# Feuille de TD 4 de Revêtements et groupe Fondamental
# Groupe fondamental, lacets, revêtements

**Exercice 1.** (**Homotopie libre**)
Soit $X$ un espace topologique connexe par arcs non vide et $x$ un point de $X$. On appelle lacet basé en $x$ une application continue $f : [0,1] \to X$ vérifiant $f(0) = f(1) = x$ et lacet libre une application $f$ vérifiant seulement $f(0) = f(1)$. Deux lacets libres $f_0, f_1$ sont dits homotopes s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que pour tout $t \in [0,1]$ on ait $H(t,0) = f_0(t)$, $H(t,1) = f_1(t)$ et $H(0,t) = H(1,t)$.

Montrer que l'ensemble des classes d'homotopie libre est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X,x)$.

**Exercice 2.** (**relèvement**)
Soit $S^3$ la sphère vue comme le sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ formé des couples $(u,v)$ vérifiant $|u|^2 + |v|^2 = 1$. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. L'application $\mathbb{Z}/3 \times S^3 \to S^3$ définie par $[m].(u,v) = (j^m u, j^m v)$ définit une action continue du groupe $\mathbb{Z}/3$ sur l'espace topologique $S^3$. On note $X$ le quotient de cette action.

1. Quel est le groupe fondamental de $X$ ?
2. On considère le revêtement $p : S^3 \to P^3(\mathbb{R})$ où $P^3(\mathbb{R})$ est l'espace projectif réel, obtenu comme quotient de $S^3$ par l'identification $x \sim -x$.
   Montrer que toute application $f : X \to P^3(\mathbb{R})$ se relève à $S^3$ c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{f} : X \to S^3$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$.

**Exercice 3.** (**Points tripodaux**) Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une application continue. On veut montrer qu'il existe une base orthonormée directe $u, v, w$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(u) = f(v) = f(w)$ (propriété notée $R$ dans la suite).

1. Soit $q : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par $q(x) = x^3$. Montrer que c'est un revêtement galoisien et expliciter son groupe d'automorphisme.
2. Soit $e_0, e_1, e_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C \in SO(3)$ l'élément défini par $Ce_i = e_{i+1}$ pour $i \in \mathbb{Z}/3$. On note $\Gamma$ le sous-groupe de $SO(3)$ engendré par $C$, $X$ le quotient $SO(3)/\Gamma$ et $p : SO(3) \to X$ la projection canonique. Montrer que $p$ est un revêtement galoisien et expliciter son groupe d'automorphismes.
3. Montrer que $X$ est connexe par arcs et que son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}/6$.
4. Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une application continue, $j = e^{2i\pi/3}$ et définissons $g : SO(3) \to \mathbb{C}$ par $g(A) = f(Ae_0) + j^2 f(Ae_1) + j f(Ae_2)$. Vérifier que l'on a $g(AC) = jg(A)$ et que $g(A) = 0$ ssi $f(Ae_0) = f(Ae_1) = f(Ae_2)$.
5. Supposons que $R$ n'est pas vérifiée. On a alors $g : SO(3) \to \mathbb{C}^*$. Montrer qu'on peut trouver $h, l : X \to \mathbb{C}^*$ qui font commuter le diagramme suivant et conclure.

$$\begin{tikzcd} SO(3) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C}^* \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "l"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

**Exercice 4.** **(Grille et bouquet de cercles)**
On note $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ le revêtement définit par $p(x,y) = (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$. On note $A = S^1 \times \{1\}$, $B = \{1\} \times S^1$ et $X = A \cup B$. On note $A' = X \setminus \{(1,-1)\}$ et $B' = X \setminus \{(-1,1)\}$. Enfin on note $\alpha(t) = (e^{2i\pi t}, 1)$ et $\beta(t) = (1, e^{2i\pi t})$ deux lacets de $X$.

1. Montrer que $A$ et $B$ sont des rétracts par déformation de $A'$ et $B'$ respectivement.
2. Montrer que $A' \cap B'$ est contractile.
3. Montrer que $\pi_1(X, (1,1))$ est engendré par $[\alpha]$ et $[\beta]$.

On note $E$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé des couples $(x, y)$ tels qu'on ait $x \in \mathbb{Z}$ ou $y \in \mathbb{Z}$. On note encore $p : E \to X$ l'application induite par $p$ et par $i : X \to S^1 \times S^1$ l'inclusion.

1. Montrer que $p : E \to X$ est un revêtement galoisien et déterminer son groupe d'automorphismes.
2. Montrer qu'il existe une suite exacte de la forme suivante :

$$1 \longrightarrow \pi_1(E, (0,0)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, (1,1)) \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

3. Montrer que la suite suivante est exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(E, (0,0)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, (1,1)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^1 \times S^1, (1,1)) \longrightarrow 1$$

4. Notons $C$ le carré de sommets $(0,0), (1,0), (1,1)$ et $(0,1)$ et notons $j : C \to E$ l'inclusion. Calculer $\pi_1(C, (0,0)$ et décrire un de ses générateurs.
5. Décrire l'image de ce générateur par l'application $(p \circ j)_* : \pi_1(C, (0,0)) \to \pi_1(X, (1,1))$.
6. Montrer qu'il existe une rétraction de $E$ sur $C$ et que du coup, l'homéomorphisme $j_*$ est injectif.
7. En déduire que $\pi_1(X, (1,1))$ n'est pas commutatif.

**Exercice 5.** (**Groupe fondamental des groupes topologiques)**) Soit $G$ un groupe topologique connexe par arcs, $\alpha$ et $\beta$ deux lacets dans $G$ basés en $e$. On note $\alpha\beta$ le lacet défini par $\alpha\beta(t) = \alpha(t)\beta(t)$.

1. Montrer que $\alpha * \beta, \beta * \alpha$ et $\alpha\beta$ sont homotopes. En déduire que $\pi_1(G, e)$ est commutatif.
2. Soit $p : G' \to G$ un revêtement avec $G'$ connexe par arcs et soit $e' \in G'$ un point vérifiant $p(e') = e$. Montrer qu'il existe une unique structure de groupe topologique sur $G'$ telle que $e'$ soit l'élément neutre et telle que $p$ soit un morphisme de groupe.
3. Monter que le noyau de $p$ est un sous-groupe discret et central de $G'$ (contenu dans le centre). Montrer que $p : G' \to G$ est galoisien.
4. Soit $a$ et $b$ deux éléments de $G$ qui commutent ($ab = ba$). Donnons nous deux chemins $\alpha$ et $\beta$ dans $G$ vérifiant $\alpha(0) = \beta(0) = e$, $\alpha(1) = a$ et $\beta(1) = b$. On définit $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)\alpha(t)^{-1}\beta(t)^{-1}$. Montrer que la classe de $\gamma$ dans $\pi_1(G, e)$ ne dépend que de $a$ et $b$.
5. Expliciter cette classe si $G = SO(3)$, $a = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$ et $b = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$.