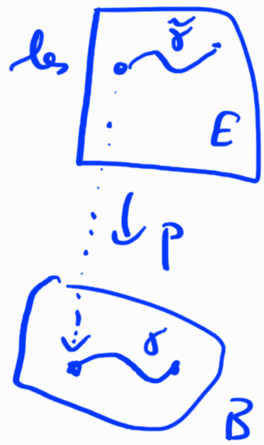
1.3 Groupes d'homotopie et fibrations

Définition. Une application $p: E \to B$ est une fibration (fibration de Serre) si $\forall n \in \mathbb{N}$ et pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd} D^n \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ D^n \times [0,1] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

on peut relever comme indiqué en pointillé.

ex : $n = 0$ on demande à pouvoir relever les chemins avec une extrémité fixée.



ex : . Tout revêtement est une fibration de Serre (il y a même unicité du relèvement)

. Tout produit $E = F \times B$ $\quad p(f,b) = b$ est une fibration de Serre. (même si F n'est pas discret).

Exercice : $p: E \to B$ est un fibré si $\exists (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de B et une famille d'homéomorphismes

$$\phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F_i$$

qui commute avec la projection sur U_i

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times F_i \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

Mq un fibré est une fibration.

Mq si B est connexe par arcs, toutes les fibres F_i sont homéom-

Théorème : Si $p : E \to B$ est une fibration $b_0 \in B$ un point base pour B et $x_0 \in p^{-1}(b_0)$, alors $\exists$ $\partial_n : \pi_n(B, b_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x_0)$ où $F = p^{-1}(b_0)$ qui s'inscrit dans une suite exacte longue

$$\to \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F, x_0) \to \pi_{n-1}(E, x_0) \cdots$$

Démo : On considère la paire (E, F) et on écrit la suite exacte longue

$$\pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0) \to \pi_{n-1}(E, x_0)$$

il faut remplacer $\pi_n(E, F, x_0)$ par $\pi_n(B, b_0)$.

Un élément de $\pi_n(E, F, x_0)$ est une classe d'homotopie d'application $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (E, F, x_0)$

en considérant $p \circ f : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (B, b_0)$

cela définit un morphisme $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$

Il suffit de prouver que p_* est un isomorphisme

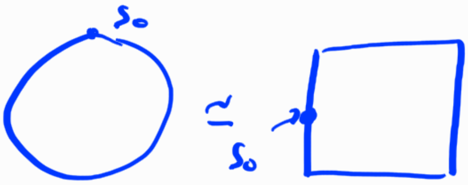
$$\begin{tikzcd}
\pi_n(E, x_0) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "p_*"'] & \pi_n(E, F, x_0) \arrow[r, "p_*", "\sim"'] \arrow[dr, "\partial"'] & \pi_n(B, x_0) \arrow[d, "\partial_n"] \\
 & & \pi_{n-1}(F, x_0)
\end{tikzcd}$$

Montrons que p_* est un isomorphisme

surjectivité : $f : (D^n, S^{n-1}) \to (B, b_0)$

on veut trouver $\tilde{f} : (D^n, S^{n-1}) \to (E, F)$ qui relève f et telle que $\tilde{f}(s_0) = x_0$

On décompose $D^n = D^{n-1} \times [0, 1]$



$$\begin{tikzcd} D^{n-1}\times\{0\} \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ D^{n-1}\times[0,1] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

Comme $p : E \to B$ est une fibration, $\exists\ \tilde{f}$ qui fait commuter le diagramme. Cette application envoie $s_0 \in D^{n-1}\times\{0\}$ sur x_0 et donc elle définit un élément de $\pi_n(E,F,x_0)$ qui s'envoie sur f. Donc p_* est surjective.

<u>injectivité de</u> p_* $\qquad f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (E, F, x_0)$

on suppose que $p\circ f$ est homotope à 0 dans $\pi_n(B)$

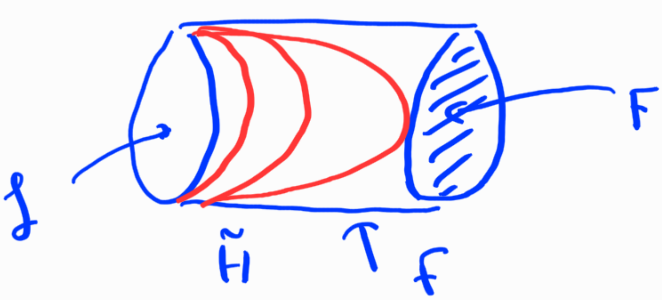
ie $\exists\ H : D^n \times [0,1] \longrightarrow B$

tq $H(x,0) = p\circ f(x)$ et $H(x,1) = b_0$

et $H(y,t) = b_0$ si $y \in \partial D^n$.

On applique directement la propriété de fibration de Serre pour relever H en

$$\begin{tikzcd} D^n\times\{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ D^n\times[0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$



$\tilde{H}$ envoie $D^n\times\{1\} \cup \partial D^n\times[0,1]$ dans F

implique que f est homotope relativement au bord à une application à valeurs dans F. $\Rightarrow [f] = 0$ dans $\pi_n(E,F,x_0)$.

donc p_* est injective. $\qquad$ cqfd.

Application groupes d'homotopie des sphères.

On fixe $n \geq 1$ et on regarde l'action de S^1 sur $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$

$$S^{2n+1} = \{(z_1 \dots z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \ / \ \sum |z_i|^2 = 1\}$$

On fait agir $e^{i\theta} \in S^1$ par $e^{i\theta}.(z_1, \dots, z_{n+1}) = (e^{i\theta}z_1, \dots, e^{i\theta}z_{n+1})$

C'est une action propre et libre $\quad S^{2n+1}/S^1 \simeq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

$$[x \text{ tq } D = \mathbb{C}x] \leftarrow \{D \subset \mathbb{C}^{n+1}\}$$
avec $|x| = 1$

ex : Si $n = 1 \quad S^3/S^1 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$

L'application $h : S^3 \longrightarrow S^3/S^1 \simeq S^2$ est l'application de Hopf.

On écrit la suite exacte longue d'homotopie correspondante

$$\cancel{\pi_5(S^1)} \to \pi_5(S^3) \xrightarrow{\sim} \pi_5(S^2) \longrightarrow \cancel{\pi_4(S^1)} \to \pi_4(S^3) \xrightarrow{\sim} \pi_4(S^2) \to \cancel{\pi_3(S^1)} \to \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$$

$$\downarrow S$$
$$\pi_3(S^2)$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{\pi_2(S^1)}$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{\pi_2(S^3)}$$
$$\downarrow$$
$$\mathbb{Z} \simeq \pi_2(S^2)$$
$$\downarrow$$
$$\mathbb{Z} \simeq \pi_1(S^1)$$
$$\downarrow$$
$$0$$

[G compact agit prop. librement sur X]

$X \to X/G$ est un fibré de fibre G

$\Rightarrow \quad \pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ engendré par $[h]$.

$\pi_k(S^3) \xrightarrow{\sim} \pi_k(S^2) \quad \forall k \geq 3$

Rque : ces groupes ne sont pas connus pour k assez grand.

Exercice : Soit $p : E \to B$ de fibre F tq $i : F \to E$ est homotope à une constante

Th Ehresman : $p : E \to B$ propre et submersion en tout point $\Rightarrow p$ est un fibré

$$\pi_n(B) = \pi_n(E) \times \pi_{n-1}(F)$$

si F est un rétract de E (ex si $E = F \times B$)

alors $\pi_n(E) = \pi_n(F) \times \pi_n(B)$.

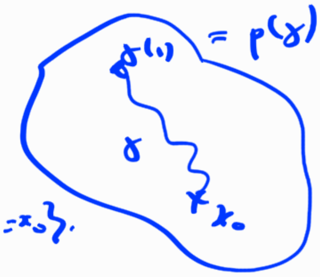
$$F \overset{p_1}{\leftarrow} F \times B$$
$$f \mapsto (f, b_0)$$

Soit X un espace top avec un point base x_0

On pose $PX = \{ \gamma : [0,1] \to X$ tq $\gamma(0) = x_0 \}$

On le munit de la topologie "compacte-ouverte".

On pose $p : PX \to X$
$\gamma \mapsto \gamma(1)$



On pose $\Omega X = p^{-1}\{x_0\} = \{ \gamma : [0,1] \to X,\ \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \}$.

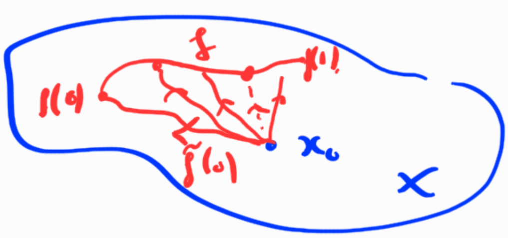
<u>Lemme</u> : l'application $p : PX \to X$ est une fibration.

$$\begin{tikzcd} D^n \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & PX \arrow[d] \\ D^n \times [0,1] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}\,?"] & X \end{tikzcd}$$

<u>Preuve</u> : On se donne $f : D^n \times [0,1] \to X$

réglons le cas $n = 0$

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "\tilde{f}(0)"] \arrow[d] & PX \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$



On relève f en concaténant le chemin $\tilde{f}$ et une portion du chemin f. Ceci donne une formule "universelle" pour résoudre le problème.

Si n est quelconque $f : D^n \times [0,1] \to X$ est une famille $f(x,\cdot)$ comme précédemment. On fait la même construction avec le paramètre $x \in D^n$.

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r, hook] & PX \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

<u>Observation</u> : PX est contractile

$$H : PX \times [0,1] \to PX$$
$$(\gamma, s) \mapsto (t \mapsto \gamma(ts))$$

est une homotopie entre l'identité $(s=1)$ et l'application constante $(s=0)$.

La suite exacte longue d'homotopie donne

$$\pi_n(\Omega X) \to \pi_n(\cancel{PX}) \to \pi_n(X) \xrightarrow{\sim} \pi_{n-1}(\Omega X) \to \pi_{n-1}(\cancel{PX})$$

donc $\pi_n(X) \simeq \pi_{n-1}(\Omega X)$

$\pi_1(X) = \pi_0(\Omega X) = \{$ classes d'homotopie de lacets basés en $x_0 \}$.

$\pi_2(X) = \pi_1(\Omega X)$

__Exemple__ (théorie de Morse de dim ∞ étudie la topologie de ΩX (Milnor))
Permet de calculer $H_1(\Omega X, \mathbb{Z}) = \pi_1(\Omega X)$ (car ΩX est un H-groupe) $= \pi_2(X)$.

__Exemple__ : Si G est un groupe de Lie
$\pi_2(G) = 0$ (E. Cartan)
Autre preuve Bott $^{\sim 30}$ $\Rightarrow H_1(\Omega G, \mathbb{Z}) = 0$

__Exercices__ : calculer $\pi_k(P_n \mathbb{C})$ pour k le plus grand possible

$$\begin{array}{c} S^1 \subset S^{2n+1} \\ \downarrow \\ P^n(\mathbb{C}) \end{array}$$

- Calculer $\pi_1(SU_n)$, $\pi_2(SU_n)$, $\pi_3(SU_n)$ $n \geq 2$

$SU_n = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} A = 1 \quad \det A = 1 \}$.

$SU_2 \simeq S^3$

idée
$$\begin{array}{c} SU_n \subset SU_{n+1} \\ \downarrow \\ SU_{n+1}/SU_n \end{array}$$

- $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C}) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C} \quad z_i \neq z_j\}$

$P_n = \pi_1 \mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$

Rq $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})$ est un $K(P_n, 1)$

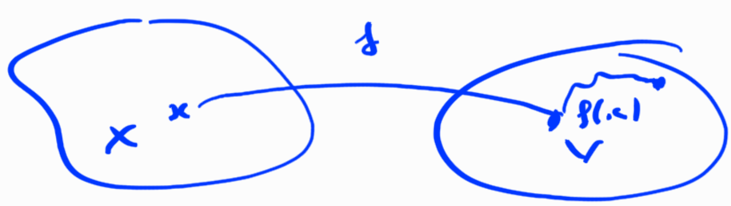
ie $\pi_k \mathrm{Conf}_n(\mathbb{C}) = 0 \quad \forall k \geq 2$.

P_n groupe de tresses "pur".

- Exercice : toute application $f : X \to Y$ est représentable par une fibration. $\exists\ X' \simeq X$ (homotopiquement équiv.) et $f' : X' \to Y$ est une fibration.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] & Y \\ X \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

indication : $X' = \{(x, \gamma)$ où $x \in X$ et $\gamma : [0,1] \to Y$, $\gamma(0) = f(x)\}$



$$X' \longrightarrow Y$$
$$(x, \gamma) \longmapsto \gamma(1)$$
est une fibration

La fibre de cette application est bien définie à homotopie près. Elle s'appelle fibre homotopique.

$F(f) = \{(x, \gamma) \quad \gamma(0) = f(x), \ \gamma(1) = y_0\}$

on a une suite exacte longue

$$\cdots \to \pi_{k+1}(Y) \to \pi_k(F(f)) \to \pi_k(X) \xrightarrow{f_*} \pi_k(Y) \to \pi_{k-1}(F(f)) \to \cdots$$

2 _ Homologie à coefficients tordus (théorie de l'obstruction)

Rappel : Si X est un espace topologique délaçable avec un point base x_0 (il existe un revêtement universel $\tilde{X}, \tilde{x}_0$)
$\Leftrightarrow$ semi-localement simplement connexe

$$\pi_1(X, x_0) = \{\alpha : [0,1] \to X \quad \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}/\sim$$

composition $\alpha \cdot \beta(t) = \alpha(2t)$ si $t \leq \frac{1}{2}$
$= \beta(2t-1)$ si $t \geqslant \frac{1}{2}$.

$$\tilde{X} = \{(x, \gamma) \text{ où } x \in X \text{ et } \gamma : [0,1] \to X, \ \gamma(0) = x_0,\ \gamma(1) = x\}/\sim$$

$\pi_1(X)$ agit sur $\tilde{X}$ par $\alpha \cdot \gamma = \alpha * \gamma$
C'est une action à gauche.

2.1 Définition préliminaire de l'homologie tordue

Soit M un groupe abélien muni d'une action à gauche de $\pi_1(X, x_0) = \pi$. ie $\pi \to \mathrm{Aut}(M)$
morphisme de groupes.

C'est équivalent de parler d'un $\mathbb{Z}[\pi]$-module.

$\mathbb{Z}[\pi] = \{$combinaisons formelles entières d'éléments de $\pi\}$.

"$g \cdot m = g \cdot m$" $\qquad (\sum a_i g_i) \cdot m = \sum a_i (g_i \cdot m)$

Exemple : si X est un espace topologique délaçable avec un point base x_0.

alors $C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$. En effet si $\alpha \in \pi_1(X)$ et $\sigma : \Delta_n \to \tilde{X}$, on définit $\alpha \cdot \sigma = \alpha_* \sigma$

où on identifie α avec son action sur $\tilde{X}$.

On définit $C_*(\tilde{X},\mathbb{Z}) \underset{\pi}{\otimes} M = C_*(\tilde{X},\mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M / N$

où N = sous-groupe abélien engendré par $\gamma x \otimes \gamma m - x \otimes m$

<u>Rque</u>: en général si A est un anneau non commutatif comme $\mathbb{Z}[\pi]$, on fait le produit tensoriel d'un A-module à droite M avec un A module à gauche N de la façon suivante $M \underset{A}{\otimes} N = M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} N / \begin{pmatrix} ma \otimes n \\ - m \otimes an \end{pmatrix}$

ici on considère $C_*(\tilde{X},\mathbb{Z})$ comme un $\mathbb{Z}[\pi]$-module à droite en posant

$x \cdot \gamma := \gamma^{-1} x$ de sorte que

$\gamma x \otimes \gamma m = x \gamma^{-1} \otimes \gamma m = x \otimes \gamma^{-1}\gamma m = x \otimes m$

<u>Définition</u>: La différentielle $\partial : C_n(\tilde{X}) \to C_{n-1}(\tilde{X})$ commute avec l'action de π. i.e ∂ est un morphisme de $\mathbb{Z}[\pi]$-modules.

donc $\partial \otimes 1 : \quad C_n(\tilde{X}) \underset{\pi}{\otimes} M \xrightarrow{\partial \otimes 1} C_{n-1}(\tilde{X}) \underset{\pi}{\otimes} M$

est bien défini et $(\partial \otimes 1)^2 = 0$

On définit $H_*(X, M) = \dfrac{\operatorname{Ker}\left(\partial : C_n(\tilde{X}) \underset{\pi}{\otimes} M \to C_{n-1}(\tilde{X}) \underset{\pi}{\otimes} M\right)}{\operatorname{Im}\left(C_{n+1}(\tilde{X}) \underset{\pi}{\otimes} M \to C_n(\tilde{X}) \underset{\pi}{\otimes} M\right)}$

homologie tordue à coeffs dans M / homologie à coeff. locaux.

Définition : on définit $C^n(X,\Pi) = \mathrm{Hom}_\pi(C_n(\tilde{X}), \Pi)$

$$\mathrm{Hom}_\pi(C_n(\tilde{X}),\Pi) = \{ f : C_n(\tilde{X}) \to \Pi \text{ linéaires } \; f(\gamma x) = \gamma f(x) \; \forall \gamma \in \pi \}$$
$$= \{ f : C_n(\tilde{X}) \to \Pi \;\; \mathbb{Z}[\pi]\text{-linéaires} \}.$$

on pose $\quad d_n f = (-1)^n f \circ \partial \quad$ cela donne un co-complexe dont la cohomologie est la cohomologie tordue $H^*(X,\Pi)$

⚠ La notation prête à confusion. Dans ce cours, toutes les homologies sont a priori à coeffs. tordus.

Exemples : Si Π est un groupe abélien muni d'une action triviale $\gamma . m = m \quad \forall \gamma \in \pi$.

$$C_n(X,\Pi) = C_n(\tilde{X},\mathbb{Z}) \otimes_\pi \Pi = C_n(\tilde{X},\mathbb{Z}) \otimes \Pi /$$

$\gamma x \otimes \gamma m = x \otimes m$

$\gamma x \otimes m = x \otimes m$

$$= \underbrace{C_n(\tilde{x},\mathbb{Z}) / (\gamma x - x)} \otimes \Pi$$

les générateurs de ce groupe correspondent aux simplexes de X.

En effet $\qquad C_n(\tilde{X}) \xrightarrow{p_*} C_n(X)$

passe au quotient et définit

un iso $\qquad C_n(\tilde{X}) / (\gamma x - x) \simeq C_n(X)$

$C_n(X,\Pi) = C_n(X) \otimes \Pi$. On retombe sur la définition usuelle de l'homologie à coeffs dans Π.

ex : $H_*(X, \mathbb{Z}[\pi]) \simeq H_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$.

$$C_*(\tilde{X}) \otimes_{\pi} \mathbb{Z}[\pi] = C_*(\tilde{X})$$

Ref : Hatcher - Whitehead (Homotopy theory).
(Algeb. topology)

Ref sur $X \to X/G$ fibré
chap 2 Lie Groups Duistermaat - Kolk.