UPMC - MM059 - EXAMEN - 15/03/2014

3 heures. Les téléphones et les calculatrices sont interdits. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation.

Exercice 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ connexe par arcs et x_0 un élément de U. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) Il existe une application continue $\phi : U \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$ on ait $\phi(z)^2 = z$.

(ii) Pour tout lacet $\gamma : S^1 \to U$ l'indice de γ autour de 0 (noté $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$) est pair.

(iii) L'application $i_* : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, x_0) \simeq \mathbb{Z}$ induite par l'inclusion $i : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vérifie $i_*\pi_1(U, x_0) \subset 2\mathbb{Z}$.

Note : Ces assertions impliquent en fait que l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$ *est nul mais on ne cherchera pas à le démontrer ici.*

Exercice 2. Soit $M = S^1 \times S^1 \times [0,1]/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x, y, 0) \sim (x, xy, 1)$ pour tout $x, y \in S^1$. On munit M de la topologie quotient et on note x_0 la classe de $(1, 1, 0)$.

(1) Soit $T : S^1 \times S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$ l'application définie par
$$T(x, y, t) = (x, xy, t + 1)$$
Montrer que T engendre une action de $\mathbb{Z}$ libre et proprement discontinue et que M s'identifie au quotient $(S^1 \times S^1 \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$.

(2) Montrer qu'il existe une suite exacte
$$0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{u} \pi_1(M, x_0) \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0$$
et identifier explicitement un élément γ de $\pi_1(M, x_0)$ tel que $v(\gamma) = 1$.

(3) On pose $H_{\mathbb{R}} = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ et on définit de la même façon $H_{\mathbb{Z}}$. Montrer que l'application $F : H_{\mathbb{R}} \to S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$ définie par
$$F(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = (e^{2i\pi a}, e^{2i\pi b}, c)$$
passe au quotient en un homéomorphisme $f : H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}} \to M$.

(4) Montrer que $H_{\mathbb{R}}$ est contractile et en déduire l'isomorphisme $\pi_1(M, x_0) \simeq H_{\mathbb{Z}}$.

(5) Existe-t-il un revêtement de M homéomorphe au tore $S^1 \times S^1 \times S^1$?

Indication : montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *commutent si et seulement si* $\det \begin{pmatrix} a & a' \\ c & c' \end{pmatrix} = 0$.

Exercice 3. On pose $\mathcal{X} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ tels que $z_1 \neq z_2, z_2 \neq z_3, z_1 \neq z_3\}$ que l'on munit de la topologie induite et $\mathcal{T} = \{T \subset \mathbb{C}, \mathrm{card}(T) = 3\}$. On définit $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ par $\pi(z_1, z_2, z_3) = \{z_1, z_2, z_3\}$ et on munit $\mathcal{T}$ de la topologie quotient. On pose $x_0 = \{1, \omega, \omega^{-1}\} \in \mathcal{T}$ où $\omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(1) Montrer que π est un revêtement galoisien de groupe $\mathfrak{S}_3$.

(2) Montrer que pour $i = 1, 2, 3$, l'application $\theta_i : \mathcal{X} \to [0, \pi]$ qui à (z_1, z_2, z_3) associe l'angle du triangle $z_1 z_2 z_3$ au sommet z_i est continue (on pourra utiliser la formule d'Al Kachi). En déduire que l'application $\max(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ passe au quotient en une application continue $\theta_{\max} : \mathcal{T} \to [0, \pi]$.

(3) Soit $U = \theta_{\max}^{-1}(]\frac{\pi}{2}, \pi])$ et $E = \{\{-z, 0, z\}, z \in S^1\}$. Montrer que l'inclusion $i : E \to U$ est une équivalence d'homotopie.

(4) Soit $V = \theta_{\max}^{-1}([0, \frac{2\pi}{3}[)$ et F le sous-ensemble de $\mathcal{T}$ formé des triangles équilatéraux inscrits dans le cercle unité. Expliquer sans formaliser pourquoi l'inclusion $j : F \to V$ est une équivalence d'homotopie. On pourra avoir recours au point de Torricelli. [1]

(5) Soit $G = \{\{z, \omega z, \omega^{-1} z\}, z \in S^1\}$. Expliquer sans formaliser pourquoi l'inclusion $k : G \to U \cap V$ est une équivalence d'homotopie.

(6) Montrer que chacun des trois espaces E, F et G est homéomorphe à un cercle.

(7) Expliciter les morphismes $i_* : \pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(U, x_0)$ et $j_* : \pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(V, x_0)$.

(8) Montrer que le groupe $G = \pi_1(\mathcal{T}, x_0)$ a la présentation suivante :

$$\{x, y | x^2 = y^3\}$$

(9) Construire un morphisme surjectif $G \to \mathfrak{S}_3$. En déduire que G n'est pas commutatif.

(10) Construire un morphisme surjectif $G \to \mathbb{Z}$. En déduire que G est infini.

1. Dans un triangle ABC dont les angles sont inférieurs à $2\pi/3$, il s'agit du point I qui minimise la distance $IA + IB + IC$. Il vérifie que les angles $\widehat{AIB}, \widehat{BIC}, \widehat{CIA}$ font tous $2\pi/3$.