+q} / F_{p+1} C^{p+q} \xrightarrow{d^0} E_0^{p,q+1}$$
$$[x] \longmapsto [dx]$$

etc...

$$E_r^{p,q} = \{ x \in F_p C^{p+q} \quad dx \in F_{p+r} C^{p+q+1} \} / F_{p+1} C^{p+q} + d F_{p-r+1} C^{p+q-1}$$

on peut définir $d^r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$

de sorte que $E_{r+1}^{p,q} = \dfrac{\mathrm{Ker}(d^r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1})}{\mathrm{Im}(d^r : E^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q})}$

Si la filtration est bornée i.e $\begin{cases} F_p C^n = 0 & \text{pour } p \text{ assez grand} \\ F_0 C^n = C^n \end{cases}$

alors la suite converge au sens où $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q} = G_p H^{p+q}(C^\bullet)$

pour r assez grand.

Ajout de la structure multiplicative.

Supposons qu'il existe $* : C^p \times C^q \longrightarrow C^{p+q}$ bilinéaire

tq $d(\alpha * \beta) = d\alpha * \beta + (-1)^p \alpha * d\beta$ $(\Rightarrow * : H^p \times H^q \to H^{p+q})$

et tq si $\alpha \in F_p C^*$ et $\beta \in F_q C^*$ alors $\alpha * \beta \in F_{p+q} C^*$

Lemme : $\forall r \geq 0$ l'opération $*$ induit une opération

$*_r : E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \longrightarrow E_r^{p+p',q+q'}$

tq ① $d^r(\alpha *_r \beta) = d^r\alpha *_r \beta + (-1)^{p+q} \alpha *_r d^r\beta$

② $*_{r+1}$ est induit par $*_r$ quand $E_{r+1} = H^*(E_r)$

③ si la filtration est bornée le produit $*_r$ se stabilise vers le produit sur $\boxed{G_p H^{p+q} \times G_{p'} H^{p'+q'} \to G_{p+p'} H^{p+p'+q+q'}}$

démo : vérification laissée en exercice.

On veut surtout appliquer cela à la suite spectrale de Serre.

$p : X \to B$ une fibration de fibre $F = p^{-1}(b_0)$

on suppose que B est un CW-complexe et que p est un fibré.

$F_p C^n(X) \overset{\text{def}}{=} C^n(X, X^{p-1})$ où $X^p = p^{-1}(B^{p-1})$ (p-squelette de B)

$= \{ \varphi : C_n(X) \to \mathbb{Z}$ tq $\varphi|_{C_n(X^{p-1})} = 0 \} \subset C^n(X)$.

Si la dimension de B est finie alors $F_p C^n(X) = 0$ pour p assez grand.

$$E_0^{p,q} = F_p C^{p+q}(X) / F_{p+1} C^{p+q}(X) = C^{p+q}(X, X^{p-1}) / C^{p+q}(X, X^p)$$

$$\boxed{E_0^{p,q} = C^{p+q}(X^p, X^{p-1})}$$

$d^0 : C^{p+q}(X^p, X^{p-1}) \to C^{p+q+1}(X^p, X^{p-1})$

$$\boxed{E_1^{p,q} = H^{p+q}(X^p, X^{p-1})}$$

le même raisonnement qu'en homologie montre que

$$E_1^{p,q} \simeq \mathrm{Hom}_\pi\left(C^{cell}_{p+q}(B^p, B^{p-1}), H^q(F)\right)$$

d^1 s'identifie au morphisme de cohomologie cellulaire de B à coeffs dans $H^*(F)$ ...

$$\boxed{E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F))}$$ cohomologie tordue

On veut ajouter à ceci le produit le cup-produit.

<u>Problème</u> : le produit n'est pas bien défini au niveau de E_0

<u>Solution</u> : montrer que le produit existe par contre sur le terme E_1 et qu'il vérifie les hypothèses du lemme.

On va voir le cup-produit comme la composition d'un cross-produit et de l'application diagonale.

$$H^*(X) \times H^*(X) \to H^*(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(X)$$
$$(\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha \times \beta = p_1^*\alpha \cup p_2^*\beta \longrightarrow \alpha \cup \beta.$$

$$(X \times X)^p = \bigsqcup_{i+j=p} X^i \times X^j$$

par excision :
$$H^*((X\times X)^p, (X\times X)^{p-1}) = \bigoplus_{i+j=p} H^*(X^i \times X^j, X^{i-1}\times X^j \cup X^i \times X^{j-1})$$

cela permet d'identifier $H^*(X^i \times X^j, X^{i-1}\times X^j \cup X^i \times X^{j-1}) \hookrightarrow H^*((X\times X)^p, (X\times X)^{p-1})$

(E_1)

$$H^m(X^p, X^{p-1}) \times H^n(X^q, X^{q-1}) \longrightarrow H^{n+m}(X^p \times X^q, X^p \times X^{q-1} \cup X^{p-1} \times X^q)$$
$$\downarrow$$
$$H^{n+m}((X\times X)^{p+q}, (X\times X)^{p+q-1})$$

$$\begin{array}{ccc} & \overset{*_1}{\searrow} & \uparrow \Delta^* \\ & & H^{n+m}(X^{p+q}, X^{p+q-1}) \end{array}$$

$$*_1 : \underset{\substack{\wr\!\wr \\ H^m(X^p, X^{p-1})}}{E_1^{p,m-p}} \times E_1^{q,n-q} \longrightarrow E_1^{p+q,\, m+n-p-q}$$

$p' = m-p \qquad q' = n-q$

on obtient bien le bon produit.

On peut montrer que $*_1$ est compatible avec d'.

Puis que $E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F))$, $*_2$ a une interprétation.

$H^*(F)$ est une algèbre. $\quad H^*(B, H^*(F)) \cup H^*(B, H^*(F))$

$$\xrightarrow{\text{cup}} H^*(B, H^*(F) \otimes H^*(F)) \xrightarrow{\text{cup}} H^*(B, H^*(F))$$

<u>Observation</u> : $\boxed{\text{modulo un signe. le produit } *_2 \text{ s'interprète comme un double cup-produit.}}$

<u>Exemple d'application</u> : on prend $B = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) = K(\mathbb{Z}, 2)$

$$\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) = S^\infty(\mathbb{C}) / S^1$$

cela donne une fibration $\qquad \begin{array}{c} S^1 \hookrightarrow S^\infty(\mathbb{C}) \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) \end{array}$

$$\begin{array}{c|ccc} q=1 & H^0(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C})x & \overset{d^2}{} H^1(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C})x & H^n(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))x \\ q=0 & H^0(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) & H^1(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) \; H^2\alpha & H^n(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))x \\ \hline E_2 & & & \end{array} \qquad E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}), H^q(S^1))$$

$\pi_1 = 0 \qquad H^0(S^1) = H^1(S^1) = \mathbb{Z}$

$$E_2^{p,1} = H^p(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}), H^1(S^1)) = H^p(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) \otimes \underset{x}{H^1(S^1)}$$

$E_3 = E_\infty$ car la suite se stabilise à la 3ème page.

$= 0$ car $H^r(S^\infty(\mathbb{C})) = 0 \quad r > 0$

d^2 est un isomorphisme

$d^2 x = \alpha \in H^2(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))$ générateur.

$H^1(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) = 0 \qquad H^{2k+1}(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}) = 0$

$H^4(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))$ est engendré par $d_2($

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H^0(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C})\,x \arrow[drr, "d_2"] & 0 & \alpha x \arrow[drr, "d_2"] & & \\
H^0(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}) & 0 & \alpha & & ?
\end{tikzcd}$$

$$d^2(\alpha x) = \underset{0}{\cancel{d^2\alpha}}\cdot x + \alpha\, d^2 x = \alpha^2$$

$$H^4(\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}) = \mathbb{Z}\cdot\alpha^2 \qquad \text{etc}\ldots \qquad H^{2k}(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}\,\alpha^k.$$

<u>Conclusion</u> : $H^*(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[\alpha]$ $\deg \alpha = 2$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[dr] & H^0 x \arrow[drr, "\sim\, d_2"] & H^1 x \arrow[drr] & \boxed{H^2 \alpha x} \arrow[drr] & H^3 x & \\
& H^0 & \boxed{H^1} \arrow[dr] & \boxed{\alpha H^2} & H^3 & H^4 \\
& & 0 & 0 & \alpha = d^2 x &
\end{tikzcd}$$

$$k_2 : \quad E_2^{p,q} \times E_2^{p',q'} \longrightarrow E_2^{p+p',q+q'}$$

cup produit.

$$H^k(\mathbb{P}^\infty, H^0(S^1)) \times H^0(\mathbb{P}^\infty, H^1(S^1)) \longrightarrow H^k(\mathbb{P}^\infty, H^1(S^1))$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \simeq\ x \in H^1(S^1) \qquad\qquad\qquad \simeq\ H^k(\mathbb{P}^\infty)\otimes H^1(S^1)$$

$\pi_1(F) \circlearrowright \pi_n(F)$

$\circlearrowright \pi_1(F)$ conjugaison $\dashv$ $\pi_1 F$ abélien.

$p : X \to B$ $\qquad p^{-1}(b_0) \simeq p^{-1}(b_1)$

équiv. d'homotopie faible]