Examen partiel

Revêtements et groupe fondamental

21 février 2014

Correction

Exercice 1 (Théorème de d'Alembert-Gauss)

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme unitaire à coefficients complexes, de degré $n \geq 1$. On veut montrer que P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Par l'absurde, on suppose que ce n'est pas le cas.

Pour $t \geq 0$, et $z \in \mathbb{S}^1$, on pose :

$$h_t(z) = \frac{P(tz)}{|P(tz)|} \in \mathbb{S}^1\,,$$

et on pose $f_n(z) = z^n \in \mathbb{S}^1$.

1) Calculer le degré de l'application h_0.

2) Montrer que si $t > 0$ est assez grand, les applications h_t et $f_n \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ont même degré.

3) Conclure.

Correction

1) L'application $h_0 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ est constante, donc elle est de degré nul.

2) Pour tout $t > 0$ et z de module 1, on a

$$P(tz) = t^n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k z^k = t^n z^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{t^{n-k} z^{n-k}}\right).$$

Il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{S}^1$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{t_0^{n-k} z^{n-k}}\right| < 1.$$

(En effet, il suffit de prendre $t_0 > \max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$).

Pour $s \in [0,1]$, on peut donc poser

$$h_{t_0,s}(z) = z^n \cdot \frac{1 + s \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{t_0^{n-k} z^{n-k}}}{\left|1 + s \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{t_0^{n-k} z^{n-k}}\right|}.$$

L'application $(s,z)\mapsto h_{t_0,s}(z)$ définit alors une homotopie entre h_{t_0} et f_n, parmi les applications continues de $\mathbb{S}^1$ dans lui-même. Or, le degré des applications $\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ est invariant par homotopie (cf cours). Donc h_{t_0} et f_n ont même degré.

2) L'application f_n est de degré n (cf cours). Donc h_{t_0} est de degré n. Ensuite, l'application $(s,z)\mapsto h_s(z)$ définit une homotopie entre h_0 et h_{t_0}. Donc h_0 et h_{t_0} ont le même degré.

Finalement h_0 est de degré n (on vient de le montrer), mais aussi de degré 0 (question 1). Donc $n=0$, ce qui est une contradiction.

Exercice 2

1) Déterminer le groupe fondamental du complémentaire X, dans $\mathbb{C}^2$, de la réunion de deux droites (complexes) concourantes (distinctes).

(*Indication. On pourra commencer par montrer que X est homéomorphe à* $\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\mid xy\neq 0\}$).

2) On note

$$U_{\mathbb{R}}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\neq 0\right\}$$
$$\text{et } U_{\mathbb{C}}=\left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\mid x^2+y^2\neq 0\right\},$$

et on note $i\colon U_{\mathbb{R}}\to U_{\mathbb{C}}$ l'inclusion (canonique).

Calculer les groupes fondamentaux $\pi_1(U_{\mathbb{R}},(1,0))$ et $\pi_1(U_{\mathbb{C}},(1,0))$, et décrire le morphisme i_*.

Correction

1) En un mot : quitte à appliquer un changement de repère, je peux envoyer n'importe quelle paire de droites, distinctes mais concourantes, sur n'importe quelle autre.

Plus précisément : soient $D_1,D_2\subset\mathbb{C}^2$ nos deux droites complexes, et $a\in D_1\cap D_2$. La translation de vecteur $-a$ définit un homéomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dans lui-même, donc il se restreint en un homéomorphisme de $\mathbb{C}^2\smallsetminus(D_1\cup D_2)$ sur son image. Cette image est le complémentaire de la réunion de deux droites distinctes, qui passent par l'origine. Ainsi, on peut supposer que D_1 et D_2 s'intersectent en 0. Maintenant, si $e_1\in D_1\smallsetminus\{0\}$ et $e_2\in D_2\smallsetminus\{0\}$, alors (e_1,e_2) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ (sinon on aurait $D_1=D_2$). Donc il existe $A\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A\cdot e_1={}^t(1,0)$ et $A\cdot e_2={}^t(0,1)$. Maintenant, A définit un homéomorphisme de $\mathbb{C}^2$, qui envoie X sur $\mathbb{C}^2$ privé de la réunion $\mathbb{C}\cdot{}^t(1,0)\cup\mathbb{C}\cdot{}^t(0,1)$. Cette réunion de deux droites est exactement l'ensemble

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2|x=0\text{ ou }y=0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2|xy=0\right\}.$$

Ainsi,

$$X \simeq \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | xy \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\} = (\mathbb{C}^*)^2 .$$

L'espace X se rétracte donc par déformation sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (en envoyant chacune des deux coordonnées x, y sur $\frac{x}{|x|}$, $\frac{y}{|y|}$), et son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

2) • $U_{\mathbb{R}}$ s'identifie à $\mathbb{C}^*$. Son groupe fondamental basé en 1 est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et est engendré par la classe du lacet $\begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{C}^* \\ \theta & \mapsto e^{2i\pi\theta} \end{cases}$, autrement dit : $\begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ \theta & \mapsto (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)) \end{cases}$.

• $U_{\mathbb{C}} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | (x+iy)(x-iy) \neq 0\}$. C'est le complémentaire de la réunion de deux droites complexes de $\mathbb{C}^2$: l'une a pour équation $x + iy = 0$ et l'autre pour équation $x - iy = 0$. Comme mentionné à la question 1, l'application $U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $(x,y) \mapsto \left(\frac{x+iy}{|x+iy|}, \frac{x-iy}{|x-iy|}\right)$ est une équivalence d'homotopie.

Le lacet $\begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ \theta & \mapsto (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)) \end{cases}$ définit, dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, le lacet $\theta \mapsto \left(e^{2i\pi\theta}, e^{-2i\pi\theta}\right)$.

Avec ces notations notre morphisme i_* s'identifie au morphisme $\begin{matrix} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ k \mapsto (k, -k) \end{matrix}$.

Bien sûr ceci dépend de choix : celui des points base, celui de la manière d'identifier le groupe fondamental de X à $\mathbb{Z}^2$... Ce qui ne dépend d'aucun choix, c'est que le morphisme i_* est un morphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui envoie 1 sur un couple $(a,b) \neq (0,0)$ avec a et b premiers entre eux.

Exercice 3

On note $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ qui préservent l'orientation. On note $\Gamma < G$ le groupe des isométries positives qui préservent globalement la partie $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, et on note Γ' son sous-groupe engendré par les translations de vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$.

1) Identifier G au sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ des matrices sous la forme $A = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{R} & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

où $R \in \mathrm{SO}(2)$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

On munit maintenant G de la topologie induite par $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Montrer que Γ et Γ' sont des sous-groupes discrets de G.

2) Vérifier que G est connexe par arcs et déterminer son groupe fondamental. On exhibera un générateur de $\pi_1(G, \mathrm{Id})$.

3) On s'intéresse à l'espace $M = G/\Gamma$. Montrer que son groupe fondamental s'inscrit dans

une suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z} \to \pi_1(G/\Gamma) \to \Gamma \to 0.$$

On note $\psi\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(G/\Gamma)$ et $\varphi\colon \pi_1(G/\Gamma) \to \Gamma$ les morphismes suggérés ci-dessus. Montrer que pour tout élément $r \in \Gamma$ de torsion, tout élément $\tilde{r} \in \pi_1(G/\Gamma)$ tel que $\varphi(\tilde{r}) = r$ est d'ordre infini.

(*Indication : on pourra commencer par identifier géométriquement les éléments de torsion dans* Γ*, puis vérifier que si* $r \in \Gamma$ *est d'ordre* k*, il existe un tel* $\tilde{r}$*, que l'on décrira, tel que* $\tilde{r}^k = \psi(1)$).

En déduire que $\pi_1(G/\Gamma)$ est sans torsion.

4) Exhiber un revêtement du tore $T^3 = (\mathbb{S}^1)^3$ sur M, galoisien, à quatre feuillets.

5) (*À faire à la maison, ce week-end, mais pas pendant le partiel !*) Montrer que $\pi_1(G/\Gamma)$ admet la présentation suivante :

$$\pi_1(G/\Gamma) = \left\langle a, b, c \mid [a,b] = 1,\ cac^{-1} = b,\ cbc^{-1} = a^{-1} \right\rangle.$$

Correction

1) Notons $H \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices sous cette forme. On vérifie très facilement que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Si $A = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{R} & a \\ & & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $A \cdot X = \begin{pmatrix} R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, H stabilise le plan affine P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 1$.

De plus, si on munit P de la métrique usuelle, induite par $\mathbb{R}^3$, alors H agit sur ce plan par isométries. Ces isométries se composent de rotations et de translations : donc cette action préserve l'orientation du plan. On a donc ainsi un morphisme $H \to G$.

Ce morphisme est injectif, parce que toute isométrie du plan est une composée d'une rotation vectorielle suivie d'une translation (cf collège / lycée ?). Il est injectif, puisque si $R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour tous x, y alors $a = b = 0$ (prendre $x = y = 0$), puis $R = I_2$. Ainsi, on a bien une identification entre G et H.

Maintenant, si une matrice A comme ci-dessus envoie $\mathbb{Z}^2$ dans lui-même (à partir de maintenant, on identifiera, sans le dire, $\mathbb{Z}^2$ avec la partie de P formée des vecteurs de la forme

$\begin{pmatrix} n \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$), alors $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, autrement dit, $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors l'élément $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de H préserve encore $\mathbb{Z}^2$, donc $T \cdot A$ préserve $\mathbb{Z}^2$. On en déduit que la rotation vectorielle R préserve aussi $\mathbb{Z}^2$, puis que la matrice R (en tant que matrice 2×2) est à coefficients entiers.

Finalement, tous les éléments de Γ sont des matrices à coefficients entiers. Réciproquement, si $A \in H$ est à coefficients entiers, il est bien évident que $A \in \Gamma$. Ainsi, $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \cap H$. Or la topologie usuelle de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ est la topologie induite de celle de $M_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$, et $\mathbb{Z}^9 \subset \mathbb{R}^9$ est discret... donc Γ et Γ' sont bien des sous-groupes discrets de G.

2) On a identifié G à l'ensemble des matrices sous la forme $A = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{R} & a \\ & & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathrm{SO}(2)$. Cela définit naturellement un homéomorphisme (qui n'est pas un morphisme!!!) entre G et $\mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}^2$.

Donc G est connexe par arcs, et $\pi_1(G, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

Un générateur de ce groupe est le chemin $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus généralement, on obtient un générateur de ce groupe en faisant un tour complet autour d'un point (ici $(0, 0)$).

3) Le groupe G est localement compact, séparé. Son sous-groupe Γ est discret. Donc l'action de Γ sur G est libre, proprement discontinue, et la surjection canonique $G \to G/\gamma$ est un revêtement, galoisien, de groupe d'automorphismes Γ.

Un tel revêtement donne lieu (cf cours) à une suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(G) \longrightarrow \pi_1(G/\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G \to G/\Gamma) \longrightarrow 1. \tag{1}$$

On vient de dire que le groupe du revêtement, $\mathrm{Aut}(G \to G/\Gamma)$, s'identifie à Γ. On a vu à la question 2 que $\pi_1(G) \simeq \mathbb{Z}$. Donc on a une suite exacte :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \pi_1(G/\Gamma) \to \Gamma \to 1.$$

Souvenons-nous qu'un élément de G est soit une rotation, soit une translation. C'est, *a fortiori*, le cas des éléments de Γ. Donc tout élément $r \neq 1$ d'ordre fini, dans Γ, est une rotation (disons, d'angle θ_0) autour d'un point (x_0, y_0) (attention, celui-ci n'est pas forcément à coordonnées entières). Plus généralement, notons $R_{\theta,(x_0,y_0)}$ la rotation d'angle (orienté) θ en ce point.

Le chemin γ: $\begin{cases} [0,1] \to G \\ t \mapsto R_{t\theta_0,(x_0,y_0)} \end{cases}$ joint l'identité à r dans G, donc il définit un lacet en [1] dans G/Γ, et par construction de la suite exacte (1), on a $\varphi([\gamma]) = r$ (on note $[\gamma]$ l'élément de $\pi_1(G/\Gamma)$ défini par γ).

Comme r est d'ordre fini, on a $\theta_0 \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, puisque r préserve $\mathbb{Z}^2$. Si par exemple, $\theta_0 = \pi/2$, alors la concaténation $[\gamma]^4$ est un lacet dans G/Γ, qui se relève à un lacet dans G qui consiste à faire un tour complet, dans le sens trigonométrique, autour du point (x_0, y_0) : c'est notre générateur de $\pi_1(G)$. Autrement dit, $[\gamma]^4 = \psi(1)$.

Comme la suite (1) est exacte, tout autre relevé $\tilde{r}$ de r à $\pi_1(G/\Gamma)$ est de la forme : $\tilde{r} = [\gamma] + \psi(k)$, et alors $(\tilde{r})^4 = \psi(1 + 4k)$. Et $1 + 4k \neq 0$, quel que soit k : donc $(\tilde{r})^4$ est d'ordre infini (puisque ψ est injective), donc $\tilde{r}$ l'est aussi.

Le même raisonnement s'applique pour $\theta_0 = \pi$ (en changeant des 4 en 2). En revanche, pour $\theta_0 = 3\pi/2$, le choix naturel du relevé γ vérifie cette fois-ci $\gamma^4 = \psi(-1)$: il faut changer le 1 en -1 (il s'agit d'une erreur de l'indication !), mais le raisonnement reste inchangé.

Maintenant il reste à vérifier que $\pi_1(G/\Gamma)$ est sans torsion. Soit donc $\gamma \in \pi_1(G/\Gamma)$ un élément non trivial, d'ordre fini, k. Alors $\varphi(\gamma^k) = 1 \in \Gamma$, donc $(\varphi(\gamma))^k = 1$.

• Si $\varphi(\gamma) = 1$, alors, comme la suite est exacte, et que $\gamma \neq 1$, γ est l'image par ψ d'un élément $n \neq 0$ dans $\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}$ est sans torsion, et que ψ est injective, on en déduit que γ est d'ordre infini dans $\pi_1(G/\Gamma)$.

• Si $\varphi(\gamma) \neq 1$, alors $\varphi(\gamma)$ est un élément non trivial, de torsion, dans Γ : d'après ce qu'on vient de faire, γ est d'ordre infini dans $\pi_1(G/\Gamma)$.

4) Γ' est un sous-groupe distingué, d'indice 4, de Γ. Donc $G/\Gamma' \longrightarrow G/\Gamma$ est un revêtement galoisien, à 4 feuillets, de groupe de revêtement $\Gamma/\Gamma' \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

5) Je vous laisse encore y réflechir un peu !