Suites spectrales : $\quad C_0 \overset{\partial}{\leftarrow} C_1 \leftarrow \cdots \leftarrow C_n \leftarrow \cdots$

Filtration $\quad F_0 C_n \subset F_1 C_n \subset \cdots \subset F_p C \subset \cdots$

tq $\quad \partial F_p C_n \subset F_p C_{n-1}$

$$E^0_{p,q} = G_p C_{p+q} = F_p C_{p+q} / F_{p-1} C_{p+q}$$

$$\partial_0 : E^0_{p,q} \to E^0_{p,q-1}$$
$$x \to \partial x$$

$$\begin{tikzcd}
\downarrow & E^0_{12} \arrow[d] \\
E^0_{01} \arrow[d, "\partial_0"'] & E^0_{11} \arrow[d] \\
E^0_{00} & E^0_{10}
\end{tikzcd}$$

E^0

a chaque étape $E^{r+1}_{p,q}$ est l'homologie de $E^r_{p,q} \xrightarrow{\partial_r} E^r_{p-r,q+r-1}$

$$\begin{tikzcd}
0 & E^1_{02} & E^1_{12} \arrow[l, "\partial_1"'] & \cdots \\
0 & E^1_{01} & E^1_{11} \arrow[l, "\partial_1"'] & \cdots \\
0 & E^1_{00} & E^1_{10} \arrow[l, "\partial_1"'] & \cdots \\
E^1 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
E^2_{02} & & & \\
E^2_{01} & E^2_{11} & E^2_{20} & \\
E^2_{00} & E^2_{10} & E^2_{20} \arrow[ull, "\partial_2"] & E_{30} \arrow[uuulll, "\partial_3"']
\end{tikzcd}$$

E^2

sur les lignes obliques

$E^2_{p,q}$ se présente sous forme d'une famille de complexes bornés.

On dit que le complexe dégénère en E^r si $\partial_k = 0 \ \forall k \geq r$

$$\Rightarrow \quad E^{r+k}_{p,q} = E^r_{p,q} \quad \forall k \geq 0$$

on a alors $\quad E^\infty_{p,q} = G_p H_{p+q}(C_*)$

Formule, $\quad E^r_{p,q} = \{ x \in F_p C_{p+q},\ \partial x \in F_{p-r} C_{p+q-1} \} / F_{p-1} C_{p+q} + \partial F_{p+r-1} C_{p+q+1}$

$$\partial_v[x] = [\partial x]$$

Le cas d'un sous complexe $\qquad A_* \subset C_*$

$$F_0 C_n = A_n \qquad F_1 C_n = C_n \qquad F_k C_n = C_n \quad k \geq 1 .$$

On note $\quad B_* = C_* / A_*$.

$$E^0_{0,q} = G_0\, C_q = A_q \qquad E^0_{1,q} = G_1\, C_{q+1} = C_{q+1}/A_{q+1} = B_{q+1}$$

$$E^0 \qquad \begin{tikzcd} A_3 \arrow[d] & B_4 \arrow[d] \\ A_2 \arrow[d] & B_3 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[d, "\partial_0"] & B_2 \arrow[d, "\partial_0"] \\ A_0 & B_1 \arrow[d] \\ & B_0 \end{tikzcd}
\qquad\qquad
E^1 \qquad \begin{tikzcd} H_3(A) & H_4(B) \arrow[l, "\partial_1"'] \\ H_2(A) & H_3(B) \arrow[l, "\partial_1"'] \\ H_1(A) & H_2(B) \arrow[l, "\partial_1"'] \\ H_0(A) & H_1(B) \arrow[l, "\partial_1"'] \\ 0 & H_0(B) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$0 \to A_* \to C_* \to B_* \to 0 \quad$ donne $\quad H_n(C) \to \boxed{H_n(B) \xrightarrow{\partial_1^n} H_{n-1}(A)} \to$

$p+q=1$

$$E^2 \qquad \begin{array}{c|cc} & \cdots & \cdots \\ 0 & \operatorname{Coker} \partial_1^2 & \operatorname{Ker} \partial_1^2 \quad 0 \\ & \operatorname{Coker} \partial_1^1 & \operatorname{Ker} \partial_1^1 \quad 0 \\ \hline & & H_0(B) \end{array}$$

À cause de la forme de E^2 : $\partial_2 = 0$

$\Rightarrow E^3 = E^2 \qquad \partial_3 = 0$

etc ... $\qquad E^\infty_{p,q} = E^2_{p,q}$ la suite dégénère en E^2

Conséquence : $\qquad E^\infty_{p,q} = G_p\, H_{p+q} = E^2_{p,q}$

On a une suite exacte $\qquad 0 \to G_0 H_{p+q} \to H_{p+q}(C) \to G_1 H_{p+q} \to 0$

$$\boxed{0 \to \operatorname{Coker} \partial_1^{p+q} \to H_{p+q}(C_*) \to \operatorname{Ker} \partial_1^{p+q-1} \to 0}$$

Corollaire : Montrons que si X est un CW-complexe, il y a un isomorphisme entre $H_*^{sing}(X, \mathbb{Z}) \simeq H_*^{cell}(X, \mathbb{Z})$

Preuve. supposons que X est de dimension finie pour commencer.

Posons $\quad C_n = C_n(X, \mathbb{Z})$ le groupe des n-chaînes singulières.

On rappelle que $\quad X = \bigcup_{k=0}^{n} X^k \quad$ où X^k est le k-squelette de X.

On peut poser $\quad F_p C_n = C_n(X^p, \mathbb{Z}) \subset C_n(X, \mathbb{Z})$

$$E^0_{p,q} = F_p C_{p+q}(X) / F_{p-1} C_{p+q}(X) = C_{p+q}(X^p) / C_{p+q}(X^{p-1})$$

$$= C_{p+q}(X^p, X^{p-1}) \quad \text{complexe singulier relatif.}$$

$\partial_0 : E^0_{p,q} \to E^0_{p,q-1}$ est la différentielle dans $C_*(X^p, X^{p-1})$

donc $E^1_{p,q} = H_{p+q}(X^p, X^{p-1})$ excision

$$= H_p(X^p, X^{p-1}) = H_p^{cell}(X) \quad \text{si } q = 0$$

$$= 0 \quad \text{si } q \neq 0.$$

donc $E^1 : \quad C_0^{cell}(X) \xleftarrow{\partial^1} C_1^{cell}(X) \xleftarrow{\partial^1} C_2^{cell}(X) \leftarrow \cdots$ est formé d'une seule ligne

Rappel : la différentielle dans le complexe cellulaire est le morphisme de connexion du triplet $X^{p-2} \subset X^{p-1} \subset X^p$

$$H_p(X^p, X^{p-1}) \to H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$$

$$C_p^{cell}(X) \xrightarrow{\partial_1} C_{p-1}^{cell}(X)$$

0

donc $E^2 : \quad H_0^{cell}(X) \quad H_1^{cell}(X) \quad H_2^{cell}(X) \quad \cdots$

0

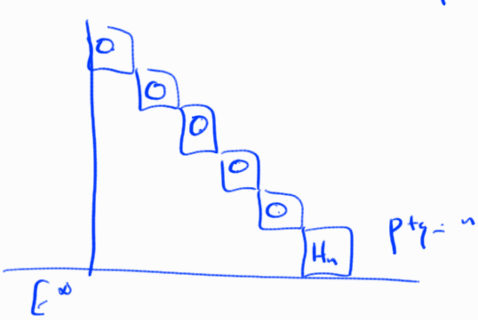
donc $\partial_2 = 0$ $\quad E^3 = E^2$ etc $\quad E^2 = E^\infty$

La graduation induite sur $H_*(X)$ est triviale : son gradué de degré p vaut $\boxed{H_p^{sing}(X) = H_p^{cell}(X)}$

$$E^\infty_{p,q} = E^2_{p,q} = H_p^{cell}(X) \quad \text{si } q = 0 \qquad 0 \text{ sinon.}$$

$$= G_p H_{p+q}^{sing}(X) \qquad \text{si } q \neq 0 \qquad G_p H_{p+q}^{sing}(X) = 0$$

$$G_{n-1} H_n^{sing}(X) = 0 \quad \text{et} \quad G_n H_n^{sing}(X) = H_n^{cell}(X)$$



$G_p H_n(X)$

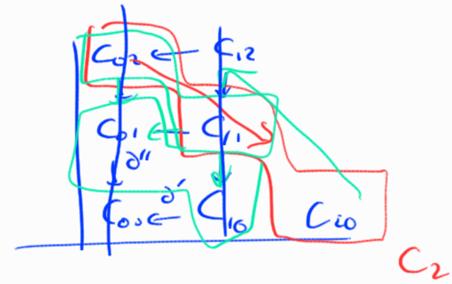
Rq : $\quad H_n(X^n, X^{n-1}) \overset{\text{excision}}{=} H_n(\sqcup e_i^n, \sqcup \partial e_i^n) = \bigoplus H_n(D^n, \partial D^n)$

$\bigsqcup_{i \in I} e_i^n$ cellules de dimension $\qquad = \mathbb{Z}^{(I)}$

Le cas d'un complexe double

Il s'agit d'une famille à deux paramètres $(C_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}}$ munie de deux différentielles $\partial' : C_{p,q} \to C_{p-1,q}$ $\quad \partial'' : C_{p,q} \to C_{p,q-1}$

$\partial'^2 = \partial''^2 = 0 \qquad \partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0$



On définit le complexe "total"

$$C_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q} \qquad \partial : C_n \to C_{n-1}$$
$$\partial = \partial' + \partial''$$

<u>But</u>: calculer l'homologie de C_n à l'aide de filtrations.

$$'F_p C_n = \bigoplus_{\substack{k+l=n \\ k \le p}} C_{kl} \qquad\qquad ''F_p C_n = \bigoplus_{\substack{k+l=n \\ l \le p}} C_{kl}$$

La <u>première filtration</u> donne $'E^0_{pq} = {'F_p} C_{p+q} / {'F_{p-1}} C_{p+q} = \bigoplus_{\substack{k+l=p+q \\ k \le p}} C_{kl} \Big/_{k<p}$

$= C_{p,q}$

La diff. $\partial_0 : {'E^0_{p,q}} \to {'E^0_{p,q-1}}$

$\partial'' : C_{p,q} \to C_{p,q-1}$

$$\begin{array}{l} C_{02} \\ \downarrow \partial'' \\ C_{01} \\ \downarrow \partial'' \\ C_{00} \xleftarrow{\partial'} C_{10} \xleftarrow{\partial'} C_{20} \end{array}$$
E^0

donc $'E^1_{p,q} = H_q(C_{p,*}, \partial'')$

et ∂_1 est le morphisme $'E^1_{p,q} \to {'E^1_{p-1,q}}$

donné par $\partial' : H_q(C_{p,*}, \partial'') \to H_q(C_{p-1,*}, \partial'')$

$$\begin{array}{l} H_1(C_{0,*}, \partial'') \\ H_0(C_{0,*}, \partial'') \xleftarrow{\partial'} H \end{array}$$
E^1

donc $\boxed{'E^2_{p,q} = H_p\left(H_q(C_{p,*}, \partial''), \partial'\right)}$

De la même façon on peut considérer la suite $''F_p C_n$

$''E^0_{p,q} = C_{q,p} \qquad ''E^1_{p,q} = H_p(C_{*,q}, \partial') \qquad ''E^2_{p,q} = H_q\left(H_p(C_{*,q}, \partial'), \partial''\right)$

Si ces suites convergent, elles convergent vers $G_p H_{p+q}(C_n)$ par des filtrations <u>différentes</u> ⚠ le G_p désigne la filtration induite sur $H_{p+q}(C_n)$ par $'F$ ou $''F$

<u>Application</u>: théorème des coefficients universels.

X espace topologique Π un groupe abélien

Il existe toujours une surjection $P_0 \xrightarrow{\varphi} \Pi$ où P_0 est un groupe abélien libre. Le noyau $P_1 = \ker \varphi$ est alors libre.

Cela donne une suite exacte courte $0 \to P_1 \xrightarrow{\psi} P_0 \to \Pi \to 0$

On se donne $C_*(X)$ le complexe singulier de X et on pose

$C_{p,q} = C_p(X) \otimes P_q$

$$
\begin{array}{l|lll}
 & C_0(X)\otimes P_1 \xleftarrow{\partial'} & C_1(X)\otimes P_1 & \leftarrow \cdots \\
 & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \\
 & C_0(X)\otimes P_0 \xleftarrow{\partial'} & C_1(X)\otimes P_0 & \leftarrow \cdots \\
\hline
'E^0 & & &
\end{array}
$$

La différentielle ∂' est la différentielle du complexe singulier $\otimes$ id

La différentielle ∂'' est $\mathrm{id} \otimes \psi$.

$$0 \to P_1 \xrightarrow{\psi} P_0 \to 0 \xrightarrow{\text{homologie}} 0 \to \Pi \to 0$$

$'E^1_{p,q}$ est l'homologie du complexe formé par les colonnes.

On $C_n(X)$ est un groupe abélien libre engendré par les n-simplexes dans X

donc

$$
\begin{array}{l|lll}
 & 0 & 0 & 0 \\
'E^1 & C_0(X)\otimes\Pi \xleftarrow{\partial} & C_1(X)\otimes\Pi \xleftarrow{\partial} & C_2(X)\otimes\Pi \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|llll}
 & 0 & & & \\
'E^2 & H_0(X,\Pi) & H_1(X,\Pi) & H_2(X,\Pi) \xrightarrow{\partial_2} & \cdots \\
\hline
\end{array}
$$

$$'E^\infty_{p,q} = 'E^2_{p,q} = H_p(X,\Pi) \text{ si } q=0, \ 0 \text{ sinon.}$$

Regardons maintenant $''E^0_{p,q} = C_{q,p} = C_q(X)\otimes P_p$

$$
\begin{array}{l|ll}
 & C_2(X)\otimes P_0 & C_2(X)\otimes P_1 \\
 & \downarrow & \\
 & C_1(X)\otimes P_0 & C_1(X)\otimes P_1 \\
 & \partial_1 \downarrow & \\
 & C_0(X)\otimes P_0 & C_0(X)\otimes P_1 \\
\hline
''E^0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|ll}
 & H_2(X)\otimes P_0 & H_2(X)\otimes P_1 \\
 & H_1(X)\otimes P_0 \xleftarrow{\psi} & H_1(X)\otimes P_1 \\
 & H_0(X)\otimes P_0 \xleftarrow{\psi} & H_0(X)\otimes P_1 \\
\hline
''E^1 & &
\end{array}
$$

$n=2$

$$
\begin{array}{l|lll}
 & \boxed{H_2(X)\otimes\Pi} & \mathrm{Tor}(H_2(X),\Pi) & 0 \\
 & H_1(X)\otimes\Pi & \boxed{\mathrm{Tor}(H_1(X),\Pi)} & 0 \\
 & H_0(X)\otimes\Pi & \mathrm{Tor}(H_0(X),\Pi) & \boxed{0} \\
\hline
''E^2 & & &
\end{array}
$$

à savoir $\quad P_1 \quad P_0 \quad \Pi$

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Tor}(B,\Pi) \to \mathrm{Tor}(C,\Pi) \to A\otimes\Pi \to B\otimes\Pi \to C\otimes\Pi \to 0$$

donc la suite spectrale $''E^r$ dégénère en E^2

$$''E^\infty_{p,q} = ''E^2_{p,q}$$

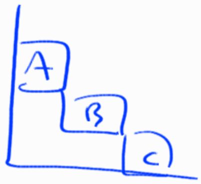
Les deux suites convergent vers l'homologie du complexe total.

$$H_n(C_*) = 'E^\infty_{n,0} = H_n(X,M)$$

En regardant la deuxième on trouve deux termes qui donnent la suite exacte courte

$$\boxed{0 \to H_n(X) \otimes \Pi \to H_n(X,\Pi) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X),\Pi) \to 0}$$

$p+q=2$



$$A \subset H_2(C_*)$$

$$0 \to D \to H_2(C_*) \to C \to 0$$

$$0 \to A \to D \to B \to 0$$

Essayons de généraliser la suite des coeffs universels au cas des coefficients tordus. On commence par un préliminaire algébrique :

Soit $C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \cdots \leftarrow C_n \leftarrow$ un complexes de A_modules à gauche libres (penser à $A = \mathbb{Z}[\pi]$).

On se donne un $\mathbb{Z}[\pi]$_module Π.

<u>Question</u> : peut-on calculer $H_*(C_* \otimes_A \Pi)$ à partir de $H_*(C_*)$ et de Π ?

La procédure est la même que précédemment : on commence par se donner une résolution libre $\cdots \to P_n \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to \Pi \to 0$

le problème est que cette résolution est en général infinie.

On forme un complexe double en posant $C_{p,q} = C_p \otimes_A P_q$

On regarde les deux filtrations associés.

$'E^0_{p,q} = C_{p,q}$ $\quad \partial_0 = \partial''$

comme précédemment $\quad 'E^1_{p,q} = H_q(C_{p,*}, \partial'') = C_p \otimes_A \Pi$ si $q=0$, 0 sinon

donc $\quad 'E^2_{p,q} = H_p(C_* \otimes_A \Pi)$ si $q=0$, 0 sinon.

on a donc bien $\quad H_n(\text{complexe total}) = H_n(C_* \otimes_A \Pi)$.

Regardons l'autre suite $\quad ''E^1_{p,q} = H_q(C_{*,p}, \partial') = H_q(C) \otimes_A P_p$

$$''E^2_{p,q} \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Tor}^p(H_q(C_*), \Pi)$$

<u>Conclusion</u> : il y a donc une suite spectrale dont la 2ème page est

$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}^p(H_q(C_*), \Pi)$ qui, si elle converge, converge vers $H_*(C_* \otimes \Pi)$

Lemme : Si C_* est un complexe de A-modules libres dont l'homologie est libre comme A-module alors

$$E^2_{p,q} = H_q(C_*) \otimes \Pi \quad \text{si } p=0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

et donc $\boxed{H_*(C_* \otimes \Lambda) = H_*(C_*) \otimes \Pi}$

Application : montrons que l'homologie tordue se calcule bien grâce au complexe cellulaire tordu.

Soit X un CW-complexe $f : X \xrightarrow{\Delta_n,\,\sigma} B$ et Π un $\mathbb{Z}[\pi]$-module

$\pi = \pi_1(B, b_0)$

On se donne $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset X$ la filtration par squelettes

cela définit des sous-complexes $C_*(X^n, B) \subset C_*(X, B)$

ie on pose $F_p C_q = C_q(X^p, B) \underset{\pi}{\otimes} M$

cela définit un complexe filtré.

on regarde $E^0_{p,q} = F_p C_{p+q} / F_{p-1} C_{p+q} = C_{p+q}(X^p, X^{p-1}; B) \otimes M$

on observe que $C_*(X^p, X^{p-1}; B)$ est un $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre.

on a $E^1_{p,q} = H_{p+q}(X^p, X^{p-1}; B) \otimes \Pi = \underbrace{H_p(X^p, X^{p-1}; B) \otimes \Pi}_{\text{utilisé le lemme}} = C_p^{cell}(X, B) \otimes \Pi$ si $q=0$, 0 sinon.

La différentielle $\partial_1 : E^1_{p,q} \to E^1_{p-1,q}$ est la différentielle cellulaire. $(q=0)$

le terme $E^2_{p,q} = H_p^{cell}(X, \Pi)$ si $q=0$, 0 sinon.

$$\Rightarrow \boxed{H_p^{cell}(X, \Pi) = H_p(X, \Pi)}$$