# Preuve du théorème de classification de Dieudonné

* $k$ corps parfait de car. $p$.

$CW^u = \varinjlim_{n\geq 1} W_n$

$\mathcal{C}^u$ = catégorie des $k$-schémas en groupes commutatifs finis unipotents.

$G \in \mathcal{C}^u$, $\mathbb{D}(G) = \mathrm{Hom}(G, CW^u) = W(k)$-module + F et V.

* **Lemme**: $\mathrm{End}(\mathbb{G}_a) = \underbrace{k[F]}_{\text{anneau non-commutatif}}$ où $F \in \mathrm{End}(\mathbb{G}_a)$ est le Frobenius de $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a^{(p)}$.

$= \{\sum_{i\geq 0} a_i F^i \,/\, a_i \in k,\ a_i = 0 \text{ pour } i \gg 0\}$

+ relation $\forall \lambda \in k$, $F\lambda = \lambda^p F$

$\to$ facile

* $G = \mathrm{Spec}(A)$, ~~un~~ $k$-schéma en groupes commutatif affine.

$\Delta : A \to A \otimes_k A$ la comultiplication.

Formons le complexe $A \xrightarrow{\partial} A\otimes A \xrightarrow{\partial} A \otimes A \otimes A$

où $\partial a = 1\otimes a - \Delta a + a \otimes 1$

$\partial(a_1 \otimes a_2) = 1 \otimes a_1 \otimes a_2 - \Delta a_1 \otimes a_2 + a_1 \otimes \Delta a_2 - a_1 \otimes a_2 \otimes 1$

$H^2_{sym}(A) = \{ x \in (A\otimes A)^{\sigma_2} \,/\, \partial x = 0\} / \partial A$

agit par permutation des composantes de $A \otimes A$

**Lemme :** $\underbrace{\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_a)}_{\text{extensions de sens fppf}} = H^2_{sym}(A)$

dém : Si $0 \to \mathbb{G}_a \to E \to G \to 0$ est une extension de faisceaux fppf alors

$E$ est un $\mathbb{G}_a$-torseur au dessus de $G$. La classe de ce $\mathbb{G}_a$-torseur est donnée

par un élément de $H^1_{fppf}(G, \mathbb{G}_a) = H^1_{Zar}(G, \mathcal{O}_G) = 0$

$G$ affine

descente fidèlement plate des faisceaux quasi-cohérents : si $\mathcal{M} = \mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent, $\underline{\mathcal{M}}$ = faisceau fppf associé alors

$H^i_{fppf}(S, \underline{\mathcal{M}}) = H^i_{Zar}(S, \mathcal{M})$.

Donc, $E \simeq \mathbb{G}_a \times G$ i.e. $\exists$ section $\begin{tikzcd} E \arrow[r] & G \arrow[l, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$.

Pour une telle section soit $G \times G \xrightarrow{c} \mathbb{G}_a$

$$(x,y) \longmapsto s(x+y) - s(x) - s(y)$$

$$c \in \Gamma(G \times G, \mathcal{O}_{G\times G}) = A \otimes A \text{ et } c(x,y) = c(y,x) \Rightarrow c \in (A \otimes A)^{\mathfrak{S}_2}$$

On vérifie aisément que cela donne un iso. $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} H^2_{sym}(A)$. □

Résultat clef

**Prop (Lazard) :** Soit $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a)$ la classe de l'extension $0 \to \mathbb{G}_a \to W_2 \to \mathbb{G}_a \to 0$.

Considérons $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a)$ comme un $\mathrm{End}(\mathbb{G}_a)$-module à droite via

$\forall f \in \mathrm{End}(\mathbb{G}_a)$, $\forall c \in \mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a)$, $c.f = f^* c$.

$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a)$ ↺ $\mathrm{End}(\mathbb{G}_a)$

Alors, $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a)$ est un $k[F]$-module libre de rang 1 de base $\xi$.

<u>dém</u>: Le complexe à considérer est

$$k[T] \xrightarrow{\partial} \{P \in k[X,Y] \,/\, P(X,Y) = P(Y,X)\} \xrightarrow{\partial} k[X,Y,Z]$$

$$P \longmapsto P(Y) - P(X+Y) + P(X)$$

$$P \longmapsto P(Y,Z) - P(X+Y,Z) + P(X,Y+Z) - P(X,Y)$$

Si $n \geq 1$ notons $C_n(X,Y) = \begin{cases} (X+Y)^n - X^n - Y^n & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance de } p \\ \dfrac{(X+Y)^n - X^n - Y^n}{p} & \text{si } n \text{ est une puissance de } p \end{cases}$

$\forall n \geq 1$, $C_n \in \ker \partial$. De plus si $n$ n'est pas une puissance de $p$, $C_n = \partial(T^n)$.

Il faut alors montrer que * si $P$ homogène de degré $n$ vérifie $P(X,Y) = P(Y,X)$ et $\partial P = 0$ alors $P \in k.C_n$

* Si $n$ est une puissance de $p$, $C_n \notin \operatorname{Im} \partial$. } facile

problème d'algèbre linéaire : montrer que $\dim_k \ker \partial_{|\text{poly homogènes de degré } n}= 1$

→ Exo.

On conclut en constatant que $[C_p(X,Y)] = \xi \in \operatorname{Ext}^1(G_a, G_a)$ □

**<u>Prop</u>:** Soit $G \subset G_a$ un sous-groupe algébrique. Alors, l'application

$$\operatorname{Ext}^1(G_a, G_a) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(G, G_a)$$

est surjective.

<u>dém</u>: $G = \operatorname{Spec}(k[T]/(f(T)))$ où $\deg f = n$, $n = |G|$. (si $G = G_a$ la prop est triviale)

On utilise encore le complexe pour calculer $\operatorname{Ext}^1(G, G_a)$.

~~$A = k[T]/(f(T))$~~

~~Soit $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i \bmod (f(T)) \in k[T]/(f(T)) = A$~~

~~tel que $\partial g = 0$ i.e.~~

~~Soit $g = \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i \in k[T]$ tel que $\bar{g}$, $g \bmod (f)$~~

---

Soit $g(X,Y) = \sum_{\substack{0\le i\le n-1 \\ 0\le j\le n-1}} a_{ij} X^i Y^j \in k[X,Y]$

tel que $\underbrace{\bar{g}}_{g \bmod (f(X),f(Y)) \in A\otimes A}$ vérifie $\partial\bar{g} = 0$ et $\bar{g} \in (A\otimes A)^{\sigma_2}$

Puisque $\Delta T = T\otimes 1 + 1\otimes T$ "n'augmente pas le degré" on a $\partial g = 0$ et $g(X,Y) = g(Y,X)$.

i.e. $g$ définit un cocycle associé à $\mathbb{G}_a$ $\square$

**Prop:** Soit $G \subset \mathbb{G}_a$ un sous-groupe. Alors

(i) La projection $W_n \twoheadrightarrow \mathbb{G}_a$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1(G, W_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_a)$$

(ii) L'injection $G \subset \mathbb{G}_a$ induit une surjection

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, W_n) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1(G, W_n)$$

(iii) Soit $\xi_n \in \mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, W_n)$ la classe de l'extension

$$0 \to W_n \to W_{n+1} \to \mathbb{G}_a \to 0$$

Alors, $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, W_n)$ est un $\underbrace{k[F]}_{\mathrm{End}(\mathbb{G}_a)}$-module libre de rang 1, de base $\xi_n$. module à droite

<u>dém</u>: Le cas $n=1$ a été établi précédemment.

Montrons les assertions par récurrence sur $n$.

Supposons démontrées les assertions (i), (ii) et (iii) au rang $n$.

Appliquons $\mathrm{Hom}(G, -)$ à la suite exacte $0 \to W_n \to W_{n+1} \to \mathbb{G}_a \to 0$

$$\uparrow$$

$\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_a, -)$

puis

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(G, W_n) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{Ext}^1(G, W_{n+1}) \arrow[r, "\kappa"] & \mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_a) \\
\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, W_n) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[u, "\beta"] & \mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, W_{n+1}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\iota"] & \mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a) \arrow[u, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

diagramme commutatif à lignes exactes

* $\alpha$ est surjectif d'après le cas $n=1$ du point (i) (la prop. précédente)

$\beta$ est surjectif par hypothèse de récurrence (point (ii))

* Le morphisme $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, W_n) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, W_{n+1})$ est $\mathrm{End}(\mathbb{G}_a)$-linéaire

Par hypothèse de récurrence $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, W_n) = \xi_n \cdot k[F]$

D'après le diagramme qui suit on a $\gamma(\xi_n) = 0$ :

section du push-out de l'extension de classe $\xi_n$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_n \arrow[r] \arrow[d] & W_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{G}_a \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_{n+1} \arrow[r] & * \arrow[r] & \mathbb{G}_a \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

} extension de classe $\xi_n$

} " " " $\gamma(\xi_n)$

Donc, $\gamma = 0$ et $\delta$ est injectif.

* Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & W_{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{G}_a \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_a \arrow[r] & W_2 \arrow[r] & \mathbb{G}_a \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

montre que $\delta(\xi_{n+1}) = \xi_1$. Puisque $\delta$ est $\mathrm{End}(\mathcal{O}_{\bar a})$-linéaire et $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_{\bar a}) = \xi_1 \cdot k[F]$, $\delta$ est surjectif. Donc, $\delta$ = isomorphisme.

* $\gamma = 0$ + $\beta$ surjectif $\Rightarrow$ $\varepsilon = 0$ $\Rightarrow$ $\kappa$ injectif.

*
$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(G, W_{n+1}) \arrow[r, hook, "\kappa"] & \mathrm{Ext}^1(G, \mathcal{O}_a) \\
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_a, W_{n+1}) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\sim"', "\delta"'] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_{\bar a}) \arrow[u, two heads, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

$\kappa$ injectif
$\alpha$ surjectif
$\delta$ iso.

$\Rightarrow \begin{cases} \iota \text{ surjectif i.e. le point (ii) au cran } n+1. \\ \kappa \text{ iso. i.e. le point (i) au cran } n+1. \end{cases}$

* Reste le point (iii) : il résulte de $\delta(\xi_{n+1}) = \xi_1$, de ce que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_{\bar a})$ est un $k[F]$-module libre de rg. 1 de base $\xi_1$ et de ce que $\delta$ est bijectif.

$\square$

**Prop.** Soit une suite exacte de $k$-schémas en groupes commutatifs

$$0\to G_1\to G_2\to G_3\to 0$$

telle que $G_3\subset \mathbb{G}_a$. Pour tout morphisme $f: G_1\to W_n$, la composée

$$G_1\xrightarrow{f} W_n\hookrightarrow W_{n+1}$$

s'étend en un morphisme $G_2\to W_{n+1}$.

dém:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(G_2,W_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(G_1,W_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(G_3,W_n) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(G_2,W_{n+1}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(G_1,W_{n+1}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(G_3,W_{n+1})
\end{tikzcd}$$

Il suffit de voir que le morphisme $\mathrm{Ext}^1(G_3,W_n)\xrightarrow{\alpha}\mathrm{Ext}^1(G_3,W_{n+1})$ est nul. Mais il y a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(G_3,W_n) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Ext}^1(G_3,W_{n+1}) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Ext}^1(G_3,\mathbb{G}_a) \arrow[r, "0"'] & \mathrm{Ext}^1(G_3,\mathbb{G}_a)
\end{tikzcd}$$

induit par $W_n\twoheadrightarrow \mathbb{G}_a$ iso. d'après le point (i) de la prop. précédente

induit par $W_{n+1}\twoheadrightarrow \mathbb{G}_a$ iso. d'après le point (i) de la prop. précédente

nul car induit par

$$\begin{tikzcd}
W_n \arrow[r, hook] \arrow[d] & W_{n+1} \arrow[d] \\
\mathbb{G}_a \arrow[r, "0"] & \mathbb{G}_a
\end{tikzcd}$$

Donc, $\alpha=0$. $\square$

<u>Prop:</u> Soit $G$ un $k$-schéma en groupes commutatif possédant une filtration

$$0 = G_0 \subsetneq \dots \subsetneq G_n \text{ telle que } \forall i,\ G_i/G_{i-1} \hookrightarrow \mathbb{G}_a.$$

Il existe alors une résolution

$$0 \to G \to W_n^{\oplus m} \to W_{n'}^{\oplus m'}$$

<u>dem:</u> * Montrons d'abord qu'il existe un monomorphisme

$$G \hookrightarrow W_n^{\oplus m} \text{ pour des entiers } n, m.$$

On procède par récurrence sur la longueur d'une filtration telle que dans la proposition. Soit une suite exacte

$$0 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{v} G_3 \to 0$$

telle que $G_3 \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathbb{G}_a$ et $G_1 \overset{\beta}{\hookrightarrow} W_n^{\oplus m}$. D'après la proposition précédente $\beta$ s'étend en un morphisme $\gamma : G_2 \to W_{n+1}^{\oplus m}$ via l'inclusion canonique $W_n^{\oplus m} \hookrightarrow W_{n+1}^{\oplus m}$. Alors, le morphisme

$$G_2 \xrightarrow{(\gamma, \alpha\circ v)} W_{n+1}^{\oplus m} \oplus \mathbb{G}_a$$

où $v : G_2 \to G_3$, est injectif. Par composition avec l'inclusion canonique $\mathbb{G}_a \hookrightarrow W_{n+1}$ cela fournit un monomorphisme

$$G_2 \hookrightarrow W_{n+1}^{\oplus m+1}$$

* Pour conclure il suffit de constater que $W_n^{\oplus m}/G$ satisfait aux m̂ conditions que $G$ et d'appliquer la proposition précédente.

# Calcul des endomorphismes de $W_n$

$$\mathcal{D} = \underbrace{W(k)[F,V]}_{\text{non-commutatif}} = \text{anneau de Dieudonné}$$

relations $\begin{cases} \forall \lambda \in W(k), \quad F\lambda = \lambda^\sigma F \\ \qquad\qquad\qquad\ \ \lambda V = V\lambda^\sigma \\ FV = VF = p \end{cases}$

$\mathcal{D} \to \mathrm{End}(CW^u)$ morphisme naturel d'anneaux.

Il induit par restriction $\mathcal{D} \to \mathrm{End}(W_n)$ mais puisque $W_n$ est annulé par $V^n$

ce morphisme se factorise en $\mathcal{D}/\underbrace{\mathcal{D}V^n}_{\text{idéal bilatère}} \longrightarrow \mathrm{End}(W_n)$

Prop: Le morphisme d'anneaux $\mathcal{D}/\mathcal{D}V^n \to \mathrm{End}(W_n)$ est un isomorphisme.

dem: Récurrence sur $n$.

* Le cas $n=1$ se réduit à vérifier que l'inclusion $k[F] \hookrightarrow \mathcal{D}$ composée avec la projection $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{D}V$ est un isomorphisme ce qui ne pose pas de problème.
* Supposons le cas $n$ connu. Appliquons $\mathrm{Hom}(-, W_{n+1})$ à la suite exacte

$$0 \to W_n \to W_{n+1} \to G_a \to 0$$

On obtient:

$$0 \to \mathrm{Hom}(\widehat{G}_a, W_{n+1}) \to \mathrm{Hom}(W_{n+1}, W_{n+1}) \to \mathrm{Hom}(W_n, W_{n+1})$$

Or puisque $W_n$ est annulé par $V^n$ et $W_n = \ker V^n_{W_{n+1}}$,

$$\mathrm{Hom}(W_n, W_{n+1}) = \mathrm{Hom}(W_n, W_n).$$

Mais l'application $\mathrm{Hom}(W_{n+1}, W_{n+1}) \to \mathrm{Hom}(W_n, W_n)$ est surjective

(cf. ~~lemme~~ proposition précédente
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[r] \arrow[d, "\exists"] & G_3 \arrow[r] & 0 \\ & W_n \arrow[r, hook] & W_{n+1} & & \end{tikzcd}$$
)

On a alors un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\widehat{G}_a, W_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{End}(W_{n+1}) \arrow[r] & \mathrm{End}(W_n) \arrow[r] & 0 \\ & \mathrm{Hom}(\widehat{G}_a, \widehat{G}_a) & & & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{D}V^n/\mathcal{D}V^{n+1} \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d, equal] & \mathcal{D}/\mathcal{D}V^{n+1} \arrow[r] \arrow[uu] & \mathcal{D}/\mathcal{D}V^n \arrow[r] \arrow[uu, "\simeq"'] & 0 \\ & k[F] & & & \end{tikzcd}$$

} exacte

$\simeq$ iso. par hypothèse de récurrence

} suite exacte (calcul explicite)

$\Rightarrow$ la flèche verticale du milieu est un iso. $\square$

$$* \ \mathrm{End}(CW^u) \overset{\text{résultat de la prop. précédente}}{\simeq} \text{complété } V\text{-adique de } \mathcal{D} = \text{anneau de Cartier } \mathbb{E}_k$$

$$= \Big\{ \underbrace{\sum_{n,m \geq 0} V^n [a_{n,m}] F^m}_{\text{écriture unique}} \Big/ a_{n,m} \in k \text{ et } \forall n, \{m / a_{n,m} \neq 0\} \text{ est fini} \Big\}$$

# Preuve du théorème de classification

On montre l'énoncé plus général suivant.

**Déf**: Un $k$-schéma en groupes commutatifs de type fini est unipotent

$\Updownarrow$

Il possède une filtration $0 = G_0 \subseteq \dots \subseteq G_r = G$
tq. $\forall i$, $G_i/G_{i-1} \subset \mathbb{G}_a$

**Rem**: Tout $k$-schéma en groupes unipotent est annulé par une puissance de $V$.
On peut montrer que la réciproque est vraie.

**Th**: Le foncteur $\mathbb{D} : \{k\text{-sch. en gp. commutatifs unipotents}\} \longrightarrow \{D\text{-modules de type fini annulés par une puissance de } V\}$

$$G \longmapsto \mathrm{Hom}(G, CW^u)$$

est une (anti) équivalence de catégories.

Il est alors facile d'en déduire l'énoncé original i.e. il faut montrer que si $G$ est unipotent, $G$ fini $\Leftrightarrow$ $\mathbb{D}(G)$ est un $W(k)$-module de longueur finie

**Dém**: Commençons par montrer que $\mathbb{D}$ est exact.

Il est clair que $\mathbb{D}$ est exact à gauche. Il faut donc montrer que si

$G' \subset G$ avec $G'$ et $G$ unipotents

alors $\mathbb{D}(G) \twoheadrightarrow \mathbb{D}(G')$. Mais, $G/G'$ étant unipotent, $\exists$ filtration

$$G' = G'_0 \subset \dots \subset G'_r = G$$

telle que $\forall i$, $G'_i/G'_{i-1} \hookrightarrow \mathbb{G}_a$.

Or on a vu (cf. une des prop. précédentes) que tout morphisme

$$G'_{i-1} \xrightarrow{f} W_n$$

est tel que la composée $G'_{i-1} \xrightarrow{f} W_n \xhookrightarrow{can} W_{n+1}$ s'étend à $G'_i$.

On en déduit facilement que $\mathbb{D}(G) \twoheadrightarrow \mathbb{D}(G')$

* Montrons que $\mathbb{D}$ est pleinement fidèle :

$\mathrm{Hom}(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbb{D}(H), \mathbb{D}(G))$.

Considérons d'abord le cas où $H = W_n$ pour un entier $n \geq 1$.

Alors, $\mathrm{Hom}(G, W_n) = \ker\Big(V^n : \underbrace{\mathrm{Hom}(G, CW^u)}_{\mathbb{D}(G)} \xrightarrow{V^n} \underbrace{\mathrm{Hom}(G, CW^u)}_{\mathbb{D}(G)}\Big)$

car $W_n = \ker(V^n : CW^u \to CW^u)$

De plus $\mathbb{D}(W_n) = \mathcal{D}/\mathcal{D}.V^n$ d'après le calcul précédent de $\mathrm{End}(W_n)$.

Or $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}.V^n, \mathbb{D}(G)) = \ker\left(\mathbb{D}(G) \xrightarrow{V^n} \mathbb{D}(G)\right)$ $\Rightarrow$ le résultat si $H = W_n$.

Passons maintenant au cas général.

$\exists$ résolution $0 \to H \to W_n^{\oplus m} \xrightarrow{f} W_{n'}^{\oplus m'}$

iso par le cas précédent

induit

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(G, H) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(G, W_n^{\oplus m}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}(G, W_{n'}^{\oplus m'}) \arrow[d, "\simeq"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathbb{D}(H), \mathbb{D}(G)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathbb{D}(W_n^{\oplus m}), \mathbb{D}(G)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathbb{D}(W_{n'}^{\oplus m'}), \mathbb{D}(G)) \end{tikzcd}$$

suite exacte car $\mathbb{D}$ exact $\Rightarrow$ $\mathbb{D}(W_{n'}^{\oplus m'}) \to \mathbb{D}(W_n^{\oplus m}) \to \mathbb{D}(H) \to 0$ est exacte

$\Rightarrow$ résultat.

* Reste l'essentielle surjectivité. Mais si $M$ est un $\mathcal{D}$-module de type fini ~~et~~ annulé par une puissance de $V$, utilisant le fait que $\mathcal{D}$ est un anneau noethérien (exo.), $M$ possède une résolution

$$\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}.V^n\right)^a \xrightarrow{u} \left(\mathcal{D}/\mathcal{D}.V^n\right)^b \to M \to 0$$

$u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\left(\mathcal{D}/\mathcal{D}.V^n\right)^a, \left(\mathcal{D}/\mathcal{D}.V^n\right)^b\right) = \mathrm{Hom}\left(W_n^{\oplus b}, W_n^{\oplus a}\right)$

i.e. $\exists f \in \mathrm{Hom}(W_n^{\oplus b}, W_n^{\oplus a})$ tel que $\mathbb{D}(f) = u$

Soit alors $G = \ker f$ qui est bien un schéma en groupes de t.f. unipotent.

$$0 \to G \to W_n^{\oplus b} \xrightarrow{f} W_n^{\oplus a}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathbb{D}(W_n^{\oplus a}) \to \mathbb{D}(W_n^{\oplus b}) \to \mathbb{D}(G) \to 0$$

exactitude de $\mathbb{D}$

$$\Rightarrow \mathbb{D}(G) = M. \qquad \square$$