

## Feuille de TD 2 de Revêtements et groupe Fondamental : constructions d'espaces topologiques, un peu d'homotopie

**Exercice 1.** (*Topologie quotient et séparation*) Soit  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . On note  $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  l'application canonique. Pour  $S \subset X$  on appelle *saturé de  $S$*  le sous-ensemble  $p^{-1}(p(S)) = \{y \in X, \exists x \in X, x\mathcal{R}y\}$ . On dira que  $\mathcal{R}$  est ouverte si le saturé de tout ouvert est ouvert.

1. Montrer qu'il existe un unique (à homéomorphisme près) espace topologique  $\tilde{X}$  et application continue  $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$ , constante sur chaque classe d'équivalence de  $\mathcal{R}$ , tels que pour toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  qui est constante sur chaque classe d'équivalence de  $\mathcal{R}$ , il existe une unique application continue  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow Y$  qui relève  $f$ , c'est à dire telle que  $f = \tilde{f} \circ \pi$ . Décrire explicitement cette topologie. A quelle condition une application  $g : \tilde{X} \rightarrow Z$  est-elle continue? Montrer que si  $f$  est ouverte,  $\tilde{f}$  est ouverte.
2. Montrer que si  $X$  est connexe alors  $\tilde{X}$  est connexe. Même question avec connexe par arcs.
3. Montrer que si le graphe  $\mathcal{R} = \{(x, y), x\mathcal{R}y\} \subset X \times X$  est fermé et  $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  est ouverte, alors  $X/\mathcal{R}$  est séparé.
4. Donner un exemple d'espace séparé  $X$  et de relation  $\mathcal{R}$  tels que  $X/\mathcal{R}$  soit muni de la topologie grossière. Donner un exemple d'espace non-séparé tel que  $X/\mathcal{R}$  soit séparé.
5. On suppose maintenant  $X$  compact (en particulier séparé). Montrer que si le graphe de  $\mathcal{R}$  est fermé, alors  $X/\mathcal{R}$  est compact (en particulier séparé).
6. Montrer que le quotient de  $\mathbb{R}^2$  par la relation  $(x, y) \sim (2x, 2y)$  n'est pas séparé tandis que le quotient de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par la même relation l'est.

**Exercice 2.** (*cônes, espaces des chemins, recollements . . .*) Soit  $X$  un espace topologique et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue.

1. Le **cône sur  $X$**  est l'espace topologique quotient  $C(X) := (X \times [0, 1]) / ((x, 1) \sim (y, 1))$ .
  - (a) Montrer que  $X$  s'identifie<sup>1</sup> à un sous-espace fermé de  $C(X)$  et qu'il existe une application naturelle  $C(f) : C(X) \rightarrow C(Y)$  induite par  $f$ .
  - (b) Montrer que  $C(X)$  est *contractile*.
  - (c) Montrer que si  $X$  est séparé,  $C(X)$  est séparé.
2. Soit  $X, Y$  deux espaces topologiques,  $A$  une partie non-vide de  $X$  et  $f : A \rightarrow Y$ , une application continue. Le **recollement de  $X$  sur  $Y$  par  $f$**  est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y := (X \amalg Y) / (x \sim f(x), x \in A).$$

- (a) Que peut on dire si il existe deux applications continues  $g : X \rightarrow Z, h : Y \rightarrow Z$  qui vérifie  $g(a) = h \circ f(a)$  pour tout  $a \in A$ ? Montrer que si  $Z \subset X$  est un sous-espace non-vide de  $X$ , l'espace quotient  $X/Z$  s'identifie à un recollement.
- (b) Montrer que  $X \cup_f Y$  est connexe (resp. par arcs) si  $X$  et  $Y$  sont connexes (resp. par arcs).
- (c) Montrer que si  $A$  est fermé, alors  $Y$  s'identifie à un sous-espace de  $X \cup_f Y$ . Si de plus  $X, Y$  sont compacts, montrer que  $X \cup_f Y$  est compact. En particulier si  $F$  est un fermé d'un compact  $X$ ,  $X/F$  est compact.

---

1. c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme entre  $X$  et un sous-espace de  $C(X)$ .

3. Le **cylindre de  $f$**  est le recollement  $Cyl(f) := X \times [0, 1] \cup_{f \times \{0\}} Y$  où  $f \times \{0\}$  est donné par  $f \times \{0\} : X \times \{0\} \cong X \xrightarrow{f} Y$ . Le **cône de  $f$**  est le recollement  $C(f) := C(X) \cup_{f \times \{0\}} Y$ . Montrer que si  $\psi : Y \rightarrow Y'$  est une homotopie alors  $Cyl(f)$  et  $C(f)$  sont respectivement homotopes à  $Cyl(\psi \circ f)$  et  $C(\psi \circ f)$ .
4. Soit  $x \in X$  un point de  $X$ . On note  $PX = \{f : [0, 1] \rightarrow X, f(0) = x\}$  l'**espace des chemins continus** (issus de  $x$ ) que l'on munit de la topologie engendrée par les sous-ensembles  $W(K, V) = \{f \in PX, f(K) \in V\}$  où  $K$  parcourt les compacts de  $[0, 1]$  et  $V$  les ouverts de  $X$ . Montrer que  $PX$  est contractile.

**Exercice 3.** (*Le bonnet d'âne*) Soit  $T$  un triangle dans  $\mathbb{R}^2$  (avec son intérieur) et notons  $p, q, r$  ses sommets. On appelle bonnet d'âne le triangle dont on a identifié les arêtes de la façon suivante :  $[p, q]$  avec  $[q, r]$  et  $[p, q]$  avec  $[p, r]$ . Montrer que le bonnet d'âne est un espace contractile (en l'identifiant au cône d'une application du cercle dans lui-même).

**Exercice 4.** (*Compactifié d'Alexandroff*) Soit  $X$  un espace topologique localement compact. On note  $\widehat{X}$  l'espace  $X$  auquel on adjoint un point noté  $\infty$ .

1. Montrer que  $\widehat{X}$  possède une unique topologie telle que
  - la topologie induite sur  $X$  soit la topologie de  $X$
  - les voisinages ouverts de  $\infty$  sont les ensembles de la forme  $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$  pour  $K \subset X$  compact.
 Démontrer que  $\widehat{X}$  est compact.
2. Montrer que  $\widehat{\mathbb{R}^n}$  est homéomorphe à  $S^n$  (Considérer la projection stéréographique).
3. Identifier les espaces  $\widehat{\mathbb{C}^*}$  et  $\widehat{M}$  où  $M$  est la bande de Möbius définie par  $M = \mathbb{R}^2 / (x, y) \sim (x + 1, -y)$ .

**Exercice 5.** (*boucles, bouquet de cercles...*) On considère les espaces topologiques quotients  $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{R}$  par le sous-espace  $\mathbb{Z}$  et

$$B = S^1 / (\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n), n \in \mathbb{N}^*\}),$$

ainsi que les sous-espaces du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  donné par la réunion  $R_1$  des cercles de rayon  $n \in \mathbb{N}$  et tangents en  $(0, 0)$  à l'axe  $y = 0$ , la réunion  $R_2$  des cercles de rayon  $1/n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et tangents en  $(0, 0)$  à l'axe  $x = 0$  et enfin l'espace  $\bigvee_{\mathbb{Z}} S^1$  donné par le recollement de  $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$  sur le point  $Y = \{pt\}$  par l'unique application  $f : F \rightarrow \{pt\}$  où  $F$  est une réunion de points (on choisit exactement un point par cercle). Dire lesquels parmi ces espaces sont homéomorphes entre eux.

**Exercice 6.** *Un collage classique* Montrer que  $S^3$  est obtenue en recollant deux "tores pleins"  $D^2 \times S^1$  au moyen de l'application identique

$$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1 \xrightarrow{\text{Id}} S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2.$$

*Indication :* On identifiera  $S^3$  au sous-ensemble de  $\mathbb{C}^2$  défini par l'équation  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$  et les tores pleins aux sous-ensembles définis par  $|z_1| \leq |z_2|$  et  $|z_1| \geq |z_2|$ .

**Exercice 7.** *Configurations de 3 points distincts dans  $\mathbb{C}$*

1. Montrer que  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  se rétracte par déformation sur l'ensemble  $X$  formé de la réunion des cercles de centre 0 et 1 et de rayon  $1/2$ .
2. Montrer que  $C_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 \neq z_2\}$  se rétracte par déformation sur  $S^1$  identifié à l'ensemble des couples  $(0, u)$  pour  $u \in S^1$ .
3. Montrer que  $C_3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \text{distincts}\}$  se rétracte par déformation sur  $S^1 \times X$  identifié à l'ensemble des triplets  $(0, u, uv)$  pour  $u \in S^1$  et  $v \in X$ .

---

2. on l'appelle parfois espace des boucles hawaiennes