



Les nœuds et la physique

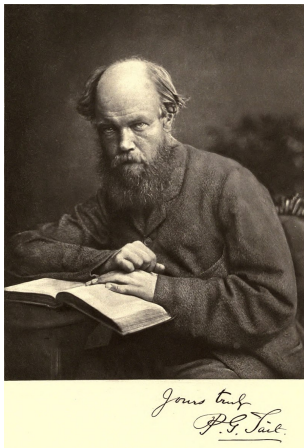
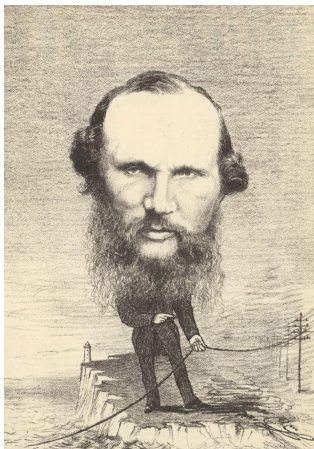
Inspirations réciproques

Julien Marché

Sorbonne Université

2 Octobre 2019

Première période: 1867-1876

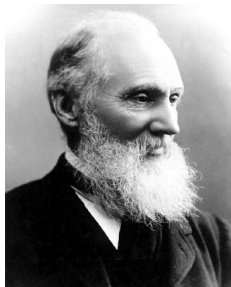


William Thomson (1824-1907)
Lord Kelvin

Peter Guthrie Tait (1831-1901)

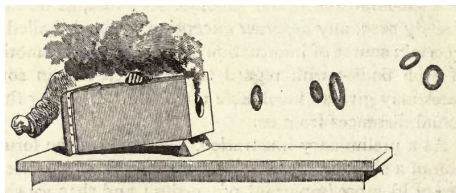
Écoutons W. Thomson

- ▶ Thermodynamique: zéro absolu, âge de la terre.
 - ▶ Electromagnétisme - défenseur de la théorie de l'éther.
-
- ▶ *N'oubliez pas que les mathématiques sont difficiles, revêches et repoussantes pour le sens commun. C'est simplement l'éthérisation du sens commun.*



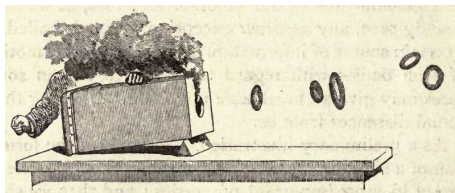
Des ronds de fumée à la théorie atomique des noeuds

1860
Université
d'Edimbourg

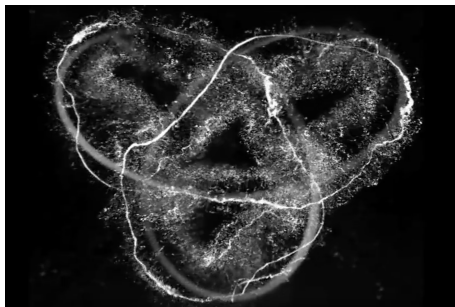


Des ronds de fumée à la théorie atomique des noeuds

1860
Université
d'Edimbourg



2013
Université
de Chicago



Correspondance Nœuds ↔ Atomes d'après W. Thomson

PERIODIC CHART OF THE ELEMENTS

PART 10

↓ Period	Planets	Planetary electrons								↓ Period									
	Mercury I	Venus II	Earth III	Mars IV	Jupiter V	Saturn VI	Uranus VII	Neptune VIII	Total Atoms etc.		↓ Period								
1	0 n 1.0000	1 H 1.0080	2 He 4.003									1							
2	2 He 4.003	3 Li 6.940	4 Be 9.013	5 B 10.82	6 C 12.011	7 N 14.008	8 O 16.000	9 F 19.00	10 Ne 20.183	2									
3	10 Ne 20.183	11 Na 22.991	12 Mg 24.32	13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.975	16 S 32.066	17 Cl 35.457	18 Ar 39.944	3									
4	18 Ar 39.944	19 K 39.100	20 Ca 40.08	21 Sc 44.96	22 Ti 47.90	23 V 50.95	24 Cr 52.01	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.94	28 Ni 58.71	4							
5	36 Kr 83.80	37 Rb 85.48	38 Sr 87.63	39 Y 88.91	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.95	43 Tc 99	44 Ru 101.1	45 Rh 102.91	46 Pd 106.4	5							
6	54 Xe 131.30	55 Cs 132.91	56 Ba 137.36	57 La 138.92	58 Ce 140.13	59 Pr 140.91	60 Nd 144.27	61 Pm 147	62 Sm 150.35	63 Eu 152.0	64 Gd 157.26	65 Tb 158.93	66 Dy 162.51	67 Ho 164.94	68 Er 167.27	69 Tm 168.94	70 Yb 173.04	71 Lu 174.97	6
7	86 Rn 222	87 Fr 223	88 Ra 226	89 Ac 227	90 Th 232	91 Pa 231	92 U 238	93 Np 237	94 Pu 242	95 Am 243	96 Cm 247	97 Bk 248	98 Cf 251	99 Es 254	100 Fm 253	101 Md 256	102 No 254	103	7

Correspondance Nœuds ↔ Atomes d'après W. Thomson



PERIODIC CHART OF THE ELEMENTS

↓ Period 1 2 3 4 5 6 7	Planetary electrons																		↓ 1 2 3 4 5 6 7								
	Total Atoms Elec. → 2 1 ¹ 2 ² 3 ³ 4 ⁴ 5 ⁵ 6 ⁶ 7 ⁷																										
1 0 n 1.0081 H																		2 He 4.003	1								
2 He 6.940	Li 6.940	3 Be 9.013	4 B 10.82	5 C 12.011	6 N 14.008	7 O 16.000	8 F 19.00	9 Ne 20.183									10 Ne 20.183	2									
3 10 Ne 22.991	11 Na 22.991	12 Mg 24.32	13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.975	16 S 32.066	17 Cl 35.457	18 Ar 39.944									18 Ar 39.944	3									
4 18 Ar 39.100	19 K 39.100	20 Ca 40.08	21 Sc 44.96	22 Ti 47.89	23 V 50.95	24 Cr 52.01	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.94	28 Ni 58.71									36 Kr 83.80	4							
5 36 Kr 83.54	37 Rb 85.48	38 Sr 87.63	39 Y 88.91	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.95	43 Tc 99	44 Ru 101.1	45 Rh 102.91	46 Pd 106.4									78 Pt 195.09	5							
6 54 Xe 107.87	55 Cs 132.91	56 Ba 137.36	57 La 138.92	58 Ce 140.12	59 Pr 140.91	60 Nd 144.27	61 Pm 147	62 Sm 150.35	63 Eu 152.0	64 Gd 157.26	65 Tb 158.93	66 Dy 162.51	67 Ho 164.94	68 Er 167.27	69 Tm 168.94	70 Yb 173.04	71 Lu 174.97									86 Rn 222	6
7 86 Rn 223	79 Au 197.0	80 Hg 200.61	81 Tl 204.39	82 Pb 207.21	83 Bi 208.99	84 Po 210	85 At 210	86 Rn 222									86 Rn 222	7									
6 *58-71 Rare Earths Type 4f	58 Ce 140.13	59 Pr 140.91	60 Nd 144.27	61 Pm 147	62 Sm 150.35	63 Eu 152.0	64 Gd 157.26	65 Tb 158.93	66 Dy 162.51	67 Ho 164.94	68 Er 167.27	69 Tm 168.94	70 Yb 173.04	71 Lu 174.97									86 Rn 222	6			
7 *90-103 Rare Earths Type 5f	90 Th 232	91 Pa 231	92 U 238	93 Np 237	94 Pu 242	95 Am 243	96 Cm 247	97 Bk 248	98 Cf 251	99 Es 254	100 Fm 253	101 Md 256	102 No 254	103									86 Rn 222	7			

Correspondance Nœuds ↔ Atomes d'après W. Thomson



PERIODIC CHART OF THE ELEMENTS

↓ Period 1 2 3 4 5 6 7	Planetary electrons																		↓ Period 1 2 3 4 5 6 7						
	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII		IX			Total electrons	2-2	2-8	2-8-8	2-8-18-8	2-8-18-32-18-8
1	0 n 1.0007	1 1.008																	2 - 2	2 - 2					1
2	2 He	3 Li	4 Be	5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne									10 - 2	10 - 2					2	
3	10 Ar	11 Na	12 Mg	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar									18 - 2	18 - 2					3	
4	18 Kr	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni							36 - 2	36 - 2	36 - 2	36 - 2	36 - 2	36 - 2	36 - 2	4
5	36 Kr	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd							54 - 2	54 - 2	54 - 2	54 - 2	54 - 2	54 - 2	54 - 2	5
6	54 Xe	55 Cs	56 Ba	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu	86 - 2	86 - 2	86 - 2	86 - 2	86 - 2	86 - 2	6
7	86 Rn	87 Fr	88 Ra	89 Ac	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	118	118	118	118	118	7
6	*58 - 71 Rare Earths Type 4f	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu									6	
7	*90-103 Rare Earths Type 5f	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103									7	

Correspondance Nœuds ↔ Atomes d'après W. Thomson



PERIODIC CHART OF THE ELEMENTS

↓ Atomic Number	Planetary electrons																		↓ Atomic Number																																			
	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII		Total electrons																																					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	2 - 2	2 - 8	2 - 8 - 8	2 - 8 - 18 - 8	2 - 8 - 18 - 32 - 18 - 8																															
1	0 n H 1.008	1 He 4.003																			1																																	
2	2 He	3 Li 6.940	4 Be 9.013	5 B 10.82	6 C 12.011	7 N 14.008	8 O 16.000	9 F 19.00	10 Ne 20.183														2																															
3	10 Ne	11 Na 22.991	12 Mg 24.32	13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.975	16 S 32.066	17 Cl 35.457	18 Ar 39.944	19 K 39.100	20 Ca 40.08	21 Sc 44.96	22 Ti 47.90	23 V 50.95	24 Cr 52.01	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.94	28 Ni 58.71				3																															
4	18 Ar	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu 63.54	30 Zn 65.38	31 Ga 69.72	32 Ge 72.60	33 As 74.92	34 Se 78.96	35 Br 79.910	36 Kr 83.80	37 Rb 85.48	38 Sr 87.63	39 Y 88.91	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.95	43 Tc 99	44 Ru 101.1	45 Rh 102.91	46 Pd 106.4				4																					
5	36 Kr	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag 107.870	48 Cd 112.41	49 In 114.82	50 Sn 118.70	51 Sb 121.76	52 Te 127.61	53 I 126.91	54 Xe 131.30	55 Cs 132.91	56 Ba 137.36	57 La 138.92	58 Ce 140.13	59 Pr 140.91	60 Nd 144.27	61 Pm 147	62 Sm 150.35	63 Eu 152.0	64 Gd 152.07	65 Tb 158.93	66 Dy 162.51	67 Ho 164.94	68 Er 167.27	69 Tm 168.94	70 Yb 173.04	71 Lu 174.96				5														
6	54 Xe	55 Cs	56 Ba	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu	72 Hf 178.50	73 Ta 180.95	74 W 183.86	75 Re 186.22	76 Os 190.2	77 Ir 192.2	78 Pt 195.09	79 Au 197.0	80 Hg 200.61	81 Tl 204.39	82 Pb 207.21	83 Bi 208.99	84 Po 210	85 At 210	86 Rn 222	87 Fr 223	88 Ra 226	89 Ac 227	90 Th 232	91 Pa 231	92 U 238	93 Np 237	94 Pu 242	95 Am 243	96 Cm 247	97 Bk 248	98 Cf 251	99 Es 254	100 Fm 253	101 Md 256	102 No 254	103 Lr 254				6
7	86 Rn	87 Fr	88 Ra	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr											7																									

Correspondance Nœuds ↔ Atomes d'après W. Thomson



PERIODIC CHART OF THE ELEMENTS

↓ Period	Planetary electrons																		↓ Period																	
	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII		Total	2-1		2-2	2-3	2-4	2-5	2-6												
1	0 n 1.0087	1 1.0087																	2 4.003	2 - 2							1									
2	2 He	3 Li	4 Be	5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne							10 20.183	2 - 8							2												
3	10 Ne	11 Na	12 Mg	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar							18 39.944	2 - 8							3												
4	18 Ar	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni							26 55.85	2 - 8	18 - 0							4									
5	36 Kr	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd							36 83.30	2 - 8	18 - 0	8 - 0							5								
6	54 Xe	55 Cs	56 Ba	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu							54 131.30	2 - 8	18 - 0	18 - 0							6	
7	86 Rn	87 Fr	88 Ra	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103							86 222	2 - 8	18 - 32	18 - 0	8 - 0							7

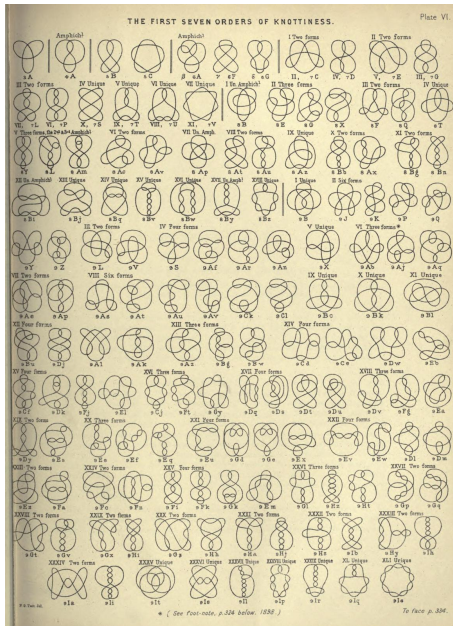
Correspondance Nœuds ↔ Atomes d'après W. Thomson



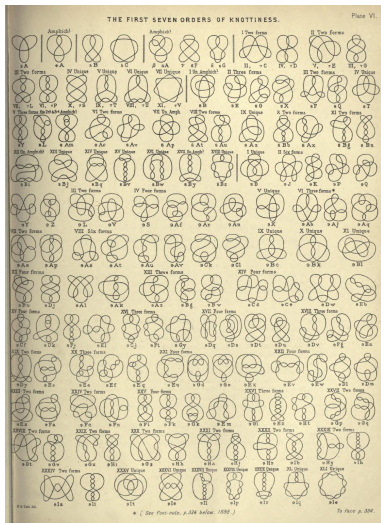
PERIODIC CHART OF THE ELEMENTS

↓ Period 1 2 3 4 5 6 7	Planetary electrons																		↓ Period 1 2 3 4 5 6 7	
	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII		IX			Total 2-2 2-8 2-8-8 2-8-18 2-8-18-18 2-8-18-32 2-8-18-32-18 2-8-18-32-18-8
1	0 n 1.0081	1 1.0081																	2 4.003	1
2	2 He	3 Li 6.940	4 Be 9.013	5 B 10.82	6 C 12.011	7 N 14.008	8 O 16.0000	9 F 19.00	10 Ne 20.183	End of the 2nd Period		10 2-8	2							
3	10 Ne	11 Na 22.991	12 Mg 24.32	13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.975	16 S 32.066	17 Cl 35.457	18 Ar 39.944	End of the 3rd Period		18 2-8-8	3							
4	18 Ar	19 K 39.100	20 Ca 40.08	21 Sc 44.96	22 Ti 47.90	23 V 50.95	24 Cr 52.01	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.94	28 Ni 58.71	End of the 4th Period		36 2-8-18-8	4					
5	36 Kr	37 Rb 85.48	38 Sr 87.63	39 Y 88.91	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.95	43 Tc 99	44 Ru 101.1	45 Rh 102.91	46 Pd 106.4	End of the 5th Period		54 2-8-18-18-8	5					
6	54 Xe	55 Cs 132.91	56 Ba 137.36	57 La 138.92	58 Ce 140.13	59 Pr 140.91	60 Nd 144.27	61 Pm 147	62 Sm 150.35	63 Eu 152.0	64 Gd 157.26	65 Tb 158.93	66 Dy 162.51	67 Ho 164.94	68 Er 167.27	69 Tm 168.94	70 Yb 173.04	71 Lu 174.96	6	
7	86 Rn	87 Fr 223	88 Ra 226	89 Ac 227	90 Th 232	91 Pa 231	92 U 238	93 Np 237	94 Pu 242	95 Am 243	96 Cm 247	97 Bk 248	98 Cf 251	99 Es 254	100 Fm 253	101 Md 256	102 No 254	103	7	

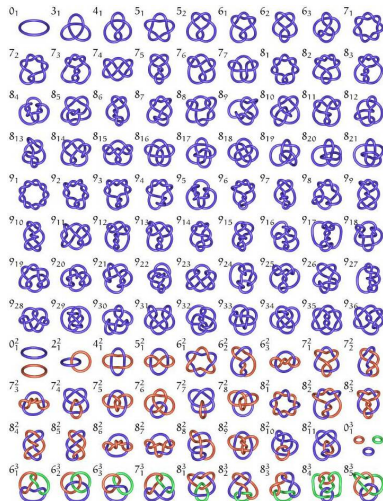
Première classification des nœuds par P. Tait



Première classification des nœuds par P. Tait



Publié en 1876



En ligne sur katlas.org

Écoutons P. Tait

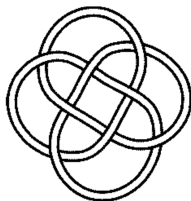
- ▶ *Le nombre énorme de raies dans le spectre de certaines substances élémentaires montre que l'atome-vortex qui leur correspond ne peut pas être trop simple.*

Écoutons P. Tait

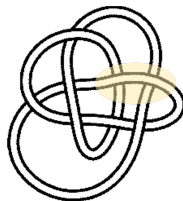
- ▶ *Le nombre énorme de raies dans le spectre de certaines substances élémentaires montre que l'atome-vortex qui leur correspond ne peut pas être trop simple.*
- ▶ *Il est peu probable qu'on attaque rigoureusement le cas de 8 croisements ou plus si les méthodes ne sont pas immensément simplifiées.*

Nœuds alternés

Un nœud est dit **alterné** si ses croisements alternent systématiquement de dessus à dessous.



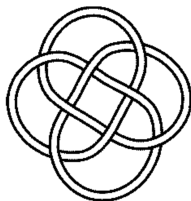
8.18 est alterné



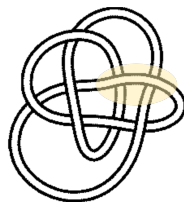
8.20 ne l'est pas

Nœuds alternés

Un nœud est dit **alterné** si ses croisements alternent systématiquement de dessus à dessous.

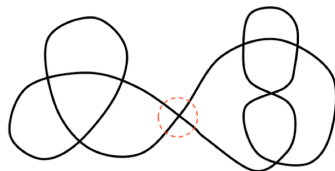


8.18 est alterné

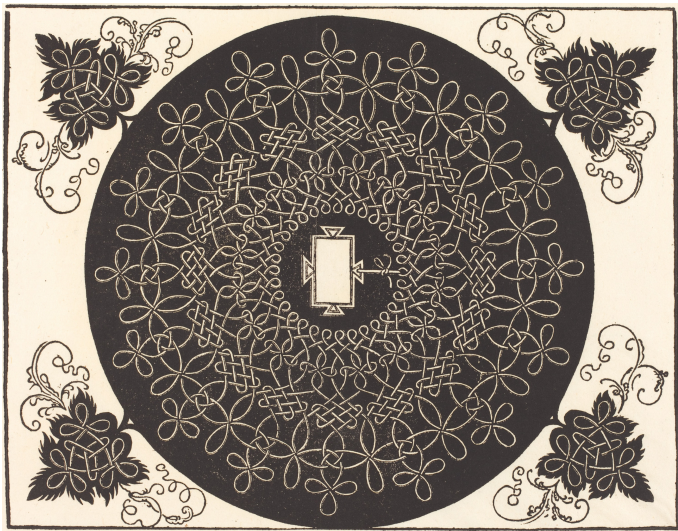


8.20 ne l'est pas

Un nœud est dit **réduit** s'il n'est pas pincé comme ci-dessous:



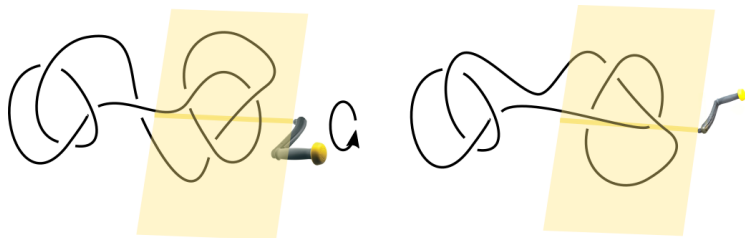
Un exemple de nœud alterné mais pas réduit



Gravure d'Albrecht Dürer, Venise (1506).

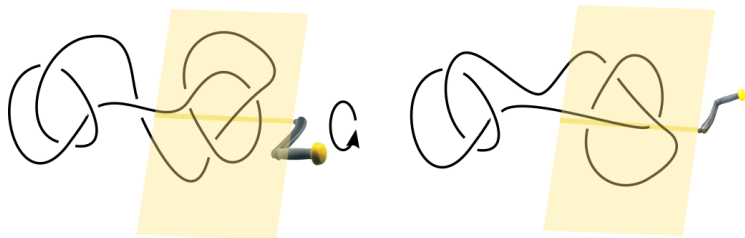
Conjecture de Tait

Si un noeud n'est pas réduit, on peut le représenter avec un croisement de moins en retournant sa partie droite



Conjecture de Tait

Si un noeud n'est pas réduit, on peut le représenter avec un croisement de moins en retournant sa partie droite

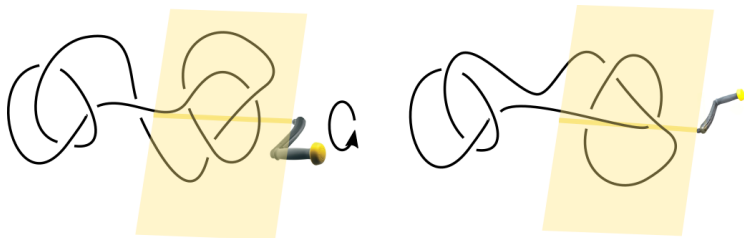


Conjecture de Tait (1876): tout nœud alterné et réduit ne peut pas être représenté avec moins de croisements.

En particulier: il ne peut pas être dénoué!

Conjecture de Tait

Si un noeud n'est pas réduit, on peut le représenter avec un croisement de moins en retournant sa partie droite



Conjecture de Tait (1876): tout nœud alterné et réduit ne peut pas être représenté avec moins de croisements.

En particulier: il ne peut pas être dénoué!

Il faudra plus de 100 ans pour démontrer la conjecture de Tait.

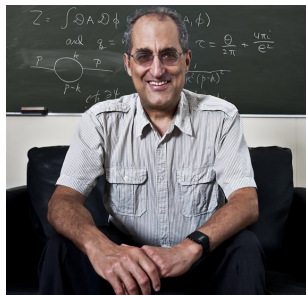
Deuxième période: 1985-1989

Après la physique qui inspire les maths, les maths qui inspirent la physique.



Vaughan Jones (1952-)

Tous les deux reçoivent la Médaille Fields en 1990



Edward Witten (1951-)

Le polynôme de Jones

En étudiant les algèbres de Von Neumann, Jones découvre comment associer à un nœud un nombre complexe dépendant de façon simple d'un paramètre q .



$$1$$



$$-q^{-4} + q^{-3} + q^{-1}$$



$$q^2 + q^{-2} - q - q^{-1} + 1$$



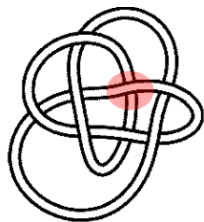
$$-q^{-7} + q^{-6} - q^{-5} + q^{-4} + q^{-2}$$



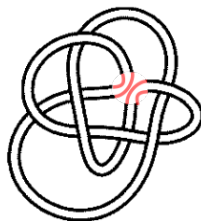
$$-q^{-6} + q^{-5} - q^{-4} + 2q^{-3} - q^{-2} + q^{-1}$$

etc.

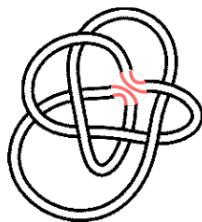
Calcul du polynôme



P



P_+



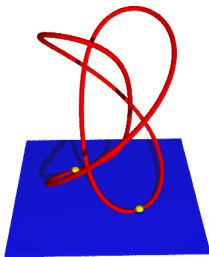
P_-

Le polynôme de Jones est la seule quantité qui vérifie la relation d'écheveau:

$$(q^{1/2} - q^{-1/2})P = q^{-1}P_+ - qP_-$$

Interprétation de E.Witten

Si on balaye un nœud avec un plan, on lit l'histoire de la création et de l'annihilation de particules dans ce plan.



Le polynôme de Jones avec $q = e^{2i\pi\hbar}$ est l'amplitude (probabilité) qu'un tel événement ait lieu à partir de rien.

L'étrange monde quantique

De la même manière que le chat de Schrödinger dans sa boîte est dans une **superposition** d'états *mort* et *vivant*, le monde plat décrit par E. Witten est le théâtre d'une **superposition** d'événements correspondant à tous les nœuds possibles, chacun ayant une probabilité d'avoir lieu donnée par le polynôme de Jones.



Il s'agit d'un *faux* monde au sens où il n'a pas de réalité physique mais il est logiquement cohérent.

L'étrange monde quantique

De la même manière que le chat de Schrödinger dans sa boîte est dans une **superposition** d'états *mort* et *vivant*, le monde plat décrit par E. Witten est le théâtre d'une **superposition** d'événements correspondant à tous les nœuds possibles, chacun ayant une probabilité d'avoir lieu donnée par le polynôme de Jones.



Il s'agit d'un *faux* monde au sens où il n'a pas de réalité physique mais il est logiquement cohérent.

- ▶ *Les bonnes mauvaises idées sont très rares, et une bonne mauvaise idée qui rivaliserait même de loin avec la majesté de la théorie des cordes n'a jamais été vue.*

Conséquences mathématiques

Conjecture de Tait (1876): tout nœud alterné et réduit ne peut pas être représenté avec moins de croisements.

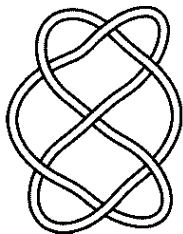
Théorème: (1987) Si K est un nœud alterné et réduit à n croisements, alors la différence entre le plus haut degré et le plus bas degré de son polynôme de Jones est n .

Conséquences mathématiques

Conjecture de Tait (1876): tout nœud alterné et réduit ne peut pas être représenté avec moins de croisements.

Théorème: (1987) Si K est un nœud alterné et réduit à n croisements, alors la différence entre le plus haut degré et le plus bas degré de son polynôme de Jones est n .

Exemple: le nœud 7_4



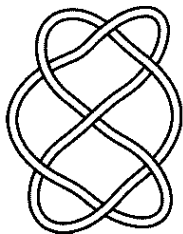
$$-q^8 + q^7 - 2q^6 + 3q^5 - 2q^4 + 3q^3 - 2q^2 + q^1$$

Conséquences mathématiques

Conjecture de Tait (1876): tout nœud alterné et réduit ne peut pas être représenté avec moins de croisements.

Théorème: (1987) Si K est un nœud alterné et réduit à n croisements, alors la différence entre le plus haut degré et le plus bas degré de son polynôme de Jones est n .


Exemple: le nœud 7_4




$$-q^8 + q^7 - 2q^6 + 3q^5 - 2q^4 + 3q^3 - 2q^2 + q^1$$

Corollaire: La conjecture de Tait est vraie.

Problèmes ouverts

Conjecture: Un nœud différent de  a-t-il un polynôme de Jones différent de 1? (vérifiée par ordinateur jusqu'à 22 croisements)


Problèmes ouverts

Conjecture: Un nœud différent de  a-t-il un polynôme de Jones différent de 1? (vérifiée par ordinateur jusqu'à 22 croisements)

Prolongements:

- ▶ D'après Thurston, les nœuds (ou plutôt leur complémentaire) sont des objets géométriques avec en particulier un volume. Comment le relier au polynôme de Jones? Il y a bien une formule conjecturale proposée il y a 20 ans, toujours ouverte.
- ▶ Dès les années 1960, on a observé une analogie mystérieuse entre nœuds et les nombres premiers. De façon très abstraite, les nombres premiers seraient plongés dans l'ensemble des nombres relatifs comme un nœud dans une sphère tridimensionnelle.

Problèmes ouverts

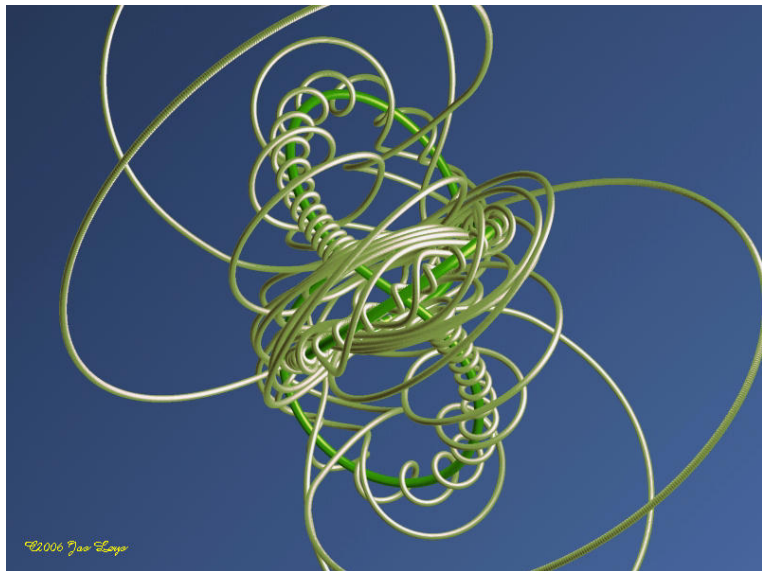
Conjecture: Un nœud différent de  a-t-il un polynôme de Jones différent de 1? (vérifiée par ordinateur jusqu'à 22 croisements)

Prolongements:

- ▶ D'après Thurston, les nœuds (ou plutôt leur complémentaire) sont des objets géométriques avec en particulier un volume. Comment le relier au polynôme de Jones? Il y a bien une formule conjecturale proposée il y a 20 ans, toujours ouverte.
- ▶ Dès les années 1960, on a observé une analogie mystérieuse entre nœuds et les nombres premiers. De façon très abstraite, les nombres premiers seraient plongés dans l'ensemble des nombres relatifs comme un nœud dans une sphère tridimensionnelle.

Conclusion

Les nœuds inspirent, inspirons-nous des nœuds!



©2006 John Ewing