Groupe de travail sur la récurrence topologique (RT)

(Généralement les vendredis 9h30 - 10h30)

1. **(8 octobre) Elba Garcia-Failde :** Un aperçu de la récurrence topologique.
2. **(15 octobre) Alessandro Chiodo :** La récurrence de Witten–Kontsevich pour les nombres d'intersections des classes psi et la courbe Airy.
3. **(20 octobre,** mercredi 13h30 - 14h30**) Julien Marché :** La RT et ses propriétés.
4. **(26 novembre) Bram Petri :** De la récurrence de Mirzakhani à la RT pour les volumes de Weil–Petersson.
5. **(3 décembre) Cédric Boutillier :** Comptage de cartes et intégrales matricielles.
6. **(10 décembre) Thomas Guidoni :**
7. **(17 décembre ?) :**
8. **janvier ?**

Organisateurs : Alessandro Chiodo, Elba Garcia-Failde, Julien Marché.

La recherche autour de la récurrence topologique présente de nombreux aspects et saveurs différents. La voie future du GdT dépend fortement des intérêts des personnes motivées, alors n'hésitez pas à venir discuter avec nous (ou à envoyer un courriel) pour commenter les aspects qui vous intéressent le plus, surtout si vous êtes prêt à donner un exposé.

Possibles sujets futurs et références [1] **:**

1. Propriétés de la récurrence topologique (dilaton, invariance symplectique, déformations, équations de boucle abstraites ...).
   - Papier original : [69].
   - Équations de boucles abstraites : [27].
   - Formule variationnelle (par rapport aux paramètres des données initiales : $\omega_{0,1}$) : $\omega_{g,n}$ encode la n-ème dérivée de $\omega_{g,0}$. Ce sujet reste encore en évolution, mais la meilleure référence est peut-être encore le papier original [69].
   - Invariance symplectique : Propriété profonde, mais encore mystérieuse [70, 71]. (Pour des informations actuelles écrites voir [75] et pour des petits progrès récents dans le cadre des cartes combinatoires [21]).
2. Cartes combinatoires et modèles de matrices (origine de la récurrence topologique). (Récurrence de Tutte, intégrales de matrices comme séries génératrices de cartes).
   - Cartes combinaroires (aussi appelées surfaces discretes, graphes rubans, graphes épais...) [60], cartes munies d'un modèle de physique statistique (modèle Ising, modèle de boucles, modèle de Potts...) [22, 27], Grothendieck dessins d'enfants et hypercartes [78, 52].
   - Développements pour grande N de fonctions de correlation de modèles de matrices hermitiennes (des mesures invariantes par conjugaison avec de matrices unitaires) $\rightsquigarrow$ modèle à une matrice hermitienne [4, 5, 57], chaîne de matrices et modèle de matrices à champ externe [56, 73, 11], modèle de matrices multi-trace [27, 17]. Ces expansions sont formelles dans les applications à la combinatoire et à la quantification (pour l'instant), et sont considérés comme des séries asymptotiques de Poincaré dans la théorie des matrices aléatoires [31, 16, 30].
   - Relation entre cartes combinatoires et modèle de matrices [60, 75, 76].
   - Cartes complètement simples (et la dualité de la RT) [29, 21, 40], relation avec les cartes ordinaires à travers de nombres de Hurwitz monotones [20, 29].
3. Théorie de Hurwitz (cut and join, wedge sémi-infinie...).

1. Certaines références sont prises d'un document "Summary of results in topological recursion", principalement écrit par Gaëtan Borot jusqu'à présent. Le compléter et le mettre à jour est un travail en cours réalisé par de nombreuses personnes.

— La RT résout le problème de l'énumération des revêtements ramifiés de $\mathbb{P}^1$. Le cas plus classique (un profile de ramification arbitraire et d'autres simples) a été conjecturé par Bouchard–Mariño [39] et démontré dans [68] (le papier précédent [26] a proposé une démonstration avec un modèle de matrices, mais cela est considérée une preuve incomplète). La première preuve sans utiliser la formule de ELSV se trouve dans [54], qui est le premier d'une longue liste de papiers qui prouvent la RT dans le cadre de la théorie de Hurwitz en utilisant le wedge sémi-infini (...). Version q-orbifold [50] ; version r-spin, prouvée pour $r = 3$, et quelconque r mais genre 0 dans [32], et version monotone [49].
— La RT nous aide à trouver des formules de type ELSV (des identités avec des nombres d'intersection sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$).
— Une grande classe de problèmes de Hurwitz a été résolue par la RT dans la série d'articles : [1, 2].
— Papiers récents qui complètent presque tous les cas (wedge sémi-infinie) : [41, 40].

4. Invariants de Gromov–Witten (...).
   — Démonstration [72, 74] de la conjecture BKMP (Bouchard-Klemm-Mariño-Pasquetti [38]) pour variétés Calabi–Yau toriques X : la RT appliquée à la courbe miroir de X calcule les invariants de Gromov–Witten fermés et ouverts de X.
5. De la récurrence de Mirzakhani à la récurrence topologique pour les volumes de Weil–Petersson de l'espace de modules de surfaces hyperboliques [84, 18] (identité de McShane ...).
6. Théories de champs cohomologiques (CohFTs) (théorie de l'intersection de l'espace de modules de courbes $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, formalisme de Givental, Witten–Kontsevich, formules ELSV, classes de Chiodo, class r-spin de Witten...).
   — Witten–Kontsevich [92, 91, 9, 60].
   — CohFTs semi-simples [59, 53]. Les $\omega_{g,n}$ peuvent être exprimées en termes de nombres d'intersection des classes tautoloqies sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ [58, 59, 45]. La RT calcule la fonction de corrélation des théories des champs cohomologiques semi-simples et l'action du groupe de Givental sur les CohFTs peut être explicitement transporté lese vers données initiales de la RT [83, 53]. Ce résultat est très important et utile ; il utilise le théorème de Teleman [89] qui affirme que l'action du groupe de Givental est transitive sur les CohFTs sur une algèbre de Frobenius semi-simple donnée.
   — Classes de Chiodo [81].
   — Courbe de Bessel (irrégulière), modèle de matrices de Brézin–Gross–Witten, class de Norbury [86].
   — Class r-spin de Witten [11] (à partir des graphes généralisés de Kontsevich).
7. Systèmes intégrables (courbes quantiques, reconstruction WKB, Hirota, Sato...).
   — La conjecture sur les courbes quantiques dit que la fonction d'onde construite à partir des $\omega_{h,n}$ est annulée par un opérateur différentiel dont les coéfficients ont des singularités controlées. Démontrée pour beaucoup de cas particuliers ([34, 90, 3, 88]), pour courbes spectrales compactes de genre 0 [36], pour courbes elliptiques et hyperelliptiques [77, 82, 64] et récemment pour toute courbe algébrique suffisamment générique [65] (genre > 0). Une bonne référence pour les cas plus simples : [87].
   — Conjecture d'intégrabilité : [23].
   — Pour chaque connexion plate avec des singularités méromorphes $\mathcal{C}$, et una base de sections plates, on peut construire des corrélateurs qui satisfont les équations de boucle [14, 13, 63, 12]. Dans le cas de connexions déformées par $\hbar$, si les sections plates sont du type topologique (courbe spectral de genre 0 et contraintes sur la forme de leur développement en $\hbar \to 0$), leur développement WKB est calculé par la fonction d'onde de la RT. Cela fournit une converse conditionnelle à la conjecture de la courbe quantique. (Blocs conformes, équations KZ, quantification de l'espace de modules de Higgs...).
   — [85, 51] ont proposé que la fonction d'onde de la RT pour la courbe spectral de Hitchin satisfait une courbe quantique (bien qu'il y ait un consensus sur le fait que la preuve n'est pas comlète pour les courbe de genre > 0).

— Le développement de Taylor de la métrique spécial Kähler sur la base de systèmes intégrales de Hitchin est governé par le secteur de genre 0 de la RT [10].

8. Des invariants de noeuds.
   — Conjecture $\hat{A}$-RT (polynôme colorée de Jones) : [46, 47, 24].
   — HOMFLY [25, 19].

Possibles sujets supplémentaires :
- — Volumes de Masur–Veech [6].
- — La structure récursive de la RT encodé dans une algèbre de Hopf à la Ronco–Loday [55, 48].
- — Des limites singulières : si une famille de courbes spectrales dégénère, les $\omega_{g,n}$ diverge et on comprend comment dans des cas particuliers [69]. Pour le cas du modèle $O(n)$ des boucles, des limites plus compliqués ont été étudiés (d'une façon qui est assez généralisable) [28].
- — Équation d'anomalie holomorphe $\rightsquigarrow$ en étudiant des variations de $\omega_{0,2}$, en se spécialisant à des $\omega_{0,2}$ modulaires, mais non holomorphes [67].
- — RT non-perturbative : [66, 65]. Ce sujet est principalement en progrès (étude des corrections non-perturbatives à partir de la géométrie des courbes spectrales [62, 61]).
- — RT et CFTs [80].
- — La dualité de la RT : cartes complètement simples, transformation d'échange de l'invariance symplectique et connection avec les probabilités libres [75] (et en cours).

Généralisations de la RT :
- — RT blobbée [33] $\rightsquigarrow$ Cette généralisation de la RT décrit l'ensemble de toutes les solutions des équations de boucles (sans la propriété qu'on appelle souvent "projection").
- — Ramifications supérieurs (Bouchard–Eynard) [37, 35].
- — Kontsevich–Soibelman et ABCD (structures de Airy) [79, 7].
- — Récurrence géométrique (RG) [8].
- — Vers des versions non orientables.
  - — RT β-déformée [42, 43, 44, 15].

Références

[1] A. Alexandrov, G. Chapuy, B. Eynard, and J. Harnad, *Fermionic approach to weighted Hurwitz numbers and topological recursion*, (2017), math-ph/1706.00958.

[2] ———, *Weighted Hurwitz numbers and topological recursion*, (2018), math-ph/1806.09738.

[3] A. Alexandrov, D. Lewański, and S. Shadrin, *Ramification of Hurwitz theory, KP integrability and quantum curves*, JHEP (2016), no. 2016 :124, math-ph/1512.07026.

[4] J. Ambjørn, L.O. Chekhov, C. Kristjansen, and Yu. Makeenko, *Matrix model calculations beyond the spherical limit*, Nucl. Phys. B **404** (1993), 127–172, hep-th/9302014.

[5] J. Ambjørn, L.O. Chekhov, and Yu. Makeenko, *Higher genus correlators from the hermitian one-matrix model*, Phys. Lett. B **282** (1992), 341–348, hep-th/9203009.

[6] J. E. Andersen, G. Borot, S. Charbonnier, V. Delecroix, A. Giacchetto, and C. Wheeler D. Lewański, *Topological recursion for masur-veech volumes*, (2021).

[7] J.E. Andersen, G. Borot, L.O. Chekhov, and N. Orantin, *The ABCD of topological recursion*, (2017), math-ph/1703.03307.

[8] J.E. Andersen, G. Borot, and N. Orantin, *Geometric recursion*, to appear.

[9] Jørgen Ellegaard Andersen, Gaëtan Borot, Séverin Charbonnier, Alessandro Giacchetto, Danilo Lewański, and Campbell Wheeler, *On the kontsevich geometry of the combinatorial teichm\" uller space*, arXiv preprint arXiv :2010.11806 (2020).

[10] D. Baraglia and Z. Huang, *Special Kähler geometry of the Hitchin system and topological recursion*, math.DG/1707.04975.

[11] R. Belliard, S. Charbonnier, B. Eynard, and N. Garcia-Failde, *Topological recursion for generalised kontsevich graphs and r-spin intersection numbers*, (2021).

[12] R. Belliard, B. Eynard, and O. Marchal, *Integrable differential systems of topological type and reconstruction by the topological recursion*, Ann. Henri Poincaré **18** (2017), no. 10, 3193–3248, math-ph/1610.00496.

[13] M. Bergère, G. Borot, and B. Eynard, *Rational differential systems, loop equations, and application to the q-th reductions of KP*, Annales Henri Poincaré **16** (2015), no. 12, 2713–2782, math-ph/1312.4237.

[14] M. Bergère and B. Eynard, *Determinantal formulae and loop equations*, (2009), math-ph/0901.3273.

[15] M. Bergère, B. Eynard, O. Marchal, and A. Prats-Ferrer, *Loop equations and topological recursion for the arbitrary-β two-matrix model*, JHEP (2012), math-ph/1106.0332.

[16] A. Borodin, V. Gorin, and A. Guionnet, *Gaussian asymptotics of discrete β-ensembles*, (2015), math.PR/1505.03760.

[17] G. Borot, *Formal multidimensional integrals, stuffed maps, and topological recursion*, Annales Institut Poincaré - D **1** (2014), no. 2, 225–264, math-ph/1307.4957.

[18] ______, *Lecture notes on topological recursion and geometry*, (2017).

[19] G. Borot and A. Brini, *Chern-Simons theory on spherical Seifert manifolds, topological strings and integrable systems*, Adv. Theor. Math. Phys. (2018), math-ph/1502.00981.

[20] G. Borot, S. Charbonnier, N. Do, and E. Garcia-Failde, *Relating ordinary and fully simple maps via monotone Hurwitz numbers*, The Electronic Journal of Combinatorics **26** (2019), no. 3.

[21] G. Borot, S. Charbonnier, and N. Garcia-Failde, *Topological recursion for fully simple maps from ciliated maps*, (2021).

[22] G. Borot and B. Eynard, *Enumeration of maps with self avoiding loops and the $O(n)$ model on random lattices of all topologies*, J. Stat. Mech. (2011), no. P01010, math-ph/0910.5896.

[23] ______, *Geometry of spectral curves and all order dispersive integrable system*, SIGMA **8** (2012), no. 100, math-ph/1110.4936.

[24] ______, *All-order asymptotics of hyperbolic knot invariants from non-perturbative topological recursion of A-polynomials*, Quantum Topology (2015), math-ph/1205.2261.

[25] ______, *Spectral curves, root systems, and application to $\mathrm{SU}(N)$ Chern-Simons theory on Seifert spaces*, Sel. Math. New Series **23** (2017), no. 2, 915–1025, math-ph/1407.4500.

[26] G. Borot, B. Eynard, M. Mulase, and B. Safnuk, *A matrix model for simple Hurwitz numbers, and topological recursion*, J. Geom. Phys. **61** (2010), no. 26, 522–540, math-ph/0906.1206.

[27] G. Borot, B. Eynard, and N. Orantin, *Abstract loop equations, topological recursion, and applications*, Commun. Number Theory and Physics **9** (2015), no. 1, 51–187, math-ph/1303.5808.

[28] G. Borot and E. Garcia-Failde, *Nesting statistics in the $O(n)$ loop model on random maps of arbitrary topologies*, (2016).

[29] ______, *Simple Maps, Hurwitz Numbers, and Topological Recursion*, Commun. Math. Phys. **380** (2020), no. 2, 581–654.

[30] G. Borot, V. Gorin, and A. Guionnet, *Fluctuations for multi-cut discrete β-ensembles and application to random tilings*, in progress.

[31] G. Borot, A. Guionnet, and K. Kozlowski, *Large-N asymptotic expansion for mean field models with Coulomb gas interaction*, Int. Math. Res. Not. (2015), no. 20, 10451–10524, math-ph/1312.6664.

[32] G. Borot, R. Kramer, D. Lewański, A. Popolitov, and S. Shadrin, *Special cases of the orbifold version of Zvonkine's r-ELSV formula*, 1705.10811.

[33] G. Borot and S. Shadrin, *Blobbed topological recursion : properties and applications*, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. **162** (2017), no. 1, 39–87, math-ph/1502.00981.

[34] V. Bouchard, N.K. Chidambaram, and T. Dauphinee, *Quantizing Weierstrass*, Comm. Numb. Th. Phys., math-ph/1610.00225.

[35] V. Bouchard and B. Eynard, *Think globally, compute locally*, JHEP **02** (2013), no. 143, math-ph/1211.2302.

[36] ———, *Reconstructing WKB from topological recursion*, Journal de l'École Polytechnique – Mathématiques **4** (2017), 845–908, math-ph/1606.04498.

[37] V. Bouchard, J. Hutchinson, P. Loliencar, M. Meiers, and M. Rupert, *A generalized topological recursion for arbitrary ramification*, Annales Henri Poincaré **15** (2014), no. 1, 143–169.

[38] V. Bouchard, A. Klemm, M. Mariño, and S. Pasquetti, *Remodeling the B-model*, Commun. Math. Phys. **287** (2009), 117–178, hep-th/0709.1453.

[39] V. Bouchard and M. Mariño, *Hurwitz numbers, matrix models and enumerative geometry*, From Hodge Theory to Integrability and tQFT : tt*-geometry (R. Donagi and K. Wendland, eds.), Proc. Symp. Pure Math., AMS, 2007, math.AG/0709.1458.

[40] B. Bychkov, P. Dunin-Barkowski, M. Kazarian, and S. Shadrin, *Generalised ordinary vs fully simple duality for n-point functions and a proof of the Borot–Garcia-Failde conjecture*, (2021).

[41] ———, *Topological recursion for kadomtsev-petviashvili tau functions of hypergeometric type*, (2021).

[42] L.O. Chekhov and B. Eynard, *Matrix eigenvalue model : Feynman graph technique for all genera*, JHEP (2006), no. 0612 :026, math-ph/0604014.

[43] L.O. Chekhov, B. Eynard, and O. Marchal, *Topological expansion of the Bethe ansatz, and quantum algebraic geometry*, (2009), math-ph/0911.1664.

[44] ———, *Topological expansion of beta-ensemble model and quantum algebraic geometry in the sectorwise approach*, Theoretical and Mathematical Physics **166** (2011), no. 2, 141–185, math-ph/1009.6007.

[45] L.O. Chekhov and P. Norbury, *Topological recursion with hard edges*, (2017), math.AG/1702.08631.

[46] R. Dijkgraaf and H. Fuji, *The volume conjecture and topological strings*, Fortsch. Phys. **57** (2009), 825–856, hep-th/0903.2084.

[47] R. Dijkgraaf, H. Fuji, and M. Manabe, *The volume conjecture, perturbative knot invariants, and recursion relations for topological strings*, Nucl. Phys. B **849** (2011), 166–211, hep-th/1010.4542.

[48] X.-M. Ding, Y. Li, and L. Meng, *Hopf algebra of topological recursion*, math-ph/1607.08136.

[49] N. Do, A. Dyer, and D.V. Mathews, *Topological recursion and a quantum curve for monotone Hurwitz numbers*, J. Geom. Phys. **120** (2017), 9–36, math.GT/1408.3992.

[50] N. Do, O. Leigh, and P. Norbury, *Orbifold Hurwitz numbers and Eynard-Orantin invariants*, math.AG/1212.6850.

[51] O. Dumitrescu and M. Mulase, *Quantization of spectral curves for meromorphic bundles through topological recursion*, math.AG/1411.1023.

[52] P. Dunin-Barkowski, N. Orantin, A. Popolitov, and S. Shadrin, *Combinatorics of loop equations for branched cover of the sphere*, Int. Math. Res. Not. (2017), math-ph/1412.1698.

[53] P. Dunin-Barkowski, N. Orantin, S. Shadrin, and L. Spitz, *Identification of the Givental formula with the spectral curve topological recursion procedure*, Commun. Math. Phys. **328** (2014), no. 2, 669–700, math-ph/1211.4021.

[54] Petr Dunin-Barkowski, Maxim Kazarian, Nicolas Orantin, Sergey Shadrin, and Loek Spitz, *Polynomiality of hurwitz numbers, bouchard–marino conjecture, and a new proof of the elsv formula*, Advances in Mathematics **279** (2015), 67–103.

[55] J.N. Esteves, *Hopf algebras and topological recursion*, J. Phys. A : Math. Theor **48** (2015), no. 44, math-ph/1503.02993.

[56] B. Eynard, *Large N expansion of the 2-matrix model*, JHEP (2003), no. 0301 :051, hep-th/0210047.

[57] ______, *All genus correlation functions for the hermitian 1-matrix model*, JHEP (2004), no. 0411 :031, hep-th/0407261.

[58] ______, *Recursion between Mumford volumes of moduli spaces*, Annales Henri Poincaré **12** (2011), no. 8, 1431–1447, math.AG/0706.4403.

[59] ______, *Invariants of spectral curves and intersection theory of moduli spaces of complex curves*, Commun. Number Theory and Physics **8** (2014), no. 3, math-ph/1110.2949.

[60] ______, *Counting surfaces*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, 2016.

[61] ______, *The Geometry of integrable systems. Tau functions and homology of Spectral curves. Perturbative definition.*, (2018).

[62] ______, *Large genus behavior of topological recursion*, (2019).

[63] B. Eynard, R. Belliard, and O. Marchal, *Loop equations from differential systems*, math-ph/1602-01715.

[64] B. Eynard and E. Garcia-Failde, *From topological recursion to wave functions and PDEs quantizing hyperelliptic curves*, (2019).

[65] B. Eynard, E. Garcia-Failde, O. Marchal, and N. Orantin, *Quantization of classical spectral curves via topological recursion*, (2021).

[66] B. Eynard and M. Mariño, *A holomorphic and background independent partition function for matrix models and topological strings*, J. Geom. Phys. **61** (2011), no. 7, 1181–1202, hep-th/0810.4273.

[67] B. Eynard, M. Mariño, and N. Orantin, *Holomorphic anomaly and matrix models*, JHEP (2007), no. 0706 :058, hep-th/0702110.

[68] B. Eynard, M. Mulase, and B. Safnuk, *The Laplace transform of the cut-and-join equation and the Bouchard-Mariño conjecture on Hurwitz numbers*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **47** (2011), 629–670, math.AG/0907.5224.

[69] B. Eynard and N. Orantin, *Invariants of algebraic curves and topological expansion*, Commun. Number Theory and Physics **1** (2007), no. 2, math-ph/0702045.

[70] ______, *Topological expansion of mixed correlations in the hermitian 2 matrix model and $x-y$ symmetry of the F_g invariants*, J. Phys. A : Math. Theor. **41** (2008), math-ph/0705.0958.

[71] ______, *About the x-y symmetry of the F_g algebraic invariants*, (2013), math-ph/1311.4993.

[72] ______, *Computation of open Gromov-Witten invariants for toric Calabi-Yau 3-folds by topological recursion, a proof of the BKMP conjecture*, Commun. Math. Phys. **337** (2015), no. 2, 483–567, math-ph/1205.1103.

[73] B. Eynard and A. Prats-Ferrer, *Topological expansion of the chain of matrices*, JHEP (2009), no. 096, math-ph/0805.1368.

[74] B. Fang, C.-C.M. Liu, and Z. Zong, *On the remodeling conjecture for toric Calabi-Yau*, (2016), math.AG/1604.07123.

[75] E. Garcia-Failde, *On discrete surfaces : Enumerative geometry, matrix models and universality classes via topological recursion*, Ph.D. thesis, Rheinische Friedrich-Wilhems-Universität Bonn, 2018.

[76] J. Harer and D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves*, Invent. Math. **85** (1986), no. 3, 457–485.

[77] K. Iwaki, *2-parameter τ-function for the first Painlevé equation —topological recursion and direct monodromy problem via exact WKB analysis—*, (2019), math-ph/1902.06439.

[78] M. Kazarian and P. Zograf, *Virasoro constraints and topological recursion for Grothendieck's dessin counting*, Lett. Math. Phys. **105** (2015), no. 8, 1057–1084, math.CO/1406.5976.

[79] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Airy structures and symplectic geometry of topological recursion*, math.AG/1701.09137.

[80] I.K. Kostov and N. Orantin, *CFT and topological recursion*, JHEP (2010), no. 56, math-ph/1006.2028.

[81] Danilo Lewanski, Alexandr Popolitov, Sergey Shadrin, and Dimitri Zvonkine, *Chiodo formulas for the r-th roots and topological recursion*, Letters in Mathematical Physics **107** (2017), no. 5, 901–919.

[82] O. Marchal and N. Orantin, *Quantization of hyper-elliptic curves from isomonodromic systems and topological recursion*, (2019).

[83] T. Milanov, *The Eynard–Orantin recursion for the total ancestor potential*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 9, 1795–1824, math.AG/1211.5847.

[84] M. Mirzakhani, *Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces*, Invent. math. **167** (2007), 179–222.

[85] M. Mulase and O. Dumitrescu, *Quantum curves for Hitchin fibrations and the Eynard-Orantin theory*, Lett. Math. Phys. **104** (2014), 635–671, math.AG/1310.6022.

[86] P. Norbury, *A new cohomology class on the moduli space of curves*, math.AG/1712.03662.

[87] ______, *Quantum curves and topological recursion*, String-Math 2014, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 93, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, arXiv :1502.04394, pp. 41–65. MR 3524233

[88] K. Takasaki and T. Nakatsu, *q-difference Kac-Schwarz operators in topological string theory*, SIGMA **009** (2017), math-ph/1609.00882.

[89] C. Teleman, *The structure of 2D semi-simple field theories*, Invent. Math. **188** (2012), 525–588, math.AT/0712.0160.

[90] J. Zhou, *Quantum mirror curves for $\mathbb{C}^3$ and the resolved conifold*, math.AG/1207.0598.

[91] Jian Zhou, *Intersection numbers on deligne-mumford moduli spaces and quantum airy curve*, arXiv preprint arXiv :1206.5896 (2012).

[92] ______, *Topological recursions of eynard–orantin type for intersection numbers on moduli spaces of curves*, Letters in Mathematical Physics **103** (2013), no. 11, 1191–1206.