Feuille de TD 1 de Revêtements et groupe Fondamental
Logarithme, théorème du relèvement et rappels de topologie

Exercice 1. (**Logarithme complexe**)

1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et f une fonction holomorphe sur U telle que pour tout z dans U on a $f'(z) = 1/z$ et telle qu'il existe z_0 dans U avec $\exp(f(z_0)) = z_0$.
   (a) Montrer que f est une détermination (holomorphe donc) du logarithme, c'est-à-dire que pour tout z dans U on a $\exp(f(z)) = z$.
   (b) Peut on trouver une telle fonction pour $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?
2. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ sur lequel il existe une détermination du logarithme. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que
$$\forall z \in U, \quad f(z)^n = z.$$
   Combien existe-t-il de telles fonctions?
3. On considère les deux séries
$$f_1(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}, \quad f_2(z) = i\pi + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$$
   Montrer qu'il existe un ouvert connexe contenant les disques ouverts de rayon 1 et de centre 0 et 2 ainsi qu'une fonction g analytique sur U qui coincide respectivement avec f_1 et f_2 sur chacun de ces deux disques.

Exercice 2. (**groupes et topologie**) Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G (muni de la topologie induite).

1. Montrer que si H est ouvert (dans G), alors H est fermé.
2. Montrer que G est séparé si et seulement le singleton $\{1\}$ est fermé dans G.
3. Montrer que si G est connexe, alors il est engendré par tout voisinage non-vide de 1.
4. Montrer que la composante connexe G_0 de 1 est un sous-groupe fermé et distingué[1].

Exercice 3. (**Relèvement des angles**) Soit $P(S^1) := \{f : [0,1] \to S^1, f \text{ continue}\}$ l'ensemble des applications continues de l'intervalle dans le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$ et $P(\mathbb{R}) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ continue}\}$ l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle dans $\mathbb{R}$. On munit $P(\mathbb{R})$ et $P(S^1)$ de la topologie de la convergence uniforme.

1. Montrer que les structures de groupe naturelles de $(S^1; \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +)$ font de $P(S^1)$ et $P(\mathbb{R})$ des groupes topologiques (où la multiplication est ponctuelle).
2. Montrer que l'exponentielle $t \mapsto \exp(it)$ induit un morphisme de groupes topologiques $P(\mathbb{R}) \xrightarrow{e} P(S^1)$ dont l'image est ouverte.
3. Montrer que $P(S^1)$ est connexe et en déduire le théorème de relèvement des angles.

[1] on dit aussi normal, surtout en anglais

Exercice 4. (**Problème de croisement**) Peut on joindre les coins opposés d'un carré par deux chemins continus (restant en dehors du carré) qui ne se rencontrent pas ?
Mathèmatiquement, on considérera le carré $C = [-1,1] \times [-1,1]$ et $f, g : [0,1] \to C$ deux applications continues $f, g : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \mathring{C}$ telles que $f(0) = (-1,-1), f(1) = (1,1), g(0) = (-1,1), g(1) = (1,-1)$. (Indication: montrer par l'absurde qu'il existe $s, t \in [0,1]$ tels que $f(s) = g(t)$ en considérant l'indice par rapport à la courbe image de f convenablement refermée.)

Exercice 5. (**Théorème de Borsuk-Ulam en dimension 2**)
Ce théorème se formule souvent sous la forme:à tout moment, il existe deux points antipodaux sur la terre sur lesquels la température et la pression sont les mêmes.
Moins prosaïquement, Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ une application continue. Montrer qu'il existe $(x,y,z) \in S^2$ tel que $f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$. (*Indication:* raisonner par l'absurde et considérer l'application $(x,y,z) \mapsto \frac{f(-x,-y,-z)-f(x,y,z)}{||f(-x,-y,-z)-f(x,y,z)||}$).

Exercice 6. (Additivité du degré)
Soient $f, g : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ deux applications continues telles que $f(1) = g(1)$. On définit deux "produits" de f et g:

- $fg : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est défini par $(fg)(t) = f(t)g(t)$ pour tout $t \in S^1$.
- $f \star g(t) = f(t^2)$ pour $\operatorname{Im} t \geq 0$ et $f \star g(t) = g(t^2)$ pour $\operatorname{Im} t \leq 0$.

1. Montrer que fg et $f \star g$ sont continues, homotopes mais distinctes en général.

2. Montrer que $\deg(fg) = \deg(f \star g) = \deg(f) + \deg(g)$.

Exercice 7. (**Calcul du degré)**) Soit $f : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une application de classe C^1 et notons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'application définie par $g(\theta) = f(\exp(i\theta))$. Soit D le demi axe réel positif, c'est-à-dire la droite $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0\}$. On suppose que pour tout $t \in S^1$ tel que $f(t) \in D$, f soit *transverse à* D à savoir que pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(i\theta) = t$ on a $\operatorname{Im} g'(\theta) \neq 0$. On dira que f coupe D positivement ou négativement en t suivant le signe[2] de $\operatorname{Im} g'(\theta)$ que l'on notera $\operatorname{sign}_t f$.

1. Montrer que l'ensemble $f^{-1}(D)$ est fini.

2. Soit t_1 et t_2 deux éléments de $f^{-1}(D)$ consécutifs sur le cercle. Notons $g_{t_1,t_2} : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un chemin fermé qui va de 1 à $f(t_1)$ dans D puis parcourt f entre t_1 et t_2 et revient à 1 dans D. Calculer son degré.

3. En déduire la formule
$$\deg f = \sum_{t \in f^{-1}(D)} \operatorname{sign}_t f.$$

[2]autrement dit selon que D coupe la courbe suivant le sens trigonométrique ou non