QUELQUES RÉSULTATS ET CONJECTURES CONCERNANT LA COURBE

LAURENT FARGUES

Introduction

Résumé. On commence par établir quelques propriétés de la version rigide analytique de la ≪ courbe ≫ introduite dans nos travaux en commun avec J.-M. Fontaine. On montre ensuite comment construire à partir de phi-modules au sens de Breuil-Kisin des modifications de fibrés sur cette courbe. Enfin, on formule une conjecture concernant cette construction.

Abstract. We first establish some properties of the rigid analytic version of the "curve" we introduced in our joint work with J.-M. Fontaine. We then show how to construct some modifications of vector bundles on this curve from some phi-modules in Breuil-Kisin sens. Finally, we enounce a conjecture about this construction.

Soit E un corps local localement compact de caractéristique résiduelle p et F un corps perfectoïde de caractéristique p extension du corps résiduel de E ([13]). Dans notre travail en commun avec J.M.-Fontaine ([2], cf. [5],[4] et [3] pour une introduction) nous avons défini une ≪ courbe ≫

$$X_{F,E}$$

canoniquement associée à la donnée de E et F. Il s'agit d'un E-schéma noethérien intègre régulier de dimension 1 i.e. un recollement d'un nombre fini de spectres d'anneaux de Dedekind. Cette courbe est complète au sens où tout point fermé $x \in X$ possède naturellement un degré $\deg(x) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ égal à 1 si F est algébriquement clos et le degré d'un diviseur principal sur $X_{F,E}$ est nul

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = 0.$$

Nous avons de plus donné une classification des fibrés vectoriels sur $X_{F,E}$. Plus précisément, lorsque F est algébriquement clos cette classification généralise celle de Grothendieck des fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^1$, quitte à admettre des pentes rationnelles. Cela signifie que pour toute pente $\lambda \in \mathbb{Q}$ on dispose d'un fibré stable de pente λ, $\mathcal{O}(\lambda)$, sur $X_{F,E}$ et le théorème de classification s'énonce en : tout fibré vectoriel sur $X_{F,E}$ est isomorphe à une somme directe de $\mathcal{O}(\lambda), \lambda \in \mathbb{Q}$. Les fibrés semi-stables de pente λ fixée sont quant à eux isomorphes à une somme de $\mathcal{O}(\lambda)$. Lorsque F n'est plus algébriquement clos la classification s'énonce en termes de descente galoisienne à partir du cas algébriquement clos. Au niveau des fibrés semi-stables de pente 0 elle dit que l'on dispose d'une équivalence ≪ du type Narasimhan-Seshadri ≫ entre fibrés semi-stables de pente 0 et E-systèmes locaux sur $\mathrm{Spec}(F)_{\text{ét}}$.

Structure analytique sur la courbe et GAGA. Le but de cette note est double. Tout d'abord, il est apparu dans nos travaux avec Fontaine que la courbe, bien qu'algébrique, devrait posséder une structure analytique sur E. Plusieurs indices nous ont mené à cette conclusion. Tout d'abord, si $x \in |X|$ est un point fermé, le corps résiduel $k(x)|E$ est naturellement un corps valué complet perfectoïde satisfaisant $k(x)^\flat|F$ avec $\deg(x) = [k(x)^\flat : F]$. De plus, nous avons exhibé une bijection naturelle

$$|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$$

Date: December 9, 2014.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14L05, 14G22.

Key words and phrases. ggg.

The author acknowledges support from ANR-10-BLAN-0114 "ArShiFo".

où $|Y|$ est un ensemble d'idéaux maximaux fermés d'une E-algèbre de Fréchet B « de fonctions holomorphes de la variable π à coefficients dans F » et φ un Frobenius. Nous avons donc conjecturé avec Fontaine que la courbe est uniformisée par un espace analytique qu'il restait à définir. Nous nous attelons à cette tâche dans la section 2 de cet article. Plus précisément, nous construisons un E-espace adique

$$Y^{ad}$$

au sens de Huber vérifiant

$$\Gamma(Y^{ad}, \mathcal{O}_{Y^{ad}}) = \mathrm{B}$$

et muni d'un Frobenius φ agissant de façon totalement discontinue sans points fixes sur Y^{ad}. Cela nous permet de définir un E-espace adique

$$X^{ad}_{F,E} := Y^{ad}/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

qui est « l'analytifié » de la courbe. La courbe algébrique se retrouve alors comme

$$X_{F,E} = \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{d\geq 0}\Gamma\big(X^{ad}_{F,E}, \mathcal{O}(d)\big)\Big)$$

où $\mathcal{O}(1)$ est un fibré « ample » sur $X^{ad}_{F,E}$. Supposons que $E|\mathbb{Q}_p$ i.e. est de caractéristique 0. Soit $E_\infty|E$ une extension algébrique arithmétiquement profinie. D'après la théorie du corps des normes de Fontaine-Wintenberger le corps valué $\widehat{E}_\infty$ est perfectoïde. Nous montrons qu'après extension des scalaires à $\widehat{E}_\infty$, l'espace adique $X^{ad}_{F,E}$ devient perfectoïde et on exprime dans la section 2.3 l'espace perfectoïde basculé

$$\big(X^{ad}_{F,E}\hat{\otimes}_E\widehat{E}_\infty\big)^\flat$$

comme étant

$$X^{ad}_{F,\mathbb{F}_q((\underline{\pi}))}\hat{\otimes}\widehat{E}^\flat_\infty$$

où $\mathbb{F}_q((\underline{\pi}))\subset \widehat{E}^\flat_\infty$ est le corps des normes non-parfait. Lorsque F est algébriquement clos et E_∞ est l'extension engendrée par les points de torsion d'un groupe de Lubin-Tate $\mathscr{G}$ sur $\mathcal{O}_E$, nous avons donné avec Fontaine une description des points fermés de $|X_{F,E}|$ comme étant

$$\big(\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)\smallsetminus\{0\}\big)/E^\times$$

l'espace projectif sur le E-espace de Banach $\mathscr{G}(\mathcal{O}_F)$. Nous montrons dans la section 2.5 que cette bijection correspond à un isomorphisme naturel d'espaces perfectoïdes

$$\big(Y^{ad}_{F,E}\hat{\otimes}\widehat{E}_\infty\big)^\flat \simeq \varprojlim_{\times\pi}\ \mathcal{G}^{ad}_{\mathcal{O}_F}$$

où $\mathcal{G}^{ad}_{\mathcal{O}_F}$ est la fibre générique sur $\mathcal{O}_F$-schéma formel formel $\mathcal{G}_{\mathcal{O}_F}$, une boule ouverte de dimension 1, et l'action de $\mathrm{Gal}(E_\infty|E)$ sur le membre de gauche correspond via le caractère de Lubin-Tate à l'action de $\mathcal{O}_E^\times$ sur celui de droite.

La similitude frappante entre notre classification des fibrés sur la courbe et la classification de Kedlaya ([10]) est l'objet de la section 3. Nous montrons que l'on peut interpréter la concordance entre ces théorèmes comme une équivalence de type G.A.G.A. entre faisceaux cohérents

$$\mathrm{Coh}_{X_{F,E}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}_{X^{ad}_{F,E}}.$$

φ-modules de Kisin et modifications de fibrés. Le second but de cet article est d'établir les premières étapes vers un analogue de la théorie de Kisin ([11]) sur la courbe. C'est l'objet de la section 4. Le cas traité par Kisin correspond à celui d'un corps local de caractéristique p, $k((u))$, par opposition au cas d'un corps perfectoïde F que nous étudions. Nous traitons en fait la théorie de deux points de vue : le point de vue « analytique » proche du point de vue originel de Kisin où nous utilisons l'espace Y^{ad} et les fibrés sur celui-ci et le point de vue plus « algébrique » n'utilisant pas le théorème de Kedlaya qui est celui de Genestier et Lafforgue dans [6] et [7]. Ils nous semble que les deux points de vue se complètent et méritent d'être traités. On se limite au cas F algébriquement clos afin de ne pas prendre de risque quant à la conjecture que l'on formule, même s'il est fort probable qu'une théorie existe lorsque F est perfectoïde quelconque.

Soit donc

$$\mathfrak{S} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$$

muni de son Frobenius φ qui correspond à l'anneau $W(k)[\![u]\!]$ muni du Frobenius $u \mapsto u^p$ du point de vue de Kisin. Un élément primitif est un $x = \sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n \in \mathfrak{S}$ vérifiant $x_0 \neq 0$ et pour un entier d, $x_d \in \mathcal{O}_F^\times$. Les éléments primitifs sont les analogues du point de vue de Kisin des éléments de la forme une unité de $W(k)[\![u]\!]$ fois une puissance du polynôme d'Esienstein $E(u)$. On note

$$\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}$$

la catégorie des couples (M,φ) où M est un $\mathfrak{S}$-module libre de rang fini et $\varphi : M \to M$ un morphisme semi-linéaire de conoyau annulé par un élément primitif. Soit

$$\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}]$$

la catégorie localisée obtenue en inversant la partie multiplicative formée des éléments primitifs (def.4.4). Cette localisation est indispensable contrairement au cas de la théorie classique où un point de $|Y|$ est fixé dès le début correspondant au choix du polynôme d'Eisenstein $E(u)$ (cf. exemple 4.3). Néanmoins, on montre que quitte à choisir un certain domaine fondamental pour le quotient $|Y| \to |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}$, la catégorie localisée précédente est équivalente à une sous-catégorie pleine $\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}^{\rho}$ de $\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}$ (prop.4.6). Soit maintenant

$$\mathscr{M}odif_X^{\geq 0}$$

la catégorie formée des modifications effectives

$$\mathscr{E}_1 \hookrightarrow \mathscr{E}_2$$

de fibrés sur $X := X_{F,E}$ i.e. les morphismes injectifs de fibrés de conoyau un faisceau cohérent de torsion. Une telle modification est dite admissible si $\mathscr{E}_1$ est semi-stable de pente 0.

Construction algébrique. On construit dans la section 4.3 un foncteur contravariant

$$\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}] \longrightarrow \mathscr{M}odif_X^{\geq 0,ad} \tag{1}$$

par une méthode analogue à celle utilisée dans [7]. Du point de vue « classique », à un φ-module de Kisin sur $W(k)[\![u]\!]$ on associe un module de Dieudonné en posant $u = 0$. Le point clef dans notre construction consiste en l'utilisation de l'anneau

$$\overline{\mathrm{B}}$$

que nous avons introduit avec Fontaine dans [2]. Il s'agit du quotient de $\mathfrak{S}\big[\frac{1}{\pi}\big]$ par les éléments $\sum_n [x_n]\pi^n$ vérifiant : il existe une constante $C > 0$ vérifiant telle que pour tout n, $v(x_n) \geq C$. L'analogue de l'opération $u = 0$ consiste alors en la réduction vers $\overline{\mathrm{B}}$ d'un φ-module sur $\mathfrak{S}$, après avoir remarqué que tout élément primitif devient une unité dans $\overline{\mathrm{B}}$. Nous avons démontré avec Fontaine dans [2] que la catégorie des φ-modules sur $\overline{\mathrm{B}}$ (où l'opérateur φ est ici bijectif) est naturellement équivalente à celle des fibrés sur X. La réduction modulo $\overline{\mathrm{B}}$ d'un φ-module sur $\mathfrak{S}$ fournit alors après dualisation le fibré $\mathscr{E}_2$ intervenant dans la modification. Le second fibré, semi-stable de pente 0, intervenant dans la modification est directement construit via ses sections globales

$$\mathrm{Hom}_\varphi(M,\mathfrak{S})\big[\tfrac{1}{\pi}\big]$$

dont on montre qu'elle forment bien un E-espace vectoriel de dimension le rang de M (prop. 4.32). La modification i.e. le morphisme entre les deux fibrés précédents est elle construite via une application de type "périodes" (cf. 4.26). Le conoyau de la modification se calcule alors en termes de $\mathrm{coker}\,\varphi\big[\frac{1}{\pi}\big]$.

Construction analytique. La deuxième construction « analytique » du foncteur (1) est décrite en termes de fibrés sur l'espace adique Y^{ad} dans la section 4.4. À (M,φ) on associe un fibré

$$\mathscr{E} = M \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{Y^{ad}}$$

muni d'un morphisme $\varphi^*\mathscr{E} \to \mathscr{E}$ donné par $\varphi : M \to M$ qui est une modification à support fini i.e. un isomorphisme en dehors d'un nombre fini de points de $|Y| \subset |Y^{ad}|$. Cela nous permet de définir un système de morphismes de fibrés sur Y^{ad}

$$\cdots \longrightarrow \varphi^{(n+1)*}\mathscr{E} \longrightarrow \varphi^{n*}\mathscr{E} \longrightarrow \varphi^{(n-1)*}\mathscr{E} \longrightarrow \cdots$$

lorsque n parcourt $\mathbb{Z}$. La modification associée à (M,φ) s'exprime alors via GAGA en termes de fibrés sur X^{ad} comme étant la duale de

$$\bigcap_{n\geq 0} \varphi^{n*}\mathscr{E} \hookrightarrow \bigcup_{n\leq 0} \varphi^{n*}\mathscr{E}.$$

L'admissibilité de la modification se vérifie en utilisant le théorème de Keldaya.

Conjecture principale. Voici la conjecture principale de ce texte.

Conjecture. *Le foncteur (1) induit une équivalence de catégories*

$$\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}] \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}odif_X^{\geq 0,ad}.$$

Cette conjecture est vérifiée pour les objets de rang 1 dans la section 4.6. Il s'agit essentiellement d'une réinterprétation de nos résultats avec Fontaine concernant le fait que tout diviseur φ-invariant sur $|Y|$ est le diviseur d'un élément de $\mathrm{B}^{\varphi=\pi^d}$, $d \in \mathbb{N}$, que l'on peut écrire comme un certain produit de Weierstrass. En fait, ce résultat qui intervient de façon cruciale dans [2] a été une des motivations principales pour la formulation de la conjecture précédente que l'on peut voir comme une extension à GL_n d'un résultat pour GL_1.

Application aux groupes p-divisibles. Comme dans [11], les résultats précédents devraient donner une classification des groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_C$, $C|\mathbb{Q}_p$ algébriquement clos. Cela est expliqué dans la section 4.8 où nous énonçons en particulier la conjecture suivante.

Conjecture. *Soit $C|\mathbb{Q}_p$ valué complet algébriquement clos. Posons $E = \mathbb{Q}_p$, $F = C^\flat$ et soit $\mathfrak{m} \in |Y_F|$ le noyau de $\theta : \mathrm{B} \to C$. Notons $BT_{\mathcal{O}_C}$ la catégorie des groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_C$. Si $p \neq 2$ il y a une équivalence de catégories*

$$\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}^{\leq \mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} BT_{\mathcal{O}_C}.$$

où $\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}^{\leq \mathfrak{m}}$ désigne les φ-modules (M,φ) tels que $\operatorname{coker}\varphi\left[\frac{1}{p}\right]$ *soit annulé par $\mathfrak{m}$.*

Remerciements. Les résultats des sections 2 et 3 de cet article sont issus des nombreuses discussions de l'auteur avec J.-M. Fontaine. La paternité de ces résultats est entièrement partagée : tous les résultats de ces sections doivent être considérés comme étant en commun avec J.-M. Fontaine. Il s'agit de compléments à nos travaux communs dont l'auteur avait besoin pour la section 4 de cet article. On remercie enfin P. Scholze pour des discussions concernant la section 2.

1. Rappels sur la courbe ([5], [4], [3], [2])

1.1. **Anneaux de fonctions holomorphes de la variable π.** Soit E un corps local non-archimédien à corps résiduel fini $\mathbb{F}_q$. On note π une uniformisante de E. Soit $F|\mathbb{F}_q$ un corps parfait muni d'une valuation non-triviale $v : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dit autrement, F est un corps perfectoïde de caractéristique p extension de $\mathbb{F}_q$ ([13]).

L'extension $F|\mathbb{F}_q$ se relève en une unique extension complète non-ramifiée $\mathscr{E}|E$, $\mathcal{O}_{\mathscr{E}}/\pi\mathcal{O}_{\mathscr{E}} = F$. Il y a toujours un relèvement de Teichmüller $[-] : F \to \mathcal{O}_{\mathscr{E}}$. Plus précisément :

- Si E est de caractéristique p, $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ et le relèvement de Teichmüller est additif. Il identifie F à un sous-corps de $\mathscr{E}$. On a alors
$$\mathscr{E} = F((\pi)).$$
- Si E est de caractéristique 0, E est une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$ et
$$\mathscr{E} = W_{\mathcal{O}_E}(F)\big[\tfrac{1}{\pi}\big]$$
où $W_{\mathcal{O}_E}(F)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt ramifiés à coefficients dans F. On a alors
$$\mathscr{E} = \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \mid x_n \in F \Big\}.$$

Il faut penser aux éléments de $\mathscr{E}$ comme étant des séries entières de la variable π à coefficients dans F. On pose alors
$$\mathrm{B}^b = \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in \mathscr{E} \mid \exists C,\ \forall n\ |x_n| \leq C \Big\},$$
un sous anneau de $\mathscr{E}$. On définit ensuite des normes de Gauss sur B^b. Pour $x = \sum_n [x_n]\pi^n \in \mathrm{B}^b$ et $\rho \in]0,1[$ on pose
$$|x|_\rho = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|\rho^n = q^{-v_r(x)}$$
où si $\rho = q^{-r}$,
$$v_r(x) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} v(x_n) + nr.$$
Il s'agit de normes multiplicatives i.e. v_r est une valuation sur B^b.

Définition 1.1. *Si $I \subset]0,1[$ est un intervalle on note B_I le complété de B^b relativement aux normes $(|.|_\rho)_{\rho \in I}$. On note $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{]0,1[}$.*

En général B_I est une E-algèbre de Fréchet. Ceci dit, si I est un intervalle compact B_I est une E-algèbre de Banach. Il faut penser à B_I comme étant « l'algèbre des fonctions holomorphes de la variable π sur la couronne de rayons définis par I », un des buts de cette note étant de donner un sens plus précis à cette notion lorsque $E|\mathbb{Q}_p$ (on renvoie à l'exemple 1.2 lorsque E est de caractéristique p). C'est plus précisément ce que permet de faire le théorème 2.1. On a alors
$$\mathrm{B} = \varprojlim_{I} \mathrm{B}_I$$
où I parcourt les intervalles compacts de $]0,1[$, ce qui exprime l'algèbre de Frechet B comme une limite projective d'algèbres de Banach.

Exemple 1.2. *Si $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ et $\mathbb{D}^*_F = \{0 < |z| < 1\} \subset \mathbb{A}^1_F$ le disque épointé rigide analytique au sens de Tate alors en identifiant $z = \pi$*
$$\mathrm{B} = \mathcal{O}(\mathbb{D}^*).$$

L'anneau $\mathscr{E}$ est muni canoniquement d'un Frobenius φ tel que
$$\varphi\Big(\sum_n [x_n]\pi^n\Big) = \sum_n [x_n^q]\pi^n.$$
Il faut y penser comme étant un Frobenius arithmétique puisque π « est la variable formelle ». Ce Frobenius induit un automorphisme φ de B.

1.2. **L'ensemble $|Y|$.**

Définition 1.3. *On note $|Y|$ l'ensemble des idéaux maximaux fermés de l'algèbre de Fréchet* B.

Rappelons qu'un élément primitif est un $x = \sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}}$ tel que

- pour tout n, $x_n \in \mathcal{O}_F$,
- on a $x_0 \neq 0$,
- il existe d tel que $x_d \in \mathcal{O}_F^\times$.

Il s'agit d'une notion analogue à celle intervenant classiquement dans les théorèmes de division et préparation de Weierstrass. Pour un tel élément primitif x son degré est par définition le plus petit entier d tel que x_d soit une unité. Le produit d'un élément primitif de degré d par un élément primitif de degré d' est primitif de degré $d + d'$. Un élément primitif est dit irréductible s'il est de degré strictement positif et ne peut pas s'écrire comme produit de deux éléments primitifs de degré strictement positifs.

Théorème 1.4.

1. *Si x est primitif irréductible alors l'idéal principal* Bx *est maximal,* B$x \in |Y|$.
2. *Tout élément de $|Y|$ est de la forme* Bx *avec x primitif irréductible.*
3. *Si $\mathfrak{m} \in |Y|$ alors le corps résiduel $L_\mathfrak{m} = \mathrm{B}/\mathfrak{m}$ extension de E est perfectoïde et $L_\mathfrak{m}^\flat|F$ est une extension de degré fini satisfaisant*
$$|L_\mathfrak{m}^\flat : F] = \deg \mathfrak{m}$$
le degré d'un générateur primitif de $\mathfrak{m}$.

Rappelons ici que
$$L_\mathfrak{m}^\flat = \mathscr{R}(L_m) = \left\{(x^{(n)})_{n\geq 0} \mid x^{(m)} \in L_\mathfrak{m} \text{ et } \big(x^{(n+1)}\big)^p = x^{(n)}\right\}$$
est un corps parfait de caractéristique p complet pour la valuation $\big(x^{(n)}\big)_{n\geq 0} \mapsto v\big(x^{(0)}\big)$. Dans le théorème précédent l'extension $L_\mathfrak{m}^\flat|F$ est induite par l'application qui à un $a \in F$ associe l'image dans $L_\mathfrak{m}$ de la suite
$$\big[a^{p^{-n}}\big],\ n \geq 0.$$

Exemple 1.5. *Si $E = \mathbb{F}_q((\pi))$, d'après les théorèmes de Weierstrass on a avec les notations de l'exemple 1.2, $|Y_F| = |\mathbb{D}_F^*|$ les points de l'espace rigide de Tate $\mathbb{D}_F^*$. Pour $\mathfrak{m} \in |Y_F|$ correspondant à $x \in \mathbb{D}_F^*$, $L_\mathfrak{m} = L_\mathfrak{m}^\flat = k(x)$ le corps résiduel en x.*

On a également le résultat suivant.

Théorème 1.6. *Si F est algébriquement clos les éléments primitifs irréductibles sont les éléments primitifs de degré* 1. *Pour tout $\mathfrak{m} \in |Y|$, il existe $a \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ tel que $\mathfrak{m} = ([a] - \pi)$. De plus, le corps résiduel $L_\mathfrak{m}$ est algébriquement clos.*

Enfin, rappelons que si F est quelconque, $\overline{F}$ désigne une clôture algébrique de F de groupe de Galois $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ il y a une identification
$$|Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F\text{-fin}}/G_F \xrightarrow{\sim} |Y_F|$$
où $|Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F\text{-fin}}$ désigne les éléments de $|Y_{\widehat{\overline{F}}}|$ ayant une G_F-orbite finie.

1.3. **La courbe.** On pose
$$P = \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{B}^{\varphi=\pi^d}$$
comme $E = P_0$-algèbre graduée. Rappelons la définition suivante.

Définition 1.7. *On note $X = Proj(P)$.*

Lorsqu'on veut préciser la dépendance de X en le corps F, E ou bien les deux on le note X_F, X_E ou bien $X_{F,E}$. À isomorphisme canonique près, le schéma X ne dépend pas du choix de l'uniformisante π. L'un des théorèmes principaux est alors le suivant.

Théorème 1.8.

(1) *Le schéma X est intègre noethérien régulier de dimension* 1.

(2) *Les corps résiduels de X sont des extensions perfectoïdes de E. Il y a une uniformisation des points fermés de X*

$$|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$$

via laquelle si $\mathfrak{m}$ mod $\varphi^{\mathbb{Z}} \mapsto x$ on a $L_{\mathfrak{m}} = k(x)$ et le complété $\mathfrak{m}$-adique de B, $\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$, *s'identifie à $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$.*

(3) *La courbe est complète au sens où si $f \in E(X)^\times$ alors* $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ *où pour $x \in |X|$,* $\deg(x) = [k(x)^\flat : F]$.

Si $E'|E$ est une extension finie de corps résiduel contenu dans $F|\mathbb{F}_q$ il y a une identification $X_{E'} = X_E \otimes_E E'$. Si $F'|F$ est de degré fini il y a un morphisme naturel $X_{F'} \to X_F$ étale fini de degré $[F' : F]$ qui est galoisien de groupe $\mathrm{Gal}(F'|F)$ si l'extension $F'|F$ est galoisienne.

On note $\mathcal{O}_X(1) = \widetilde{P[1]}$ le fibré en droites tautologique sur X et pour $d \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_X(d) = \mathcal{O}_X^{\otimes d}$. On a alors

$$P = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(d)).$$

Rappelons également le résultat suivant (d'un point de vue logique, la démonstration de ce théorème intervient avant celle du théorème 1.8).

Théorème 1.9. *Si F est algébriquement clos alors $Pic^0(X)$ est trivial. En d'autres termes, si $\infty \in |X|$ l'ouvert affine $X \setminus \{\infty\}$ est le spectre d'un anneau principal.*

Ainsi si F est algébriquement clos $\deg : \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ est un isomorphisme d'inverse associant à l'entier d la classe du fibré $\mathcal{O}_X(d)$.

2. Structure rigide analytique sur la courbe

2.1. **Le cas $E = \mathbb{F}_q((\pi))$.** Considérons l'espace adique $\mathbb{D}^*_F$ sur $\mathrm{Spa}(F)$ au sens de Huber (1.2) où π est la coordonnée sur le disque épointé. Remarquons que tout élément de $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ définit un élément de $\mathrm{B} = \Gamma(\mathbb{D}^*, \mathcal{O}_{\mathbb{D}^*})$.

Lemme 1. *L'inclusion $\mathbb{F}_q((\pi)) \subset \Gamma(\mathbb{D}^*, \mathcal{O}_{\mathbb{D}^*})$ provient d'un morphisme d'espaces adiques*

$$\mathbb{D}^*_F \longrightarrow Spa\big(\mathbb{F}_q((\pi))\big).$$

Démonstration. Il s'agit du morphisme d'espaces adiques associé au morphisme de disques épointés $\mathbb{D}^*_F \to \mathbb{D}^*_{\mathbb{F}_q}$ où $\mathbb{F}_q$ est muni de la valuation triviale. $\square$

On a donc un diagramme d'espaces adiques

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D}^*_F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Spa}(F) & & \mathrm{Spa}(E) \end{tikzcd}$$

où le premier morphisme est localement de type fini mais le second ne l'est pas i.e. $\mathbb{D}^*_F$ n'est pas associé à un espace rigide usuel au sens de Tate sur E. C'est précisément ce second morphisme qui nous intéresse. On pose alors $Y^{ad} = \mathbb{D}^*_F$ vu comme espace adique sur $\mathrm{Spa}(E)$. Remarquons maintenant que φ agit de façon discontinue sur $\mathbb{D}^*_F$ puisque l'image de la couronne de rayon $\rho \in]0,1[$ est la couronne de rayon $\rho^{1/q}$. On peut donc poser

$$X^{ad} := Y^{ad}/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

comme espace adique quasicompact sur E (non localement de type fini).

2.2. **Le cas $E|\mathbb{Q}_p$.** Soit $I=[\rho_1,\rho_2]$ avec $\rho_1,\rho_2\in|F^\times|$. L'anneau B_I est une E-algèbre de Banach qui est un anneau principal. Soit

$$Y_I^{ad}=\mathrm{Spa}(\mathrm{B}_I,\mathrm{B}_I^\circ)$$

comme espace topologique muni d'un préfaisceau d'anneaux ([9]).

Théorème 2.1. *L'espace Y_I^{ad} est adique i.e. le préfaisceau $\mathcal{O}_{Y_I^{ad}}$ est un faisceau.*

La stratégie de démonstration du théorème précédent nous a été indiquée indépendamment par Jean-Marc Fontaine et Peter Scholtze. Soit $L|E$ une extension algébrique de degré infini arithmétiquement profinie ([14]). Rappelons qu'alors $\widehat{L}$ est un corps perfectoïde.

Théorème 2.2. *La $\widehat{L}$-algèbre de Banach $\mathrm{B}_I\hat{\otimes}_E\widehat{L}$ est perfectoïde.*

Démonstration. Quitte à remplacer E par une extension de degré fini on peut supposer que $L|E$ est pro-p. Écrivons

$$L=\cup_{n\geq 1}E_n$$

où $E_1=E$, $E_n\subsetneq E_{n+1}$ et $E_n|E$ est de degré fini. Notons $e_n=e_{E_n/E}$ qui est une puissance de p. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}e_n=+\infty$. On note $I_n=[\rho_1^{1/e_n},\rho_2^{1/e_n}]$.

Notons $\iota_n:\mathrm{B}^b_E\to\mathrm{B}^b_{E_n}$ l'injection canonique, qui fournit une identification

$$\mathrm{B}^b_E\otimes_E E_n\xrightarrow{\sim}\mathrm{B}^b_{E_n}.$$

Si $\pi=u_n\pi_n^{e_n}$ avec $u_n\in\mathcal{O}_{E_n}^\times$ alors

$$\iota_n\Big(\sum_k[x_k]\pi^k\Big)=\sum_k([x_k]u_n^k)\pi_n^{e_nk}.$$

On en déduit en appliquant le lemme 2 qui suit que pour $\rho\in]0,1[$

$$|\iota_n(x)|_\rho=|x|_{\rho^{e_n}}.$$

Grâce à cela on vérifie que

$$\mathrm{B}_{E,I}\otimes_E E_n=\mathrm{B}_{E_n,I_n}.$$

Soient maintenant $a,b\in F$ tels que $|a|=\rho_1$ et $|b|=\rho_2$. Soit $\mathrm{B}^0_{E_n,I_n}$ le sous-anneau de B_{E_n,I_n} formé des éléments de puissances bornées. Si

$$A_n=W_{\mathcal{O}_{E_n}}(\mathcal{O}_F)\Big[\frac{[a^{1/e_n}]}{\pi_n},\frac{\pi_n}{[b^{1/e_n}]}\Big]\subset\mathrm{B}^b_{E_n}$$

on a

$$\begin{aligned}\mathrm{B}^0_{E_n,I_n}&=\{x\in\mathrm{B}_{E_n,I_n}\mid |x|_{\rho_1^{1/e_n}}\leq 1\text{ et }|x|_{\rho_2^{1/e_n}}\leq 1\}\\&=\widehat{A_n}.\end{aligned}$$

De cela on déduit que

$$\pi\mathrm{B}^\circ_{E_n,I_n}\subset\mathrm{B}^\circ_{E,I}\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathcal{O}_{E_n}\subset\mathrm{B}^\circ_{E_n,I_n}\tag{2}$$

En effet, l'inclusion de droite est claire et pour celle de gauche il suffit de vérifier que

$$\pi A_n\subset A_1\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathcal{O}_{E_n}.$$

Cela résulte de ce que si $i\in\mathbb{N}$, en écrivant $i=ke_n+r$ avec $0\leq r<e_n$ on a

$$\pi.\Big(\frac{[a^{1/e_n}]}{\pi_n}\Big)^i=u_n^{k+1}\pi_n^{e_n-r}[a^{r/e_n}].\Big(\frac{[a]}{\pi}\Big)^k\in A_1\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathcal{O}_{E_n}$$

et

$$\pi\Big(\frac{\pi_n}{[b^{1/e_n}]}\Big)^i=u_n^{-k}\pi_n^r\big[b^{1-\frac{r}{e_n}}\big].\Big(\frac{[\pi]}{[b]}\Big)^{k+1}\in A_1\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathcal{O}_{E_n}.$$

Posons pour tout n et $x\in\mathrm{B}_{E_n,I_n}$

$$|x|_1=|x|_{\rho_1^{1/e_n}},\quad |x|_2=|x|_{\rho_2^{1/e_n}}.$$

Les plongements $\mathrm{B}_{E_n,I_n} \subset \mathrm{B}_{E_{n+1},I_{n+1}}$ sont isométriques pour ces normes et cela définit des normes multiplicatives encore notées $|.|_1$ et $|.|_2$ sur

$$\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{B}_{E_n,I_n} = \mathrm{B}_{E,I} \otimes_E L.$$

Soit la norme $\|.\| = \sup\{|.|_1, |.|_2\}$ sur $\mathrm{B}_{E,I} \otimes_E L$. On a par définition

$$\mathrm{B}_{E,I}\hat{\otimes}_E \widehat{L} = \widehat{\left(\mathrm{B}^0_{E,I} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_L\right)} \left[\tfrac{1}{\pi}\right]$$

où la complétion dans le membre de droite est pour la topologie π-adique. Les inclusions (2) montrent que

$$\mathrm{B}_{E,I}\hat{\otimes}_E \widehat{L} = \widehat{\left(\mathrm{B}_{E,I} \otimes_E L, \|.\|\right)}$$

La multiplicativité des normes $|.|_1$ et $|.|_2$ et l'égalité précédente montrent que $\left(\mathrm{B}_{E,I}\hat{\otimes}_E\widehat{L}\right)^0$ est un sous-anneau ouvert borné de l'algèbre de Banach $\mathrm{B}_{E,I}\hat{\otimes}_E\widehat{L}$ ainsi que l'égalité

$$\left(\mathrm{B}_{E,I}\hat{\otimes}_E\widehat{L}\right)^\circ = \widehat{\Big(\bigcup_{n\geq 1} \mathrm{B}^0_{E_n,I_n}\Big)}$$

où la complétion est pour la topologie π-adique. Afin de montrer que $\mathrm{B}_{E,I}\hat{\otimes}_E\widehat{L}$ est perfectoïde il reste donc à montrer que le Frobenius de

$$\varinjlim_{n\geq 1} A_n/\pi A_n$$

est surjectif. Cette limite inductive se réécrit

$$\varinjlim_{n\geq 1} \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_{E_n}/\pi\mathcal{O}_{E_n}[x_n, y_n]$$

où x_n désigne la réduction de $\frac{[a^{1/e_n}]}{\pi_n}$, y_n celle de $\frac{\pi_n}{[b^{1/e_n}]}$ et les applications de transition sont

$$x_n \longmapsto 1 \otimes \bar{v}_n . x_{n+1}^{\frac{e_{n+1}}{e_n}}$$

avec $v_n = \frac{\pi_{n+1}^{e_{n+1}/e_n}}{\pi_n} \in \mathcal{O}_{E_{n+1}}^\times$ et

$$y_n \longmapsto 1 \otimes \bar{v}_n^{-1} . y_{n+1}^{\frac{e_{n+1}}{e_n}}.$$

Puisque pour tout n, $\bar{v}_n$ possède une racine p-ième dans $\mathcal{O}_L/\pi\mathcal{O}_L$ et $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ est une puissance strictement positive de p on en déduit que x_n et y_n possède des racines p-ièmes dans la limite inductive précédente. $\square$

Le lemme suivant ne pose pas de difficulté particulière.

Lemme 2. *Pour $x = \sum_{k\geq N}[x_k]\pi^k \in \mathrm{B}^b$ et $(u_k)_{k\geq N}$ une suite de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^\times$ on a*

$$\Big|\sum_{k\geq N}[x_k]u_k\pi^k\Big|_\rho = |x|_\rho.$$

Lemme 3. *Soit K un corps valué complet pour une valuation discrète. Soit $C^\bullet$ un complexe de K-espaces de Banach et W un K-espace de Banach non-nul. Si le complexe d'espaces de Banach $C^\bullet\hat{\otimes}_K W$ est acyclique alors $C^\bullet$ est acyclique.*

Démonstration. Si V est un K-espace de Banach et I un ensemble notons $\ell^\infty(I,V)$ l'espace de Banach des suites indexées par I à coefficients dans V et tendant vers 0. Fixons un isomorphisme $\ell^\infty(I,K) \xrightarrow{\sim} W$ pour un ensemble non-vide I. Si V est un K-espace de Banach il y a un isomorphisme canonique en V

$$V\hat{\otimes}_K \ell^\infty(I,K) \xrightarrow{\sim} \ell^\infty(I,V).$$

Choisissons un indice $i \in I$. La projection sur la i-ème composante d'une suite fournit une décomposition canonique en V

$$\ell^\infty(I,V) \xrightarrow{\sim} V \oplus \ell^\infty(I\setminus\{i\},V).$$

Cela montre que le le complexe $C^\bullet$ est facteur direct dans $C^\bullet\hat{\otimes}_K W$. Si ce dernier est acyclique il en est donc de même de $C^\bullet$. □

Démonstration du théorème 2.1. Pour $f_1,\dots,f_n,g \in \mathrm{B}_I$ engendrant l'idéal B_I considérons l'algèbre de Banach

$$A = \mathrm{B}_I\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle .$$

Si $h_1,\dots,h_m \in A$ engendrent l'idéal A regardons le complexe de Cech

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \prod_{i=1}^m A\langle \frac{h_1,\dots,h_n}{h_i}\rangle \longrightarrow \prod_{1\leq i<j\leq n} A\langle \frac{h_k h_l}{h_i h_j}\rangle_{k,l}$$

Soit $L|E$ comme dans le théorème 2.2. Par application de $-\hat{\otimes}_E \widehat{L}$ au complexe précédent on obtient le complexe de Cech correspondant associé à l'algèbre perfectoïde $\mathrm{B}_I\hat{\otimes}_E\widehat{L}$. D'après Scholze ([13]) ce complexe est acyclique. Le théorème se déduit alors du lemme 3. □

Remarque 2.3. *La méthode de démonstration précédente permet également de démontrer que pour tout $i>0$, $H^i(Y_I^{ad}, \mathcal{O}_{Y_I^{ad}})=0$.*

Remarque 2.4. *Dans la preuve précédente*

$$\mathrm{B}_I\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle = \mathrm{B}_I < T_1,\dots,T_n > /\overline{(f_iT-g)_i}$$

où $\overline{(f_iT-g)_i}$ est l'adhérence de l'idéal $(f_iT-g_i)_i$. Cependant sous la conjecture 1 qui suit cet idéal devrait être fermé.

Remarquons maintenant que si $I\subset I'\subset]0,1[$ avec I' comme précédemment alors Y_I^{ad} est un ouvert rationnel dans $Y_{I'}^{ad}$: si $I=[|a|,|b|]$ avec $a,b\in F$ alors

$$Y_I^{ad} = Y_{I'}^{ad}\Big(\frac{[a]}{\pi},\frac{\pi}{[b]}\Big).$$

Définition 2.5. *On note $Y^{ad} = \varinjlim_I Y_I^{ad}$ où I parcourt les intervalles compacts de $]0,1[$ d'extrémités dans $|F|$.*

C'est donc un espace adique tel que

$$\Gamma(Y^{ad},\mathcal{O}_{Y^{ad}}) = \mathrm{B}.$$

Pour tout $I=[\rho_1,\rho_2]$ si $\varphi(I)=[\rho_1^q,\rho_2^q]$ le Frobenius φ de B^b induit un isomorphisme $\varphi : \mathrm{B}_I \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\varphi(I)}$ qui induit un isomorphisme

$$\varphi : Y_{\varphi(I)}^{ad} \xrightarrow{\sim} Y_I^{ad}.$$

En passant à la limite sur les intervalles I on obtient donc un automorphisme

$$\varphi : Y^{ad} \xrightarrow{\sim} Y^{ad}.$$

Ainsi,

$$|Y|\subset |Y^{ad}|$$

que l'on peut penser comme étant les points « classiques » de Y^{ad}. De plus, pour tout $\rho\in]0,1[$ on a $|.|_\rho \in |Y^{ad}|$. On peut alors poser

$$X^{ad} = Y^{ad}/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

et $|X|\subset |X^{ad}|$ est l'ensemble des points « classiques » de X^{ad}. Notons la description suivante « concrète » de l'ensemble $|Y^{ad}|$.

Proposition 2.6. *L'ensemble $|Y^{ad}|$ s'identifie à l'ensemble des classes d'équivalence de valuations continues*

$$|.| : \mathrm{B} \longrightarrow \Gamma\cup\{0\}.$$

Démonstration. Soit une valuation $|.|$ comme dans l'énoncé. On a $|\pi| \neq 0$. Puisque la suite $(\pi^n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 dans B, $(|\pi|^n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 dans Γ. Pour tout intervalle compact $I \subset]0,1[$ on choisit une norme $\|.\|_I$ sur B_I définissant sa topologie d'espace de Banach et on note encore $\|.\|_I$ la norme déduite sur B via $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}_I$. Par continuité de $|.|$ il existe I et $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{B},\ \|x\|_I \leq C \Longrightarrow |x| \leq 1.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathrm{B},\ \|\pi^{-n}x\|_I \leq C \Longrightarrow |x| \leq |\pi|^n.$$

On en déduit que la valuation $|.|$ sur B est continue pour la topologie définie par $\|.\|_I$ et se prolonge donc au complété de B relativement à $\|.\|_I$, c'est à dire B_I : la valuation $|.|$ provient d'une valuation continue sur B_I via $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}_I$. Cette valuation définit un élément de

$$Y_I^{ad,c} = \mathrm{Spa}(\mathrm{B}_I, \mathcal{O}_E + \mathrm{B}_I^{\circ\circ})$$

Remarquons maintenant que si $I \subset \overset{\circ}{I'}$ alors $Y_I \subset\subset Y_{I'}$ i.e. $\mathrm{B}_{I'}^{\circ} \subset \mathrm{B}_I^{\circ\circ}$ et donc

$$Y_I^{ad,c} \subset Y_{I'}.$$

$\square$

2.3. **Basculement de la courbe de la caractéristique 0 vers la caractéristique p.** On suppose ici que $E|\mathbb{Q}_p$.

Théorème 2.7. *Soit $L|E$ une extension algébrique arithmétiquement profinie. Soit $\underline{\pi} \in \widehat{L}^\flat$ non nul de valuation strictement positive.*

(1) L'espace adique $Y_{F,E}^{ad}\hat{\otimes}_E\widehat{L}$ est perfectoïde et il y a une identification canonique compatible à l'action de φ

$$\big(Y_{F,E}^{ad}\hat{\otimes}_E\widehat{L}\big)^\flat = Y_{F,\mathbb{F}_q((\underline{\pi}))}^{ad}\underset{\mathbb{F}_q((\underline{\pi}))}{\hat{\otimes}}\widehat{L}^\flat.$$

(2) L'espace adique $X_{F,E}^{ad}\hat{\otimes}_E\widehat{L}$ est perfectoïde et il y a une identification canonique

$$\big(X_{F,E}^{ad}\hat{\otimes}_E\widehat{L}\big)^\flat = X_{F,\mathbb{F}_q((\underline{\pi}))}^{ad}\underset{\mathbb{F}_q((\underline{\pi}))}{\hat{\otimes}}\widehat{L}^\flat.$$

Démonstration. Le point (2) et une conséquence du point (1). Le fait que $Y^{ad}\hat{\otimes}_E\widehat{L}$ soit perfectoïde est une conséquence du théorème 2.2. Rappelons qu'il y a deux foncteurs adjoints

$$\mathcal{O}_E\text{-algèbres } \pi\text{-adiques} \underset{W_{\mathcal{O}_E(-)}}{\overset{(-)^\flat}{\rightleftarrows}} \mathbb{F}_q\text{-algèbres parfaites.}$$

Soit maintenant A une $\widehat{L}$-algèbre perfectoïde. On a $\big(Y\hat{\otimes}_E\widehat{L}\big)(A) = Y(A)$ où dans le second membre A est vue comme une E-algèbre de Banach. Un élément de $Y(A) = \bigcup_I Y_I(A)$ est donné par un morphisme de E-algèbres de Banach $\mathrm{B}_I \longrightarrow A$ pour I suffisamment grand. Il revient au même de se donner un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres

$$f : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow A^0$$

tel que si $I = [\,|a|, |b|\,]$ on ait

$$\begin{array}{rcl} f([a]) & \in & \pi A^0 \\ \pi & \in & f([b])A^0. \end{array}$$

Choisissons $\underline{\pi} \in \widehat{L}^\flat$ tel que $v(\pi) = v(\underline{\pi})$. D'après l'adjonction précédente cela revient à se donner un morphisme

$$f^\flat : \mathcal{O}_F \longrightarrow (A^\flat)^0 = (A^0)^\flat$$

tel que

$$\begin{array}{rcl} f^\flat(a) & \in & \underline{\pi}.(A^\flat)^0 \\ \underline{\pi} & \in & f^\flat(b).(A^\flat)^0. \end{array}$$

La donnée d'un tel morphisme $f^\flat$ est équivalente à celle d'un élément de $Y_{F,\mathbb{F}_q((\underline{\pi})),I}(A^\flat)$. $\square$

2.4. **Une conjecture.** D'après le théorème 2.7 on dispose d'un E-espace adique X^{ad}. Néanmoins on aimerait plus généralement disposer d'un espace adique $X^{ad}\hat{\otimes}_E\mathcal{A}$ pour toute E-algèbre affinoïde $\mathcal{A}$ au sens de Tate i.e. topologiquement de type fini. On aimerait ainsi pouvoir définir l'espace adique $X^{ad}\times_E Z$ pour tout $\mathrm{Spa}(E,E^0)$-espace adique localement de type fini Z.

Pour cela rappelons qu'une algèbre de Banach A est fortement noethérienne si pour tout entier n, l'anneau $A < X_1,\dots,X_n >$ est noethérien. Rappelons alors que d'après Huber ([9]) si A est fortement noethérienne le préfaisceau structural défini sur $\mathrm{Spa}(A,A^0)$ est un faisceau. La conjecture suivante permettrait de résoudre le problème précédent. Elle dit que les anneaux $\mathrm{B}_I < X_1,\dots,X_n >$ se comportent comme les algèbres affinoïdes « classiques » de Tate.

Conjecture 1. *L'algèbre de Banach* B_I *est fortement noethérienne. De plus, pour tout entier* $n\geq 1$, $\mathrm{B}_I < X_1,\dots,X_n >$ *est un anneau de Jacobson régulier de dimension de Krull* $n+1$.

Citons également la conjecture suivante qui va de pair.

Conjecture 2. *Si* $U\subset Spa(\mathrm{B}_I,\mathrm{B}_I^0)$ *est un ouvert affinoïde connexe alors* $\Gamma(U,\mathcal{O}_{Y_I}^{ad})$ *est un anneau de Dedekind.*

2.5. **Paramétrisation de Y^{ad} à l'aide des groupes de Lubin-Tate.** Rappelons le résultat suivant permettant de décrire $|Y_F|$ lorsque le corps F est algébriquement clos. On suppose ici que $E|\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathscr{LT}$ une loi de groupe formel de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_E$. On note $\mathscr{G}$ le groupe formel de Lubin-Tate associé. Munissons $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ de la topologie induite par celle de B i.e. par les normes de Gauss $(|.|_\rho)_{\rho\in]0,1[}$. Cette topologie coïncide avec la topologie $([a],\pi)$-adique pour n'importe quel élément $a\in\mathfrak{m}_F$ non nul. Dit d'une autre façon, il s'agit de la topologie de la convergence simple de chacun des éléments de $\mathcal{O}_F$ dans le développement de Teichmüller. L'anneau $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est alors complet. Pour $\epsilon\in\mathfrak{m}_F$, on définit un relèvement de Teichmüller tordu par la formule

$$[\epsilon]_Q=\lim_{n\to+\infty}[\pi^n]_{\mathscr{LT}}\Big(\big[\epsilon^{q^{-n}}\big]\Big)\in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F).$$

On vérifie que cela définit un relèvement

$$[-]_Q:\mathscr{G}(\mathcal{O}_F)\longrightarrow\mathscr{G}(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)).$$

Par exemple, si $\mathscr{LT}=\widehat{\mathbb{G}}_m$, $[\epsilon]_Q=[\epsilon+1]-1$. On pose alors pour $\epsilon\in\mathfrak{m}_F=\mathscr{G}(\mathcal{O}_F)$ non nul

$$u_\epsilon=\frac{[\epsilon]_Q}{[\epsilon^{1/q}]_Q}\in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$$

dont on vérifie aisément que c'est un élément primitif de degré 1. Soit $\mathfrak{m}=(u_\epsilon)\in|Y_F|$ et $L_\mathfrak{m}=\mathrm{B}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel perfectoïde associé. Via les identifications

$$\mathcal{O}_F=\mathcal{O}_{L_\mathfrak{m}}^\flat=\varprojlim_{\mathrm{Frob}}\mathcal{O}_{L_\mathfrak{m}}/\pi\mathcal{O}_{L_\mathfrak{m}}$$

l'élément $\epsilon\in\mathcal{O}_F$ est la réduction modulo π d'un générateur du module de Tate de $\mathscr{G}$ sur $\mathcal{O}_{L_\mathfrak{m}}$ c'est à dire les suites $(x_n)_{n\geq0}$ d'éléments de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{L_\mathfrak{m}}$ vérifiant $[\pi]_{\mathscr{LT}}(x_{n+1})=x_n$ et $x_0=0$. Rappelons le résultat suivant.

Théorème 2.8. *Si* F *est algébriquement clos il y a une bijection*

$$\begin{array}{rcl}\big(\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)\setminus\{0\}\big)/\mathcal{O}_E^\times & \xrightarrow{\sim} & |Y_{F,E}|\\ \mathcal{O}_E^\times.\epsilon & \longmapsto & (u_\epsilon).\end{array}$$

Il se trouve que ce théorème admet une interprétation en termes d'espaces perfectoïdes. Pour cela, notons

$$E_\infty=\bigcup_{n\geq1}E_n$$

l'extension de E engendrée par les points de torsion du groupe de Lubin-Tate $\mathscr{L}\mathscr{T}$ dans une clôture algébrique de E où E_n désigne l'extension engendrée par les points de π^n-torsion. Notons $(\pi_n)_{n\geq 1}$ un générateur de $T_\pi(\mathscr{G})$ où π_n engendre les points de π^n-torsion et posons

$$\underline{\pi} = \big(\pi_n \bmod \pi\big)_{\geq 1} \in \mathcal{O}^\flat_{\widehat{E}_\infty} = \varprojlim_{\text{Frob}} \mathcal{O}_{E_\infty}/\pi\mathcal{O}_{E_\infty}.$$

On a alors

$$\widehat{E}^\flat_\infty = \widehat{\mathbb{F}_q((\underline{\pi}))^{\text{perf}}}.$$

Notons $\mathscr{G}_0$ la réduction modulo π de $\mathscr{G}$ et T la coordonnée formelle sur $\mathscr{G}$ associée au choix de la loi de groupe $\mathscr{L}\mathscr{T}$. La limite projective

$$X(\mathscr{G}_0) = \varprojlim_{\times\pi} \mathscr{G}_0 = \varprojlim_{\text{Frob}} \mathscr{G}_0$$

existe dans la catégorie des $\mathbb{F}_q$-schémas formels. Plus précisément, $\mathscr{G}_0$ est le spectre formel du complété T-adique de $\cup_{n\geq 0}\mathbb{F}_q[\![T^{q^{-n}}]\!]$. C'est un E-espace vectoriel dans la catégorie des schémas formels. Notons

$$\chi_{\mathscr{L}\mathscr{T}} : \text{Gal}(E_\infty|E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_E^\times$$

le caractère de Lubin-Tate donnant l'action de Galois sur le module de Tate $T_\pi(\mathscr{G})$. Le lemme suivant est alors immédiat.

Lemme 4. *La correspondance $T \mapsto \underline{\pi}$ induit un isomorphisme*

$$Spf\big(\mathcal{O}_{\widehat{E}^\flat_\infty}\big) \xrightarrow{\sim} X(\mathscr{G}_0)$$

tel que l'action de $\sigma \in Gal(E_\infty|E)$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{E}^\flat_\infty}$ soit donnée par celle de $\chi_{\mathscr{L}\mathscr{T}}(\sigma)$ sur $X(\mathscr{G}_0)$.

Considérons maintenant le groupe formel $\mathscr{G}_0\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\mathcal{O}_F$ sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_F)$ de fibre générique $(\mathscr{G}_0\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\mathcal{O}_F)_\eta$ comme espace adique sur $\text{Spa}(F)$ que l'on note en abrégé $\mathscr{G}_F^{ad}$. Via le choix de la coordonnée T sur $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}_F^{ad} = \mathring{\mathbb{B}}^1$ muni d'une structure de $\mathcal{O}_E$-module. On peut alors former

$$X\big(\mathscr{G}_F^{ad}\big) = \varprojlim_{\times\pi} \mathscr{G}_F^{ad} = \varprojlim_{\text{Frob}_{\mathscr{G}_0}} \mathscr{G}_F^{ad}$$

qui est un espace perfectoïde sur F. Après avoir muni $\mathbb{F}_q$ de la valuation discrète, via le lemme 4 la fibre générique du schéma formel $X(\mathcal{G}_0)$ comme espace adique sur $\text{Spa}(\mathbb{F}_q)$ coïncide avec $\text{Spa}(\widehat{E}^\flat_\infty)$. Il y a donc un morphisme naturel

$$X(\mathscr{G}_F^{ad}) \longrightarrow \text{Spa}\big(\widehat{E}^\flat_\infty\big).$$

En fouillant dans la démonstration du théorème 2.7 on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.9. *Il y a un isomorphisme d'espaces perfectoïdes sur $\widehat{E}^\flat_\infty$*

$$\big(Y_{F,E}\hat{\otimes}_E\widehat{E}_\infty\big)^\flat \simeq X(\mathscr{G}_F^{ad}) \setminus \{0\}$$

tel que l'action de $\sigma \in Gal(E_\infty|E)$ sur le membre de gauche soit donnée par l'action de $\chi_{\mathscr{L}\mathscr{T}}(\sigma) \in \mathcal{O}_E^\times$ sur celui de droite.

Remarque 2.10. *Il faut faire attention à ce que via l'isomorphisme du théorème 2.9 l'action de φ sur $\big(Y_{F,E}\hat{\otimes}_E\widehat{E}_\infty\big)^\flat$ ne correspond pas à celle de $\pi \in \mathcal{O}_E$ agissant sur $\mathscr{G}$. En effet, l'action de π est le Frobenius « géométrique »envoyant la série $\sum_\alpha x_\alpha\underline{\pi}^\alpha$ sur $\sum_\alpha x_\alpha\underline{\pi}^{q\alpha}$ alors que $\varphi(\sum_\alpha x_\alpha\underline{\pi}^\alpha) = \sum_\alpha x_\alpha^q\underline{\pi}^\alpha$. Néanmoins les actions de π et φ^{-1} sur les espace topologiques sous-jacents coïncident.*

Ainsi, en utilisant ([13] theo. 6.3 (i)),

$$\begin{aligned} |X^{ad}_{F,E}\hat{\otimes}_E\widehat{E}_\infty| &\simeq \big|\big(X^{ad}_{F,E}\hat{\otimes}_E\widehat{E}_\infty\big)^\flat\big| \\ &\simeq \big|X(\mathscr{G}_F^{ad}) \setminus \{0\}\big|/\pi^{\mathbb{Z}} \\ &= \big|\mathscr{G}_F^{ad} \setminus \{0\}\big|/\pi^{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

On vérifie de plus que l'on a un homéomorphisme

$$|X_{F,E}^{ad}| \simeq |X_{F,E}^{ad}\hat{\otimes}_E\widehat{E}_\infty|/\mathrm{Gal}(E_\infty|E)$$

et donc

$$|X_{F,E}^{ad}| \simeq |\mathscr{G}_F^{ad} \setminus \{0\}|/E^\times.$$

Via cette bijection les points classiques se correspondent.

3. GAGA

3.1. **Rappels sur les fibrés vectoriels.** Rappelons que si F contient une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ on définit un fibré vectoriel

$$\mathcal{O}_X(\lambda)$$

sur la courbe X. Si $\lambda = \frac{d}{h}$ avec $d \in \mathbb{Z}$, $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $(d,h) = 1$ alors

$$\mathcal{O}_{X_E}(\lambda) = \pi_{h*}\mathcal{O}_{X_{E_h}}(d)$$

où $E_h|E$ est l'extension non-ramifiée de degré h de corps résiduel $\mathbb{F}_{q^h} \subset F$ et $\pi_h : X_{E_h} = X_E \otimes_E E_h \to X_E$ est un revêtement étale fini de degré h. C'est un fibré vectoriel de degré d et de rang h et donc de pente de Harder-Narasimhan

$$\mu(\mathcal{O}_X(\lambda)) = \lambda.$$

On a alors le théorème fondamental suivant.

Théorème 3.1. *Supposons F algébriquement clos.*

(1) Les fibrés semi-stables de pente λ sur X sont les fibrés isomorphes à une somme directe finie de $\mathcal{O}_X(\lambda)$.
(2) La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel sur X est scindée.
(3) Il y a une bijection

$$\begin{aligned} \big\{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{Q}\big\} &\xrightarrow{\sim} Fib_X/\sim \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \Big[\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X(\lambda_i)\Big]. \end{aligned}$$

Si F n'est plus algébriquement clos, $\overline{F}$ est une clôture algébrique de F de groupe de Galois $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$, la courbe $X_{\widehat{\overline{F}}}$ est munie d'une action de G_F et il y a un morphisme Galois invariant

$$\alpha : X_{\widehat{\overline{F}}} \longrightarrow X_F$$

tel que :

- si $x \in |X_{\widehat{\overline{F}}}|$ est un point fermé de G_F-orbite infinie alors $\alpha(x)$ est le point générique de X_F,
- si $|X_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F\text{-fin}}$ désigne les points fermés de G_F-orbite finie alors α induit une bijection
$$|X_{\widehat{\overline{F}}}|/G_F \xrightarrow{\sim} |X_F|,$$
- le degré d'un point fermé x de X_F est égal au cardinal de $\alpha^{-1}(x)$.

On peut alors considérer la catégorie des fibrés G_F-équivariants sur $X_{\widehat{\overline{F}}}$ (sous-entendu avec une certaine condition de continuité sur l'action de G_F, condition sur laquelle nous ne nous étendrons pas). On dispose alors du théorème de descente galoisienne suivant.

Théorème 3.2. *Le foncteur α^* induit une équivalence entre la catégorie des fibrés vectoriels sur X_F et celle des fibrés G_F-équivariants sur $X_{\widehat{\overline{F}}}$.*

Exemple 3.3. *D'après le théorème 3.1 un fibré vectoriel sur $X_{\widehat{\overline{F}}}$ est trivial si et seulement si il est semi-stable de pente 0. Du théorème 3.2 on déduit alors que la catégorie des fibrés semi-stables de pente 0 sur X_F est équivalente à celle des représentations de G_F de dimension finie à coefficients dans E.*

3.2. **Fibrés vectoriels sur X^{ad}.** Soit $I \subset]0,1[$ un intervalle d'extrémités dans $|F|$. Si on suppose la conjecture 1 vérifiée on dispose d'une bonne notion de faisceau cohérent sur l'espace adique Y_I^{ad} et donc sur Y^{ad}. Néanmoins, sans cette conjecture nous avons besoin de recourir à une méthode ad-hoc afin de définir cette notion.

Si M est un B_I-module de type fini alors le préfaisceau $M \otimes_{\mathrm{B}_I} \mathcal{O}_{Y_I^{ad}}$ sur Y_I^{ad} est un faisceau. En effet, B_I étant un anneau principal, il suffit de le vérifier lorsque M est un module libre, auquel cas c'est une conséquence du théorème 2.1, et lorsque M est de torsion. Mais si $M = \mathrm{B}_I/\mathfrak{m}^d$ avec $\mathfrak{m} \in |Y_I|$ alors, l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ définit un point « classique » de $|Y_I^{ad}|$ et on vérifie aussitôt que si U est un ouvert de Y_I^{ad} alors

$$\mathrm{B}_I/\mathfrak{m}^d \otimes_{\mathrm{B}_I} \mathcal{O}_{Y_I^{ad}}(U) = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathfrak{m} \notin U \\ \mathrm{B}_I/\mathfrak{m}^d \text{ si } \mathfrak{m} \in U. \end{cases}$$

En d'autres termes, si M est de torsion alors $M \otimes_{\mathrm{B}_I} \mathcal{O}_{Y_I^{ad}}$ est un faisceau gratte-ciel de support un ensemble fini de points classiques de Y_I^{ad}.

Conjecture 3. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{Y_I^{ad}}$-modules localement libre de rang fini sur Y_I^{ad}. Le B_I-module $H^0(Y_I^{ad}, \mathscr{F})$ est alors libre de rang fini et*

$$H^0(Y_I^{ad}, \mathscr{F}) \otimes_{\mathrm{B}_I} \mathcal{O}_{Y_I^{ad}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}.$$

La conjecture 1 entraine la conjecture 3. Ne sachant pas démontrer la conjecture 3 nous adoptons maintenant la définition ad-hoc suivante qui sera suffisante pour nos besoins.

Définition 3.4.

(1) *Un faisceau de $\mathcal{O}_{Y^{ad}}$-module $\mathscr{E}$ sur Y^{ad} est cohérent si pour tout I, $\mathscr{E}_{|Y_I^{ad}}$ est isomorphe à un faisceau de modules de la forme $M \otimes_{\mathrm{B}_I} \mathcal{O}_{Y_I^{ad}}$ pour un B_I-module de type fini M.*

(2) *Un fibré vectoriel sur Y^{ad} est un faisceau cohérent qui est un $\mathcal{O}_{Y^{ad}}$-module localement libre de rang fini.*

Si M est un B_I-module de type fini, on vérifie aisément que $M \otimes_{\mathrm{B}_I} \mathcal{O}_{Y_I^{ad}}$ est un fibré vectoriel si et seulement si M est libre. La proposition 7.14 de [3] dit que le foncteur section globales induit une équivalence entre la catégorie des fibrés vectoriels sur Y^{ad} et celle des B-modules projectifs de type fini.

3.3. **GAGA.** Soit

$$\mathscr{R}_F = \varinjlim_{\rho \to 0} \mathrm{B}_{]0,\rho]}$$

l'anneau de Robba. C'est un anneau de Bezout sur lequel φ agit bijectivement. Notons $\varphi\text{-Mod}_{\mathscr{R}_F}$ la catégorie des $\mathscr{R}_F$-modules libres munis d'un automorphisme φ-linéaire. On note de même $\varphi\text{-Mod}_{\mathrm{B}}$ la catégorie des φ-modules (libres) sur B. Supposons F algébriquement clos. Kedlaya a démontré dans [10] que tout objet de $\varphi\text{-Mod}_{\mathscr{R}_F}$ est isomorphe à une somme directe de modules isoclines $\mathscr{R}_F(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Lorsque le corps E est d'égales caractéristiques le théorème analogue a été obtenu par Hartl et Pink dans [8]. Combiné avec le théorème de classification des fibrés 3.1 on montre (cf. [3] sec. 7.6) que l'extension des scalaires induit une équivalence

$$\varphi\text{-Mod}_{\mathrm{B}} \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-Mod}_{\mathscr{R}_F}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \varphi\text{-Mod}_{\mathrm{B}} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Fib}_X \\ (M,\varphi) & \longmapsto & \widetilde{\Big(\bigoplus_{d\geq 0} M^{\varphi=\pi^d}\Big)} \end{array}$$

envoyant le φ-module isocline de pente λ, $\mathrm{B}(\lambda)$, sur $\mathcal{O}_X(-\lambda)$. Utilisant les résultats de la section 7.6 de [3] on vérifie alors que le foncteur sections globales induit une équivalence entre fibrés φ-équivariants sur Y^{ad} et φ-modules sur B. On obtient donc au final une équivalence entre fibrés sur X^{ad} et fibrés sur X.

Tout faisceau cohérent sur X, resp. X^{ad}, est une somme directe d'un fibré vectoriel et d'un faisceau cohérent de torsion. Il est aisé de vérifier qu'il y a une identification entre les faisceaux cohérents de torsion sur X et X^{ad}. On déduit au final le résultat suivant qui traduit géométriquement la concordance entre le théorème 3.1 et celui de Kedlaya.

Théorème 3.5 (GAGA). *Supposons F algébriquement clos. Il y a une équivalence de catégories entre faisceaux cohérents sur X et sur X^{ad}.*

Il est fort probable que le théorème précédent s'étende au cas F perfectoïde quelconque, mais l'auteur ne l'a pas vérifié en détails (d'après 3.2 il faudrait vérifier que pour tout intervalle I, la catégorie des $\mathrm{B}_{F,I}$-modules de type fini est équivalente à celle $\mathrm{B}_{\widehat{\overline{F}},I}$-modules de type fini munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$).

Voici une description concrète de deux équivalences inverses entre faisceaux cohérents sur X et X^{ad}. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau φ-équivariant sur Y^{ad}. On lui associe le faisceau cohérent sur X

$$\widetilde{\Big(\bigoplus_{d\geq 0}\Gamma(Y^{ad},\mathscr{F})^{\varphi=\pi^d}\Big)}\ .$$

Réciproquement, considérons le ind-schéma

$$\varinjlim_{I\subset]0,1[}\ \mathrm{Spec}(\mathrm{B}_I)$$

où $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}_I)\to\mathrm{Spec}(\mathrm{B}_J)$ si $I\subset J$. Il est muni d'une action de $\varphi^{\mathbb{Z}}$. Il y a un morphisme φ-invariant

$$\varinjlim_{I}\ \mathrm{Spec}(\mathrm{B}_I)\longrightarrow X$$

qui est un recouvrement fpqc. Concrètement, si $x\in\mathrm{B}_I$, $x\neq 0$ et x n'est pas une unité, on peut trouver $t\in P$ homogène de degré strictement positif tel que $t\in\mathrm{B}_I x$. Alors le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}_I)\to X$ est donné sur l'ouvert $D(x)$ par le morphisme

$$D(x)\to D^+(t)$$

associé à l'inclusion $P[\frac{1}{t}]^{\varphi=\mathrm{Id}}\subset\mathrm{B}[\frac{1}{x}]$. Alors, si $\mathscr{F}$ est un faisceau cohérent sur X son tiré en arrière sur ce ind-schéma définit un faisceau cohérent sur X^{ad}.

Remarque 3.6. *On vérifie que le morphisme*

$$\varinjlim_{I}\ \mathit{Spec}(\mathrm{B}_I)\longrightarrow X$$

fait de X un quotient de $\varinjlim_{I}\ \mathit{Spec}(\mathrm{B}_I)$ par l'action de φ dans la catégorie des ind-schémas. Ce morphisme est également un recouvrement fpqc ($\mathit{Spec}(\mathrm{B}_I)\to X$ est couvrant dès que $I=[\rho_1,\rho_2]$ avec $\rho_1\leq\rho_2^q$) mais cela ne fait pas de X un quotient fpqc de $\varinjlim_{I}\ \mathit{Spec}(\mathrm{B}_I)$ par $\varphi^{\mathbb{Z}}$, la relation d'équivalence

$$\Big(\varinjlim_{I}\ \mathit{Spec}(\mathrm{B}_I)\Big)\underset{X}{\times}\Big(\varinjlim_{I}\ \mathit{Spec}(\mathrm{B}_I)\Big)$$

n'admettant pas de description concrète. Si cela était le cas alors le théorème 3.5 serait évident.

Remarque 3.7. *Nous ne disposons malheureusement pas d'une preuve directe de GAGA : la démonstration que nous donnons consiste en effet à définir un foncteur naturel et constater que via ce foncteur les deux classifications coïncident par un calcul explicite. Ainsi, on ne sait pas déduire le théorème de Kedlaya du théorème de classification des fibrés sur la courbe $X_{F,E}$ et réciproquement (on renvoie à la discussion après la remarque 7.19 de* [3] *pour plus de détails concernant cela).*

4. Théorie de Kisin sur la courbe

On développe dans cette section une théorie analogue à la théorie développée par Kisin dans [11]. Nous suivons également le point de vue développé par Genestier et Lafforgue dans [6] et [7].

Voici un tableau d'analogies permettant au lecteur familier avec la théorie « classique » de [11] de s'y retrouver au fur et à mesure de la lecture des sections qui suivent.

Théorie classique	Théorie sur un corps perfectoïde
$k((u))$	F perfectoïde
$\mathfrak{S} = W(k)[\![u]\!]$	$\mathfrak{S} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$
$\mathfrak{S} \xrightarrow{u=0} W(k)_{\mathbb{Q}}$	$\mathfrak{S} \to \overline{\mathrm{B}}$
$\mathfrak{S}^\times.E(u)$	$\{$éléments primitifs irréductibles$\}$
$\mathfrak{S}^\times.E(u)^{\mathbb{N}}$	$\mathscr{S} = \{$éléments primitifs$\}$
$\mathcal{O}$	B^+
$\lambda = \prod_{k\geq 0} \frac{\varphi^k(E(u))}{E(0)}$	$\Pi^+(a)$, a primitif irréductible distingué
pas d'analogue (φ pas bijectif)	$\Pi^-(a) =$ " $\prod_{n<0} \varphi^n(a)$"

4.1. **φ-modules sur $\mathfrak{S}$.** Considérons l'anneau

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \\ &= \{x \in \mathrm{B} \mid \forall \rho \in]0,1[\ |x|_\rho \leq 1\}. \end{aligned}$$

En termes de polygones de Newton, $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des éléments de B dont le polygone de Newton est contenu dans le quadrant $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. Rappelons que l'on note

$$\mathrm{B}^{b,+} = \mathfrak{S}\big[\tfrac{1}{\pi}\big].$$

Rappelons également qu'un élément $x = \sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n \in \mathfrak{S}$ est dit primitif si $x_0 \neq 0$ et il existe $d \geq 0$ tel que x_d soit une unité. De façon équivalente, $x \bmod \pi \neq 0$ et $x \bmod W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F) \neq 0$. On remarquera que si $x, y \in \mathfrak{S}$ avec xy primitif alors x et y le sont également.

Définition 4.1. *Un φ-module sur $\mathfrak{S}$ est un $\mathfrak{S}$-module libre M muni d'un morphisme φ-linéaire $\varphi : M \to M$ dont le conoyau est annulé par un élément primitif. On note*

$$\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}$$

la catégorie des φ-modules sur $\mathfrak{S}$.

Si (M, φ) est un couple formé d'un $\mathfrak{S}$-module libre et d'un endomorphisme φ-linéaire, après choix d'une base de M, $(M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}$ si et seulement si $\det \varphi$ est un élément primitif. Étant donné $(M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}$, il existe $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_d \in |Y|$ ainsi que des entiers positifs $a_1, \ldots, a_d$ tels que

$$\operatorname{coker} \varphi\big[\tfrac{1}{\pi}\big] \simeq \bigoplus_{i=1}^{d} \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}_i}/\mathrm{Fil}^{a_i}\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}_i}$$

où on rappelle que $\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$ désigne le complété $\mathfrak{m}$-adique de B. Le conoyau de φ définit donc un faisceau cohérent de torsion de support fini sur Y^{ad} et donc un foncteur

$$\begin{aligned} \varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}} &\longrightarrow \mathrm{Coh}^{\mathrm{tor}}_{Y^{ad}} \\ (M, \varphi) &\longmapsto \operatorname{coker} \varphi\big[\tfrac{1}{\pi}\big]. \end{aligned}$$

Exemple 4.2. *On a* $\operatorname{coker} \varphi\big[\frac{1}{\pi}\big] = 0$ *si et seulement si* $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M$. *Appelons étale un tel φ-module. À un tel φ-module étale on associe le $\mathcal{O}_E$-faisceau lisse $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$ sur Spec$(\mathcal{O}_F)_{\acute{e}t}$ où pour une $\mathcal{O}_F$-algèbre étale finie A,*

$$\mathscr{F}_n(A) = Hom_{\mathfrak{S},\varphi}(M, W_{\mathcal{O}_E,n}(A))$$

où $W_{\mathcal{O}_E,n}(A) = W_{\mathcal{O}_E}(A)/\pi^n$. Cela induit une antiéquivalence entre les φ-modules étales et les $\mathcal{O}_E$-faisceaux lisses sur Spec$(\mathcal{O}_F)_{\acute{e}t}$ i.e. les $\mathcal{O}_E$-modules libres de rang fini munis d'une action linéaire continue du groupe de Galois Gal$(\overline{k}_F|k_F)$ d'une clôture algébrique $\overline{k}_F$ de k_F le corps résiduel de F.

Exemple 4.3. *Soit $K|\mathbb{Q}_p$ valué complet à corps résiduel k parfait et $K_0 = W(k)_\mathbb{Q}$. Fixons une uniformisante π de K et soit $E(u) \in \mathcal{O}_{K_0}[u]$ le polynôme minimal d'Eisenstein de π. Fixons une suite de racines p-ièmes de π, $(\pi^{1/p^n})_{n\geq 0}$ dans une clôture algébrique de K et soit*

$$K_\infty = \bigcup_{n\geq 0} K(\pi^{1/p^n}).$$

Le corps $\widehat{K_\infty}$ est perfectoïde avec

$$F := \widehat{K}_\infty^\flat = \widehat{k((\underline{\pi}))^{perf}}.$$

où

$$\underline{\pi} = \left(\pi^{1/p^n}\right)_{n\geq 0}.$$

L'idéal associé de $|Y_F|$ est $\mathfrak{m} = \big(E([\underline{\pi}])\big)$ où $E([\underline{\pi}])$ est primitif de degré 1 :

$$\mathrm{B}_F/\big(E([\underline{\pi}])\big) \xrightarrow{\sim} \widehat{K_\infty}$$

Notons $\mathfrak{S}_{k((\underline{\pi}))} = W(k)[\![u]\!]$ muni du Frobenius tel que $\varphi(u) = u^p$. On note maintenant $\mathfrak{S}_F$ l'anneau noté $\mathfrak{S}$ précédemment. Il y a un morphisme compatible aux Frobenius

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_{k((\underline{\pi}))} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_F \\ u & \longmapsto & [\underline{\pi}] \end{array}$$

qui induit par extension des scalaires un foncteur

$$\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}_{k(([\underline{\pi}]))}} \longrightarrow \varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}_F}$$

où la catégorie de φ-modules de gauche est celle définie et étudiée par Kisin dans [11]. *L'image essentielle de ce foncteur est contenue dans les φ-modules dont le conoyau de φ est annulé par une puissance de $\mathfrak{m}$.*

On se restreint désormais au cas où F est algébriquement clos afin de ne pas prendre de risques quant à la conjecture que l'on va énoncer, même s'il est fort probable qu'elle reste valable pour F pefectoïde quelconque avec quelques modifications (cf. remarque 4.9).

Contrairement au cas « classique » de Kisin, nous devons localiser la catégorie de φ-modules précédente. Cela est dû au fait que l'on ne fixe pas de point particulier de $|Y|$ tel que le support de coker$\varphi\big[\frac{1}{\pi}\big]$ soit contenu dans ce point.

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble multiplicatif des éléments primitifs de $\mathfrak{S}$ et $\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S}$ l'anneau localisé de $\mathfrak{S}$ associé. Le monoïde $\mathscr{S}/\mathfrak{S}^\times$ est le monoïde libre sur les éléments primitifs irréductibles à équivalence près i.e.

$$\mathscr{S}/\mathfrak{S}^\times \simeq \bigoplus_{\mathfrak{m}\in|Y|} \mathbb{N}.\mathfrak{m}.$$

Rappelons que si $\mathfrak{m} = (a) \in |Y|$ avec $a = \sum_{n\geq 0}[a_n]\pi^n$ primitif de degré d on note

$$\|m\| = |a_0|^{1/d}.$$

Définition 4.4.

(1) On note φ-$Mod_\mathfrak{S}[\mathscr{S}^{-1}]$ la catégorie dont les objets sont ceux de φ-$Mod_\mathfrak{S}$ et les morphismes

$$Hom_{\varphi\text{-}Mod_\mathfrak{S}[\mathscr{S}^{-1}]}\big((M_1,\varphi),(M_2,\varphi)\big) = Hom_{\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S},\varphi}(\mathscr{S}^{-1}M_1, \mathscr{S}^{-1}M_2).$$

(2) Pour $\rho \in]0,1[$ on note φ-$Mod_\mathfrak{S}^\rho$ la sous-catégorie pleine de φ-$Mod_\mathfrak{S}$ dont les objets sont les (M,φ) satisfaisant

$$\forall \mathfrak{m} \in |Y| \text{ tel que } \mathfrak{m} \in Supp(\operatorname{coker}\varphi\big[\tfrac{1}{\pi}\big]) \text{ on a } \rho^q < \|\mathfrak{m}\| \leq \rho.$$

Exemple 4.5. *Pour $(M,\varphi) \in \varphi$-$Mod_\mathfrak{S}$ et $k \in \mathbb{N}$ l'inclusion $\big(\varphi^k(M), \varphi_{|\varphi^k(M)}\big) \hookrightarrow (M,\varphi)$ est un isomorphisme dans φ-$Mod_\mathfrak{S}[\mathscr{S}^{-1}]$.*

Le choix d'un ρ définit un domaine fondamental $\{\mathfrak{m} \in |Y| \mid \rho^q < \|m\| \leq \rho\}$ pour l'action de $\varphi^{\mathbb{Z}}$ sur $|Y|$. La proposition qui suit dit que ce choix de domaine fondamental permet de se passer de la localisation précédente.

Proposition 4.6. *Pour tout $\rho \in]0,1[$, le foncteur*

$$\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}^{\rho} \longrightarrow \varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}]$$

est une équivalence de catégories.

Commençons par démontrer la pleine fidélité c'est à dire la proposition suivante.

Proposition 4.7. *Soient $(M_1, \varphi), (M_2, \varphi) \in \varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}^{\rho}$. Alors, tout morphisme*

$$u : \mathscr{S}^{-1}M_1 \longrightarrow \mathscr{S}^{-1}M_2$$

commutant à l'action de φ vérifie

$$u(M_1) \subset u(M_2).$$

Démonstration. Quitte à remplacer M_1 par $u(M_1)$ on peut supposer que $M_1 \subset \mathscr{S}^{-1}M_2$ est un sous-$\mathfrak{S}$-module stable sous l'action de φ tel que $M_1/\varphi(M_1)$ soit annulé par un élément primitif et pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}(M_1/\varphi(M_1)\left[\frac{1}{\pi}\right])$ on ait $\rho^q < \|\mathfrak{m}\| \leq \rho$.

Remarquons que puisque $\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S}/\mathfrak{S}$ est sans π-torsion et M_2 est libre, il suffit de montrer que

$$M_1 \subset M_2\left[\tfrac{1}{\pi}\right].$$

Soit $w \in \mathscr{S}$ qui annule $M_1/\varphi(M_1)$ et $M_2/\varphi(M_2)$ et dont le diviseur dans $|Y|$ est à support dans $\{\mathfrak{m} \mid \rho^q < \|\mathfrak{m}\| \leq \rho\}$. Pour tout entier positif k on note

$$w_k = w\varphi(w)\cdots\varphi^{k-1}(w)$$

qui annule $M_1/\varphi^k(M_1)$ et $M_2/\varphi^k(M_2)$.

Commençons par montrer qu'il existe un entier positif k tel que

$$w_k M_1\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \subset \varphi^k(M_2\left[\tfrac{1}{\pi}\right]). \tag{3}$$

Soit donc $x \in M_1$ et choisissons $z \in \mathscr{S}$ tel que $zx \in M_2$. Pour tout entier positif k il existe $y_k \in M_1$ tel que

$$w_k x = \varphi^k(y_k).$$

On a alors

$$\varphi^k\big(\varphi^{-k}(z)y_k\big) = w_k z x \in \varphi^k(M_2)$$

et donc

$$\varphi^{-k}(z)y_k \in M_2.$$

Le $\mathfrak{S}\left[\frac{1}{\pi}\right]$-module

$$M_1\left[\tfrac{1}{\pi}\right]/M_2\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \cap M_1\left[\tfrac{1}{\pi}\right]$$

est annulé par un élément primitif a. Or pour $k \gg 0$ les diviseurs à support fini sur $|Y|$

$$\mathrm{div}(\varphi^{-k}(z)) = \varphi^{-k}(\mathrm{div}(z)) \text{ et } \mathrm{div}(a)$$

sont premiers entre eux i.e. à support disjoint. Il en résulte que pour $k \gg 0$, $\varphi^{-k}(z)$ agit bijectivement sur

$$M_1\left[\tfrac{1}{\pi}\right]/M_2\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \cap M_1\left[\tfrac{1}{\pi}\right]$$

et donc

$$y_k \in M_2\left[\tfrac{1}{\pi}\right],$$

ce qui démontre (3).

Fixons un tel entier k et soit $x \in M_1$. Par application de (3) à $\varphi^k(x)$ on trouve que

$$\varphi^k(\varphi^{-k}(w_k)x) = w_k\varphi^k(x) \in \varphi^k\big(M_2\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \cap M_1 \cap \left[\tfrac{1}{\pi}\right]\big)$$

et donc

$$\varphi^{-k}(w_k)x \in M_1\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \cap M_2\left[\tfrac{1}{\pi}\right].$$

Finalement, le $\mathfrak{S}\left[\frac{1}{\pi}\right]$-module

$$M_1\left[\tfrac{1}{\pi}\right]/M_2\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \cap M_1\left[\tfrac{1}{\pi}\right]$$

est annulé par w_k et $\varphi^{-k}(w_k)$. Grâce à l'hypothèse faite sur w, les diviseurs de w_k et $\varphi^{-k}(w_k)$ sont premiers entre eux. On en déduit que ce module est nul. $\square$

La proposition qui suit est un analogue du lemme 4.1 de [7].

Proposition 4.8 (Modification des modules sur $\mathfrak{S}$).
Soit M un $\mathfrak{S}$-module libre. Notons $\Lambda(M)$ l'ensemble des collections $(\Lambda_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}\in|Y|}$, où Λ_m est un réseau de $M\otimes_{\mathfrak{S}} \mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}$, telles que pour presque tout $\mathfrak{m}$ on ait $\Lambda_{\mathfrak{m}} = M\otimes_{\mathfrak{S}} \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$. L'application

$$M' \longmapsto (M'\otimes_{\mathfrak{S}} \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}\in|Y|}$$

induit une bijection entre les sous-$\mathfrak{S}$-modules libres de $\mathscr{S}^{-1}M$ engendrant $\mathscr{S}^{-1}M$ et $\Lambda(M)$. L'inverse de cette bijection est donné par

$$(\Lambda_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}} \longmapsto \bigcap_{\mathfrak{m}} \big(\mathscr{S}^{-1}M\cap\Lambda_{\mathfrak{m}}\big).$$

Démonstration. Commençons par montrer que si $(\Lambda_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}}\in\Lambda(M)$ alors

$$\bigcap_{\mathfrak{m}} \big(\mathscr{S}^{-1}M\cap\Lambda_{\mathfrak{m}}\big)$$

est un $\mathfrak{S}$-module libre. Il suffit pour cela de montrer que si $\Lambda\subset M\otimes \mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}$ pour un $\mathfrak{m}\in|Y|$, $\mathfrak{m}=(a)$ avec $a\in\mathscr{S}$, alors

$$M[\tfrac{1}{a}]\cap\Lambda$$

est un $\mathfrak{S}$-module libre. Quitte à remplacer M par a^kM avec $k\ll 0$, on peut supposer que $\Lambda\subset M\otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$. Il s'agit alors de montrer que $M\cap\Lambda$ est libre. On peut se ramener au cas où le $\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$-module $M\otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}/\Lambda$ est annulé par $\mathrm{Fil}^1\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$ (on peut toujours trouver une chaîne de réseaux $\Lambda=\Lambda_0\subset\Lambda_1\subset\cdots\subset\Lambda_d=M\otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$ avec Λ_i/Λ_{i+1} annulé par $\mathrm{Fil}^1\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$) et donc

$$M\otimes \mathrm{Fil}^1\,\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}\subset\Lambda\subset M\otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$$

ce qui implique

$$aM\subset M\cap\Lambda.$$

Notons $C_{\mathfrak{m}}$ le corps résiduel de $\mathfrak{m}$ d'anneau des entiers $\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{m}}}=\mathfrak{S}/(a)$. Il y a une suite exacte de $\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{m}}}$-modules

$$0\longrightarrow M\cap\Lambda/aM\longrightarrow M/aM\xrightarrow{\;u\;} M\otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}/\Lambda.$$

Puisque $M\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}/\Lambda$ est un $C_{\mathfrak{m}}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{m}}}$ un anneau de valuation, tout sous-$\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{m}}}$-module de type fini de celui-ci est libre. On a donc une suite exacte scindée de $\mathcal{O}_{C_{\mathfrak{m}}}$-module libres de rang fini

$$0\longrightarrow M\cap\Lambda/aM\longrightarrow M/aM\longrightarrow \mathrm{Im}u\longrightarrow 0.$$

Si $M\cap\Lambda/aM=0$ alors $M\cap\Lambda=aM$ est le résultat est clair. On suppose donc que ce n'est pas le cas. L'anneau $\mathfrak{S}$ est local d'idéal maximal

$$\pi\mathfrak{S}+\sum_{x\in\mathfrak{m}_F}[x]\mathfrak{S}.$$

En particulier, l'idéal $\mathfrak{S}a$ est contenu dans le radical de Jacobson de $\mathfrak{S}$. Par application du lemme de Nakayama on en déduit l'existence d'une base de M dont le premier élément appartient à $M\cap\Lambda$. La projection sur le premier élément de cette base induit une suite exacte

$$0\longrightarrow M'\cap\Lambda'\longrightarrow M\cap\Lambda\longrightarrow\mathfrak{S}\longrightarrow 0$$

où $M'\subset M$ est le module libre noyau de la projection et

$$\Lambda'=M'\otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}\cap\Lambda.$$

L'hypothèse de récurrence implique que $M'\cap\Lambda'$ est libre et on conclut donc que M l'est également.

Pour finir la démonstration de la proposition il suffit de montrer que si $M' \subset \mathscr{S}^{-1}M$ est libre sur $\mathfrak{S}$ et engendre $\mathscr{S}^{-1}M$ alors

$$M' = \bigcap_{\mathfrak{m}} \big(\mathscr{S}^{-1}M \cap M' \otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}} \big).$$

Notons pour cela M'' le $\mathfrak{S}$-module du second membre, $M' \subset M''$. D'après ce que l'on vient de montrer, M'' est libre. Il est également clair que

$$M'\big[\tfrac{1}{\pi}\big] = M''\big[\tfrac{1}{\pi}\big].$$

Considérons l'idéal principal

$$\mathfrak{a} = \mathrm{Div}\big(M' \longrightarrow M''\big) \subset \mathfrak{S}$$

qui est engendré par le déterminant de l'inclusion $M' \hookrightarrow M''$ après des choix de bases de M' et M''. On a donc

$$\mathfrak{a}\big[\tfrac{1}{\pi}\big] = \mathfrak{S}\big[\tfrac{1}{\pi}\big].$$

De plus, puisque M''/M' est annulé par un élément primitif, $\mathfrak{a}$ est engendré par un élément primitif. On conclut que $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}$ soit $M' = M''$. $\square$

Remarque 4.9. *Si F n'est pas algébriquement clos et a est primitif irréductible de degré > 1 alors $\mathfrak{S}/(a)$ n'est plus un anneau de valuation mais seulement un sous-anneau strict de l'anneau des entiers du corps valué $\mathfrak{S}\big[\frac{1}{\pi}\big]/(a)$. La preuve précédente ne marche donc pas dans ce cas. C'est la raison principale pour laquelle nous nous restreignons au cas où F est algébriquement clos. En effet, indépendamment de son utilisation dans la démonstration de la proposition 4.6, la proposition 4.8 devrait jouer un rôle essentiel dans la preuve de la conjecture que nous allons énoncer.*

Corollaire 4.10. *Soit $(M, \varphi) \in \varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}$. Il y a une bijection entre l'ensemble des sous-φ-modules de $\mathscr{S}^{-1}M$ qui sont des objets de $\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}$ engendrant $\mathscr{S}^{-1}M$ et le sous-ensemble $\Lambda(M,\varphi)$ de $\Lambda(M)$ formé des $(\Lambda_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}}$ tels que pour tout $\mathfrak{m}$*

$$\varphi(\Lambda_{\mathfrak{m}}) \subset \Lambda_{\varphi(\mathfrak{m})}.$$

Fin de la preuve de la proposition 4.6. Montrons maintenant la surjectivité essentielle du foncteur

$$\varphi\text{-}\mathrm{Mod}^{\rho}_{\mathfrak{S}} \longrightarrow \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}].$$

Soit donc $(M, \varphi) \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}$. On note pour tout $\mathfrak{m} \in |Y|$, $\Lambda_{\mathfrak{m}} = M \otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$. On a alors

$$M/\varphi(M)\big[\tfrac{1}{\pi}\big] \simeq \bigoplus_{\mathfrak{m}\in|Y|} \Lambda_{\mathfrak{m}}/\varphi(\Lambda_{\varphi^{-1}(\mathfrak{m})}).$$

En particulier pour presque tout $\mathfrak{m}$, $\varphi(\Lambda_{\mathfrak{m}}) = \Lambda_{\varphi(\mathfrak{m})}$. Pour toute classe d'équivalence $\alpha \in |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}$ soit $\mathfrak{m}_\alpha$ l'unique élément dans la classe α tel que $\rho^q < \|\mathfrak{m}_\alpha\| \leq \rho$. Définissons alors $(\Lambda'_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}} \in \Lambda(M,\varphi)$ tel que pour tout α,

$$\begin{aligned} \text{si } i \geq 0,\quad \Lambda'_{\varphi^i(\mathfrak{m}_\alpha)} &= \varphi^{-k}(\Lambda_{\varphi^{i+k}(\mathfrak{m}_\alpha)}) \ \text{ pour } k \gg 0 \\ \text{si } i < 0,\quad \Lambda'_{\varphi^i(\mathfrak{m}_\alpha)} &= \varphi^{k}(\Lambda_{\varphi^{i-k}(\mathfrak{m}_\alpha)}) \ \text{ pour } k \gg 0. \end{aligned}$$

On a alors pour tout $\mathfrak{m}$, $\varphi(\Lambda_{\mathfrak{m}}) = \Lambda_{\varphi(\mathfrak{m})}$ sauf si $\varphi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_\alpha$ où α est la classe de $\mathfrak{m}$. Le module M' associé à $(\Lambda'_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}}$ par la proposition 4.8 est alors tel que $(M', \varphi) \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}^{\rho}_{\mathfrak{S}}$. $\square$

Exemple 4.11. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'équivalence composée*

$$\varphi\text{-}Mod^{\rho}_{\mathfrak{S}} \simeq \varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}] \simeq \varphi\text{-}Mod^{\rho^{q^k}}_{\mathfrak{S}}$$

est donnée par

$$(M,\varphi) \longmapsto (\varphi^k(M), \varphi)$$

où pour $k < 0$, $\varphi^k(M)$ est pris dans $\mathscr{S}^{-1}M$.

Exemple 4.12. *Puisque F est algébriquement clos, tout $x \in \mathfrak{S}^\times$ s'écrit sous la forme $y/\varphi(y)$ avec $y \in \mathfrak{S}^\times$. On en déduit que l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de rang 1 dans φ-Mod$_{\mathfrak{S}}$ est en bijection avec $\mathrm{Div}^+(Y)^{fin}$, les diviseurs à support fini sur $|Y|$. Au diviseur $D = \sum_{\mathfrak{m}} a_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{m}]$ on associe la classe d'isomorphisme du φ-module de rang 1, $\mathbb{1}(D) = \mathfrak{S}.e$ tel que $\varphi(e) = xe$ avec x primitif vérifiant $\mathrm{div}(x) = D$.*

La catégorie φ-Mod$_{\mathfrak{S}}$ est tensorielle. Si Pic(φ-Mod$_{\mathfrak{S}}$) désigne le monoïde des classes d'isomorphisme d'objets de rang 1 muni du produit tensoriel alors $D \mapsto \mathbb{1}(D)$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Div}^+(Y)^{fin} \xrightarrow{\sim} Pic(\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}).$$

On a alors

$$\mathbb{1}(D) \simeq \mathbb{1}(D') \quad dans\ \varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}]$$

si et seulement si il existe $D'' \in Div(Y)^{fin}$ tel que

$$D - D' = D'' - \varphi(D'').$$

Cela est encore équivalent à ce que via l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Div}^+(Y)^{fin} & \longrightarrow & \mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}) \\ D & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(D) \end{array}$$

les images de D et D' dans $\mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}) = \mathrm{Div}^+(X)$ coïncident. On a donc

$$Pic(\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}]) \simeq \mathrm{Div}^+(X).$$

4.2. **Modifications de fibrés.**

4.2.1. *Définition.* Une modification de fibrés sur la courbe X consiste en la donnée d'un triplet $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, u)$ où $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont des fibrés sur X et u est un isomorphisme générique entre $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ c'est à dire

$$u : \mathscr{E}_{1\eta} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_{2\eta}.$$

Il revient au même de demander que u soit un isomorphisme

$$\mathscr{E}_{1|X\setminus S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_{2|X\setminus S}$$

où S est un ensemble fini de points fermés de X. Les modifications de fibrés forment une catégorie exacte E-linéaire.

Définition 4.13. *Une modification de fibrés $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, u)$ est dite*

1. *effective si $u(\mathscr{E}_1) \subset \mathscr{E}_2$*
2. *admissible si $\mathscr{E}_1$ est un fibré semi-stable de pente 0.*

On note $\mathscr{M}odif_X$, $\mathscr{M}odif_X^{\geq 0}$ et $\mathscr{M}odif_X^{ad}$ les catégories associées.

Exemple 4.14. *Les classes d'isomorphisme d'objets de rang 1 de $\mathscr{M}odif_X^{ad,\geq 0}$ sont en bijection avec les diviseurs positifs sur X. Au diviseur D on associe la modification $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X(D)$ à isomorphisme près.*

4.2.2. *Classification de de Rham.* Se donner une modification est équivalent à se donner un couple

$$\big(\mathscr{E}, (\Lambda_x)_{x\in|X|}\big)$$

où

- $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel
- $(\Lambda_x)_x$ est une collection de réseaux $\Lambda_x \subset \widehat{\mathscr{E}_x}[\frac{1}{t_x}]$ pour tout point fermé $x \in |X|$, t_x désignant une uniformisante de $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$, telle que pour presque tout x, $\Lambda_x = \widehat{\mathscr{E}_x}$

À la modification $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, u)$ on associe

$$\big(\mathscr{E}_2, \big(u(\widehat{\mathscr{E}_{1,x}})\big)_{x\in|X|}\big).$$

Via cette paramétrisation, les modifications effectives correspondent aux $(\mathscr{E}, (\Lambda_x)_x)$ tels que pour tout x, $\Lambda_x \subset \widehat{\mathscr{E}_x}$.

L'anneau B^+ est le sous-anneau de B formé des éléments dont les polygone de Newton est contenu dans le demi-plan supérieur,

$$\mathrm{B}^+ = \Big\{ f \in \mathrm{B} \mid \lim_{\substack{\rho\to 1\\ <}} |f|_\rho \leq 1 \Big\}.$$

Soit $\varphi\text{-Mod}_{\mathrm{B}^+}$ la catégorie des B^+-modules libres de rang fini munis d'un isomorphisme φ-linéaire. Rappelons qu'il y a une équivalence de catégories

$$\begin{array}{rcl} \varphi\text{-Mod}_{\mathrm{B}^+} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Fib}_X \\ (D,\varphi) & \longmapsto & \mathscr{E}(D,\varphi) \end{array}$$

où $\mathscr{E}(D,\varphi)$ est le faisceau associé au P-module gradué

$$\bigoplus_{d\geq 0} D^{\varphi=\pi^d}.$$

Soit $\mathfrak{m} \in |Y|$ et $x(\mathfrak{m})$ le point fermé associé de X via l'uniformisation

$$|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|.$$

Rappelons qu'il y a une identification canonique

$$\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x(\mathfrak{m})}$$

via laquelle

$$D\otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathscr{E}(\mathscr{D},\varphi)}_{x(\mathfrak{m})}.$$

Définition 4.15. *Un φ-module jaugé sur B^+ consiste en la donné d'un φ-module (D,φ) sur B^+ et pour tout $\mathfrak{m}\in|Y|$ d'un réseau $\Lambda_\mathfrak{m} \subset M\otimes \mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}$ satisfaisant*

- *pour tout $\mathfrak{m}$, $\varphi(\Lambda_\mathfrak{m}) = \Lambda_{\varphi(\mathfrak{m})}$*
- *pour presque tout $\mathfrak{m}$ modulo $\varphi^{\mathbb{Z}}$, $\Lambda_\mathfrak{m} = M\otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$.*

Il est dit effectif si pour tout $\mathfrak{m}$, $\Lambda_\mathfrak{m}\subset M\otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$. On note

$$\varphi\textit{-ModJa}_{\mathrm{B}^+},\ \varphi\textit{-ModJa}^{\geq 0}_{\mathrm{B}^+}$$

les catégories associées.

On a donc une équivalence

$$\varphi\text{-ModJa}_{\mathrm{B}^+} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}\!\mathit{odif}_X$$

induisant une équivalence entre catégories d'objets effectifs.

Définition 4.16. *Un φ-module jaugé est dit admissible si la modification associée l'est. On note*

$$\varphi\textit{-ModJa}^{ad}_{\mathrm{B}^+}$$

la catégorie associée.

Le théorème de classification des fibrés sur X fournit le critère d'admissibilité suivant.

Proposition 4.17. *Un φ-module jaugé $\big(D,\varphi,(\Lambda_\mathfrak{m})_\mathfrak{m}\big)$ est admissible si et seulement si*

$$\bigcap_{\mathfrak{m}\in|Y|} \big(D^{\varphi=\mathrm{Id}} \cap \Lambda_\mathfrak{m}\big)$$

est un E-espace vectoriel de dimension le rang de D.

Exemple 4.18. *Supposons que $E = \mathbb{Q}_p$. Soit $\mathfrak{m} \in |Y|$ et $C_\mathfrak{m} = \mathrm{B}/\mathfrak{m}$. Soit H un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_{C_\mathfrak{m}}$. Notons*

$$\mathbb{D}(H) = H^0\big((Spec(\mathcal{O}_{C_m}/p)/Spec(\mathbb{Z}_p))_{cris}, \mathcal{D}(H)\big)$$

l'évaluation du cristal de Dieudonné covariant $\mathcal{D}(H)$ de H sur l'épaississement

$$\theta_\mathfrak{m} : A_{cris}(\mathcal{O}_{C_\mathfrak{m}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{C_\mathfrak{m}}.$$

Il est muni de la filtration de Hodge

$$\mathrm{Fil}^1 A_{cris}\mathbb{D}(H) \subset \mathrm{Fil}\,\mathbb{D}(H) \subset \mathbb{D}(H)$$

telle que

$$\mathbb{D}(H)/\mathrm{Fil}^1 A_{cris}\mathbb{D}(H) = \omega_{H^D}.$$

Utilisant le théorème 7.21 de [3] on a alors

$$\mathbb{D}^{rig}(H) = \bigcap_{n\geq 0} \varphi^n\big(\mathbb{D}(H)\big[\tfrac{1}{p}\big]\big) \in \varphi\text{-}Mod_{\mathrm{B}^+}.$$

La filtration de Hodge définit alors un φ-module jaugé admissible de φ-module sous-jacent $\mathbb{D}^{rig}(H)$. La modification de fibrés associée est la suite exacte

$$0 \longrightarrow V_p(H) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{E}(\mathbb{D}^{rig}(H), \varphi) \longrightarrow i_{x(m)*}\omega_{H^D}\big[\tfrac{1}{p}\big] \longrightarrow 0.$$

Exemple 4.19. *Soit $K|\mathbb{Q}_p$ valué complet de valuation discrète à corps résiduel parfait et $K_0 = W(k_K)_\mathbb{Q}$. Prenons $F = C^\flat$ avec $C = \widehat{\overline{K}}$ et $E = \mathbb{Q}_p$. On dispose d'un point $\mathfrak{m}_0 \in |Y|$ canoniquement fixé qui est le noyau de l'application $\theta : \mathrm{B} \to C$. Soit φ-$ModFil_{K/K_0}$ la catégorie des φ-modules filtrés de Fontaine. Il y a un foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \varphi\text{-}ModFil_{K/K_0} & \longrightarrow & \varphi\text{-}ModJa_{\mathrm{B}^+} \\ (D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & \big(D \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+, \varphi\otimes\varphi, (\Lambda_\mathfrak{m})_\mathfrak{m}\big) \end{array}$$

où $\Lambda_\mathfrak{m} = D \otimes \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$ si $\mathfrak{m} \notin \varphi^\mathbb{Z}(\mathfrak{m}_0)$ et

$$\Lambda_{\mathfrak{m}_0} = \mathrm{Fil}^0\big(D_K \otimes_K \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}_0}\big)$$

via la section canonique de $\theta : \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}_0} \to C$ au dessus de K. Via ce foncteur, un φ-module filtré est admissible si et seulement si le φ-module jaugé associé l'est.

Exemple 4.20. *Les classes d'isomorphisme d'objets de rang 1 de φ-$ModJa^{ad,\geq 0}$ sont en bijection avec les diviseurs positifs sur X. Si D est un tel diviseur de degré d, choisissons $t \in P_d = (\mathrm{B}^+)^{\varphi=\pi^d}$ tel que $\mathrm{div}(t) = D$. Le φ-module jaugé associé a pour φ-module sous-jacent B^+t^{-1} et pour jauge $\Lambda_\mathfrak{m} = \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}} \subset \mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}t^{-1}$.*

4.2.3. *Classification de Hodge-Tate.* Les foncteur sections globales et $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X$ induisent des équivalences inverses entre fibrés semi-stables de pente 0 et E-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 4.21. *Un module de Hodge-Tate consiste en un E-espace vectoriel de dimension finie muni de réseaux $\Lambda_x \subset V \otimes \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[\frac{1}{t_x}]$ pour tout point fermé x de X tels que pour presque tout x, $\Lambda_x = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Il est dit effectif si de plus pour tout x, $V \otimes \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \subset \Lambda_x$. On note*

$$ModHT,\ ModHT^{\geq 0}$$

les catégories associées.

À tout $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, u) \in \mathscr{M}odif_X^{ad}$ on associe le module de Hodge-Tate $(V, (\Lambda_x)_x)$ défini par

$$\begin{array}{rcl} V & = & H^0(X, \mathscr{E}_1) \\ \Lambda_x & = & \widehat{\mathscr{E}}_{2,x}. \end{array}$$

Cela définit une équivalence

$$\mathscr{M}odif_X^{ad} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ModHT}.$$

Exemple 4.22. *Reprenons les notations de l'exemple 4.18. Il y a une suite exacte de Hodge-Tate*

$$0 \longrightarrow \omega_H^*\left[\tfrac{1}{p}\right](1) \xrightarrow{\alpha^\vee_{H^D}(1)} V_p(H)\otimes C_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\alpha_H} \omega_{H^D}\left[\tfrac{1}{p}\right] \longrightarrow 0.$$

L'inclusion

$$\omega_H^*\left[\tfrac{1}{p}\right] \subset V_p(H)\otimes C_{\mathfrak{m}}(-1) = V_p(H)\otimes \mathrm{Fil}^{-1}\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}/\mathrm{Fil}^0\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}$$

définit un module de Hodge-Tate effectif. La modification admissible de fibrés associée est coïncide avec celle définie en termes de φ-modules dans l'exemple 4.18.

Exemple 4.23. *Avec les notations de l'exemple 4.19, soit V une représentation potentiellement log-cristalline de Gal($\overline{K}|K$). Elle définit un module de Hodge-Tate $(V,(\Lambda_x)_x)$ où $\Lambda_x = V\otimes\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ si x n'est pas associé à $\mathfrak{m}_0$ et*

$$\Lambda_x = \Big(V\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}_0}\Big)^{G_K}\otimes_K \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}_0} \subset V\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}_0}$$

sinon via l'identification $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} = \mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}_0}$. Via la construction de Fontaine associant un φ-module filtré à une telle représentation, la modification de fibrés associée coïncide avec celle de l'exemple 4.19.

Exemple 4.24. *Les classes d'isomorphisme d'objets de rang 1 de ModHT$^{\geq 0}$ sont en bijection avec les diviseurs effectifs sur X. Au diviseur D on associe $V=E$ et $\Lambda_x = \widehat{\mathcal{O}_X(\mathcal{D})}_x$.*

4.3. **Construction d'un foncteur φ-Mod$_{\mathfrak{S}} \to \mathscr{M}odif_X^{ad,\geq 0}$.** On donne dans cette section la première construction du foncteur qui va nous intéresser. Nous suivons ici l'article [7].

4.3.1. *Rappels sur l'anneau* $\overline{\mathrm{B}}$. Rappelons que l'on note

$$\begin{aligned} v_0 : \mathrm{B}^{b,+} &\longrightarrow \mathbb{R}_+\cup\{+\infty\} \\ \sum_{n\gg-\infty}[x_n]\pi^n &\longmapsto \inf\{v(x_n)\mid n\in\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

C'est une valuation qui s'étend à l'anneau B^+,

$$v_0(x) = \lim_{r\to 0} v_r(x) = \lim_{+\infty}\mathrm{Newt(x)},\quad \mathrm{x}\in\mathrm{B}^+.$$

Notons

$$\mathfrak{p} = \{x\in\mathrm{B}^+ \mid v_0(x)>0\},$$

et

$$\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^+/\mathfrak{p}.$$

On montre alors que

$$\mathfrak{p} = \bigcup_{a\in\mathfrak{m}_F}[a]\mathrm{B}^+$$

et que de plus

$$\mathrm{B}^{b,+}/\mathfrak{p}\cap\mathrm{B}^{b,+} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{B}}.$$

On note encore $\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p}\cap\mathrm{B}^{b,+}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Le Frobenius φ est bijectif sur $\overline{\mathrm{B}}$. De plus, $\overline{\mathrm{B}}$ est un anneau local d'idéal maximal $W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)\left[\tfrac{1}{\pi}\right]/\mathfrak{p}$ et de corps résiduel

$$W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}.$$

Rappelons maintenant que l'application de réduction modulo $\mathfrak{p}$ induit une équivalence

$$\varphi\text{-Mod}_{\mathrm{B}^+} \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-Mod}_{\overline{\mathrm{B}}}.$$

De plus, après avoir fait un choix d'une section de la projection $\mathcal{O}_F \twoheadrightarrow k_F$, le foncteur d'extension des scalaires des k_F-isocristaux vers les φ-modules sur B^+

$$\varphi\text{-Mod}_{W(k_F)_{\mathbb{Q}}} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{\mathrm{B}^+}$$

est essentiellement surjectif. Plus précisément, tout objet de φ-Mod$_{\overline{\mathrm{B}}}$ est (non-canoniquement) isomorphe à l'extension des scalaires de $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}$ à $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)_{\mathbb{Q}}$ de sa réduction modulo $W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)_{\mathbb{Q}}$.

4.3.2. *Construction du morphisme de périodes ξ.* Soit $(M,\varphi)\in\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}$. Remarquons que tout élément primitif de $\mathfrak{S}$ devient une unité dans $\overline{\mathrm{B}}$. Il s'ensuit que la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de $(M[\frac{1}{\pi}],\varphi)$ définit un φ-module sur $\overline{\mathrm{B}}$

$$(M,\varphi)\otimes_{\mathfrak{S}}\overline{\mathrm{B}}\in\varphi\text{-Mod}_{\overline{\mathrm{B}}}.$$

Inversant l'équivalence $\varphi\text{-Mod}_{\mathrm{B}^+}\xrightarrow{\sim}\varphi\text{-Mod}_{\overline{\mathrm{B}}}$, on en déduit l'existence de $(D,\varphi)\in\varphi\text{-Mod}_{\mathrm{B}^+}$ et d'un isomorphisme

$$\iota:(D,\varphi)\otimes_{\mathrm{B}^+}\overline{\mathrm{B}}\xrightarrow{\sim}(M,\varphi)\otimes_{\mathfrak{S}}\overline{\mathrm{B}}$$

bien définis à isomorphisme unique près.

Exemple 4.25. *Avec les notations de l'exemple 4.3, le morphisme*

$$\mathfrak{S}_{k((u))}\longrightarrow\mathfrak{S}_F$$

envoie u sur $[\underline{\pi}]$ qui vérifie $v_0([\underline{\pi}])>0$. Il induit donc un morphisme

$$\mathfrak{S}_{k((u))}/u\longrightarrow\overline{\mathrm{B}}.$$

Ce morphisme se relève canoniquement en un morphisme vers B^+ compatible à l'action de φ puisque $\mathfrak{S}_{k((u))}/u=W(k)$. Ainsi, si $(M,\varphi)\in\varphi$-Mod$_{\mathfrak{S}_{k((u))}}$, après extension des scalaires à $\mathfrak{S}_F$, le φ-module sur B^+ associé par la construction précédente est

$$(D,\varphi)=\big((M,\varphi)\otimes_{u=0}W(k)\big)\otimes_{W(k)}\mathrm{B}^+.$$

La proposition qui suit est un analogue du lemme 3.5 de [7].

Proposition 4.26. *Il existe un unique morphisme*

$$\xi:D\longrightarrow M\otimes_{\mathfrak{S}}\mathrm{B}^+$$

commutant à l'action de φ et induisant ι par réduction modulo $\mathfrak{p}$.

Démonstration. Si ξ_1 et ξ_2 sont deux tels morphismes alors

$$\xi_1-\xi_2:D\longrightarrow[a].M\otimes_{\mathfrak{S}}\mathrm{B}^+$$

pour un $a\in\mathfrak{m}_F$. Mais puisque ξ_1 et ξ_2 commutent à l'action de φ et puisque ce dernier est bijectif sur D, pour tout $k\geq 0$

$$\mathrm{Im}(\xi_1-\xi_2)\subset[a^{q^k}].M\otimes_{\mathfrak{S}}\mathrm{B}^+.$$

On conclut que $\xi_1=\xi_2$ puisque B^+ est séparé pour la topologie définie par v_0.

Passons à l'existence. On note désormais φ_D et φ_M pour les Frobenius respectifs. On peut trouver (cf. rappels fin sec. 4.3.1) un sous-$\mathfrak{S}$-module libre stable sous l'action de φ_D, $\Lambda\subset D$, tel que

$$\Lambda\otimes_{\mathfrak{S}}\mathrm{B}^+=D.$$

et

$$\varphi_D:\Lambda[\tfrac{1}{\pi}]\xrightarrow{\sim}\Lambda[\tfrac{1}{\pi}].$$

On peut alors relever le morphisme de $\overline{\mathrm{B}}=\mathfrak{S}[\frac{1}{\pi}]/\mathfrak{p}$-modules

$$\iota:\Lambda[\tfrac{1}{\pi}]/\mathfrak{p}\xrightarrow{\sim}M[\tfrac{1}{\pi}]/\mathfrak{p}$$

en un morphisme de $\mathfrak{S}[\frac{1}{\pi}]$-modules

$$\xi_0:\Lambda[\tfrac{1}{\pi}]\longrightarrow M[\tfrac{1}{\pi}].$$

Quitte à remplacer Λ par $\pi^k\Lambda$ avec $k\gg 0$ on peut supposer que $\xi_0(\Lambda)\subset M$. Soit $C\in\mathbb{N}$ tel que dans $\Lambda[\frac{1}{\pi}]$

$$\varphi_D^{-1}(\Lambda)\subset\pi^{-C}\Lambda$$

Puisque ι est un morphisme de φ-modules, il existe $a\in\mathfrak{m}_F$ tel que

$$\varphi_M\circ\xi_0\circ\varphi_D^{-1}(\Lambda)\subset\pi^{-C}[a]M.$$

Notons alors pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\xi_n=\varphi_M^n\circ\xi_0\circ\varphi_D^{-n}:\Lambda[\tfrac{1}{\pi}]\longrightarrow M[\tfrac{1}{\pi}].$$

On a alors

$$(\xi_{n+1}-\xi_n)(\Lambda)\subset \pi^{-nC}[a^{q^n}]M.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\pi^{-nC}[a^{q^n}]=0$ dans B^+, on en déduit que la suite (ξ_n) converge vers un morphisme $\xi:\Lambda\big[\frac{1}{\pi}\big]\to M\otimes_{\mathfrak{S}}\mathrm{B}^+$ dont on vérifie qu'il convient. □

Remarque 4.27. *On remarquera l'analogie entre la construction du morphisme ξ et la description donnée Zink dans la proposition 71 de* [16] *du morphisme des périodes en termes de Displays. Dans le cas des groupes p-divisibles ces deux constructions sont en fait les mêmes.*

Exemple 4.28. *On reprend les notations de l'exemple 4.25. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des fonctions holomorphes de la variable u sur le disque ouvert de rayon* 1*. Le morphisme $u\mapsto[\underline{\pi}]$ de $\mathfrak{S}_{k((u))}$ dans $\mathfrak{S}_F$ se prolonge en un morphisme*

$$\mathcal{O}\longrightarrow\mathrm{B}^+.$$

Pour $(M,\varphi)\in\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}_{k((u))}}$ le morphisme ξ que l'on vient de décrire associé à $(M,\varphi)\otimes\mathfrak{S}_F$ est l'extension des scalaires via $\mathcal{O}\to\mathrm{B}^+$ du morphisme construit dans le lemme 3.5 de [7]*.*

Exemple 4.29. *Soit $M=\mathfrak{S}.e$, $\varphi(e)=xe$ de rang* 1 *(cf. exemple 4.12). On peut toujours supposer x distingué c'est à dire $x\equiv\pi^d$ modulo $W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)$ où d est le degré de x. On peut alors former le produit convergent de Weierstrass*

$$\Pi^+(x)=\prod_{n\geq 0}\frac{\varphi^n(x)}{\pi^d}\in\mathrm{B}^+.$$

On a alors $D=\mathrm{B}^+.\epsilon$ avec $\varphi(\epsilon)=\pi^d\epsilon$ et

$$\xi(\epsilon)=\Pi^+(x)e.$$

Exemple 4.30. *Reprenons l'exemple 4.3. Soit $x=pE([\underline{\pi}])/E(0)$, un générateur primitif distingué de $\mathfrak{m}$. Avec les notations de* [11]*, si*

$$\lambda=\prod_{n=0}^{\infty}\varphi^n(E(u)/E(0))$$

comme fonctions holomorphe de la variable u sur le disque ouvert alors

$$\Pi^+(x)=\lambda([\underline{\pi}]).$$

Puisque la formation de ξ est compatible au déterminant, on déduit de l'exemple précédent la proposition suivante.

Proposition 4.31. *Il existe un élément primitif distingué $x\in\mathfrak{S}$ tel que*

$$\xi:D\Big[\frac{1}{\Pi^+(x)}\Big]\xrightarrow{\sim}M\otimes_{\mathfrak{S}}\mathrm{B}^+\Big[\frac{1}{\Pi^+(x)}\Big].$$

4.3.3. *Construction de la modification.* Commençons par la proposition suivante.

Proposition 4.32. *Pour $(M,\varphi)\in\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}$*

$$Hom_{\mathfrak{S},\varphi}(M,\mathfrak{S})$$

est un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang $rg_{\mathfrak{S}}(M)$.

Démonstration. Après avoir fait le choix d'une base de M, cela se ramène à prouver la chose suivante. Soit $A\in M_n(\mathfrak{S})$ une matrice dont le déterminant est un élément primitif. Alors, le $\mathcal{O}_E$-module

$$T=\big\{X\in\mathfrak{S}^n\mid {}^{\varphi}X=AX\big\}$$

est un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang n. Il est clair que T est π-adiquement complet sans π-torsion. Il suffit donc de montrer que

$$\dim_{\mathbb{F}_q}T/\pi T=n.$$

Notons $\overline{A}\in M_n(\mathcal{O}_F)$ la réduction modulo π de A. Soit
$$\mathscr{G}=\ker\left(\mathbb{G}_{a/\mathcal{O}_F}^n\xrightarrow{\text{Frob}-\overline{A}}\mathbb{G}_{a/\mathcal{O}_F}^n\right)$$
C'est un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_F$ d'ordre q^n. Puisque $\det\overline{A}\neq 0$, il est de plus génériquement étale et donc, F étant algébriquement clos,
$$\dim_{\mathbb{F}_q}\mathscr{G}(\mathcal{O}_F)=n.$$
Il suffit maintenant de montrer que l'application de réduction modulo π
$$T\longrightarrow\mathscr{G}(\mathcal{O}_F)$$
est surjective. Par approximations successives, cela se ramène à montrer que le morphisme
$$\mathbb{G}_{a/\mathcal{O}_F}^n\xrightarrow{\text{Frob}-\overline{A}}\mathbb{G}_{a/\mathcal{O}_F}^n$$
est surjectif au niveau des $\mathcal{O}_F$-points ce qui résulte de ce que ce morphisme est plat fini et F algébriquement clos. □

Exemple 4.33. *Soit $M=\mathfrak{S}.e$, $\varphi(e)=xe$ de rang 1 (cf. exemple 4.12). Alors, avec les notations de [2], $Hom_\varphi(M,\mathfrak{S})$ est engendré par $e\mapsto\Pi^-(x)$.*

Définition 4.34. *Pour $(M,\varphi)\in\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}$ on pose*
$$\begin{aligned}V(M,\varphi)&=Hom_\varphi(M,\mathfrak{S})\big[\tfrac{1}{\pi}\big]\\ \mathscr{E}(M,\varphi)&=\mathscr{E}\big(D^\vee,\varphi\big)\in Fib_X.\end{aligned}$$
où $D^\vee=\mathscr{H}om_{\mathrm{B}^+}(D,\mathrm{B}^+)$ le φ-module dual.

On a
$$\begin{aligned}H^0(X,\mathscr{E}(M,\varphi))&=\mathscr{H}om_{\mathrm{B}^+}(D,\mathrm{B}^+)^{\varphi=\mathrm{Id}}\\&=\mathrm{Hom}_\varphi(D,\mathrm{B}^+)\end{aligned}$$

et l'application $\xi:D\to M\otimes\mathrm{B}^+$ induit par transposition un morphisme
$$\xi^*:V(M,\varphi)\longrightarrow H^0(X,\mathscr{E}(M,\varphi))$$
c'est à dire un morphisme de fibrés
$$u:V(M,\varphi)\otimes_E\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathscr{E}(M,\varphi).$$

Proposition 4.35. *Le morphisme de fibrés précédent u est une modification.*

Démonstration. Puisque les deux fibrés ont même rang il suffit de vérifier que ce morphisme est génériquement injectif. D'après la proposition 4.31 il existe $t\in P$ homogène tel que après inversion de t
$$\xi:D\big[\frac{1}{t}\big]\xrightarrow{\sim}M\otimes_{\mathfrak{S}}\mathrm{B}^+\big[\frac{1}{t}\big].$$
Avec les notations de 4.31 il suffit de prendre $t=\Pi^+(x)\Pi^-(x)$. Soit $\mathrm{B}_e=\mathrm{B}^+[\frac{1}{t}]^{\varphi=\mathrm{Id}}$. Sur l'ouvert affine $D^+(t)=\mathrm{Spec}(\mathrm{B}_e)$ le morphisme de fibrés est donné par le morphisme de B_e-modules
$$\xi^*:\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(M,\mathfrak{S})\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathrm{B}_e\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}^+[\frac{1}{t}],\varphi}\big(D[\tfrac{1}{t}],\mathrm{B}^+[\tfrac{1}{t}]\big).$$
Il suffit donc de vérifier que l'application
$$Hom_{\mathfrak{S},\varphi}(M,\mathfrak{S})\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathrm{B}_e\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S},\varphi}(M,\mathrm{B}^+[\tfrac{1}{t}])$$
est injective après extension des scalaires au corps des fractions de B_e ce qui résulte du lemme bien connu 5 qui suit. □

Lemme 5. *Soient K un corps muni d'un automorphisme σ et V un K-espace vectoriel muni d'un endomorphisme σ-linéaire u. Alors l'application linéaire*
$$V^{u=\mathrm{Id}}\otimes_{K^{\sigma=\mathrm{Id}}}K\longrightarrow V$$
est injective.

4.3.4. *Fonctorialité.*

Proposition 4.36. *La correspondance*
$$(M,\varphi)\longmapsto \big[V(M,\varphi)\otimes\mathcal{O}_X\hookrightarrow \mathscr{E}(M,\varphi)\big]$$
induit un foncteur contravariant
$$\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}]\longrightarrow \mathscr{M}odif_X^{ad,\geq 0}$$

Afin de montrer la proposition précédente, commençons par vérifier que la correspondance $(M,\varphi)\mapsto V(M,\varphi)$ s'étend en un foncteur défini sur φ-Mod$_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}]$. Cela résulte du lemme suivant.

Lemme 6. *Pour $(M,\varphi)\in\varphi$-$Mod_{\mathfrak{S}}$ on a*
$$V(M,\varphi)=Hom_{\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S},\varphi}(\mathscr{S}^{-1}M,\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S}).$$

Démonstration. Il s'agit de vérifier que tout morphisme de $\mathfrak{S}$-modules
$$M\longrightarrow\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S}$$
commutant à φ est à valeurs dans $\mathfrak{S}$. Pour cela, remarquons que
$$\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S}/\mathfrak{S}\big[\tfrac{1}{\pi}\big]=\bigoplus_{\mathfrak{m}\in|Y|}\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}/\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$$
sur lequel φ agit par permutation de $\mathfrak{m}\in|Y|$ via $\varphi:\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{B}_{dR,\varphi(\mathfrak{m})}$. Il résulte de cette description que tout sous-$\mathfrak{S}\big[\frac{1}{\pi}\big]$-module de type fini de $\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S}/\mathfrak{S}$ stable sous φ est nul. □

La correspondance $(M,\varphi)\mapsto(D,\varphi)$ s'étend en un foncteur sur φ-Mod$_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}]$ et donc $(M,\varphi)\mapsto\mathscr{E}(M,\varphi)$ également. C'est une conséquence de ce que les éléments de $\mathscr{S}$ s'envoient sur des unités de $\overline{\mathrm{B}}$ et donc
$$M\otimes_{\mathfrak{S}}\overline{\mathrm{B}}=\mathscr{S}^{-1}M\otimes_{\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S}}\overline{\mathrm{B}}.$$
Il reste donc à vérifier la fonctorialité de ξ. Pour cela, soit $a\in\mathfrak{S}$ primitif distingué et
$$f:M_1\longrightarrow M_2\big[\frac{1}{a}\big]$$
un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules commutant à l'action de φ. Il induit un morphisme de modules sur B^+ commutant à l'action de φ
$$M_1\otimes\mathrm{B}^+\longrightarrow M_2\otimes\mathrm{B}^+\Big[\frac{1}{\Pi^+(a)}\Big].$$
Par construction même de ξ (cf. preuve 4.26), le diagramme
$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "\xi_1"] \arrow[d] & & M_1\otimes\mathrm{B}^+ \arrow[d] \\ D_2 \arrow[r, "\xi_2"] & M_2\otimes\mathrm{B}^+ \arrow[r, hook] & M_2\otimes\mathrm{B}^+\Big[\frac{1}{\Pi^+(a)}\Big] \end{tikzcd}$$
commute. On en déduit un morphisme de modifications.

4.3.5. *Calcul du conoyau et du φ-module jaugé associé.* Si N est un $\mathfrak{S}\big[\frac{1}{\pi}\big]$-module annulé par un élément primitif on note
$$N^\vee=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}[\frac{1}{\pi}]}\big(N,\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S}/\mathfrak{S}\big[\tfrac{1}{\pi}\big]\big)$$
son dual où
$$\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S}/\mathfrak{S}\big[\tfrac{1}{\pi}\big]=\bigoplus_{\mathfrak{m}\in|Y|}\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}/\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}.$$

Proposition 4.37. *Soit $(M,\varphi)\in\varphi$-$Mod_{\mathfrak{S}}^{\rho}$ pour un $\rho\in]0,1[$.*

(1) *Le conoyau de*
$$V(M,\varphi)\otimes\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{E}(M,\varphi)$$
s'identifie au faisceau cohérent sur X associé au faisceau cohérent sur X^{ad}
$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\varphi_*^n\mathscr{F}$$
où $\mathscr{F}$ est le faisceau cohérent de torsion à support fini de sections globales $(\mathrm{coker}\,\varphi[\frac{1}{\pi}])^\vee$.

(2) *Le φ-module jaugé associé à la modification est $(D^\vee,\varphi,(\Lambda_\mathfrak{m})_\mathfrak{m})$ où si pour $\mathfrak{m}\in|Y|$ on note*
$$\xi_\mathfrak{m}=\xi\otimes\mathrm{Id}: D\otimes_{\mathrm{B}^+}\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}\xrightarrow{\sim} M\otimes_\mathfrak{S}\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}$$
alors lorsque $\|\mathfrak{m}\|\in]\rho^q,\rho]$
$$\Lambda_\mathfrak{m}=\big(\xi_\mathfrak{m}^{-1}(M\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}})\big)^\vee$$
le réseau dual de $\xi_\mathfrak{m}^{-1}(M\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}})$ dans $D^\vee\otimes\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}=(D\otimes\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}})^\vee$.

Démonstration. Pour tout $\mathfrak{m}\in|Y|$ il y a un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} D\otimes_{\mathrm{B}^+}\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}} \arrow[r, "\xi_m"] \arrow[d, "\varphi", "\simeq"'] & M\otimes_\mathfrak{S}\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}} \arrow[d, hook, "\varphi"] \\ D\otimes_{\mathrm{B}^+}\mathrm{B}^+_{dR,\varphi(\mathfrak{m})} \arrow[r, "\xi_{\varphi(\mathfrak{m})}"] & M\otimes_\mathfrak{S}\mathrm{B}^+_{dR,\varphi(\mathfrak{m})} \end{tikzcd}$$
dont les flèches deviennent des isomorphismes après extension des scalaires à B_{dR}. Puisque ξ devient un isomorphisme après inversion d'un élément de la forme $\Pi^+(a)$ où $\mathrm{div}(a)\in\mathrm{Div}^+(Y)$ a pour support $\mathrm{Supp}(\mathrm{coker}\,\varphi[\frac{1}{\pi}])$, on sait que si $\|\mathfrak{m}\|\notin]\rho^q,\rho]$ alors la flèche horizontale du haut est un isomorphisme. On en déduit que si $\|\mathfrak{m}\|\in]\rho^q,\rho]$, il y a une égalité de réseaux
$$\varphi\big(M\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\varphi^{-1}(\mathfrak{m})}\big)=\xi_\mathfrak{m}\big(D\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}\big).$$
Sous cette hypothèse il y a donc un morphisme injectif de $\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$-modules induit par l'inverse de $\xi_\mathfrak{m}$
$$M\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}/\varphi\big(M\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\varphi^{-1}(\mathfrak{m})}\big)\hookrightarrow D\otimes\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}/\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}.$$
Cela induit par application de $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{B}_{dR,\mathfrak{m}}/\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}})$ un morphisme surjectif
$$D^\vee\otimes_{\mathrm{B}^+}\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}=\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}^+}(D,\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}})\longrightarrow\Big(M\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}/\varphi\big(M\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\varphi^{-1}(\mathfrak{m})}\big)\Big)^\vee.$$
Soit $x(\mathfrak{m})\in|X|$ le point associé à $\mathfrak{m}$. Il y a une identification canonique
$$\widehat{\mathscr{E}(\mathscr{M},\varphi)}_{x(\mathfrak{m})}=D^\vee\otimes_{\mathrm{B}^+}\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}$$
d'où un morphisme surjectif de faisceaux cohérents
$$\mathscr{E}(M,\varphi)\longrightarrow\bigoplus_{\|m\|\in]\rho^q,\rho]} i_{x(\mathfrak{m})*}\Big(M\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\mathfrak{m}}/\varphi\big(M\otimes\mathrm{B}^+_{dR,\varphi^{-1}(\mathfrak{m})}\big)\Big)^\vee=:\mathscr{G}.$$
On vérifie facilement que ce morphisme composé avec
$$V(M,\varphi)\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathscr{E}(M,\varphi)$$
est nul. Afin de conclure il s'agit maintenant de montrer que la suite obtenue est exacte. Pour cela, il suffit de montrer que
$$\deg(\mathscr{E}(M,\varphi))=\underbrace{\deg(V(M,\varphi)\otimes\mathcal{O}_X)}_{0}+\deg(\mathscr{G}).$$
Le degré de $\mathscr{E}(M,\varphi)$ se calcule en termes du polygone de Newton de l'isocristal obtenu par réduction modulo $W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)$:
$$\deg(\mathscr{E}(M,\varphi))=\big[M\otimes_\mathfrak{S}W_{\mathcal{O}_E}(k_F):\varphi\big(M\otimes_\mathfrak{S}W_{\mathcal{O}_E}(k_F)\big)\big].$$

De plus
$$\deg(\mathscr{G}) = \mathrm{long}_{\mathfrak{S}[\frac{1}{\pi}]}\big(\mathrm{coker}\,\varphi\big[\tfrac{1}{\pi}\big]\big)$$
qui coïncide bien avec $\deg(\mathscr{E}(M,\varphi))$. □

4.4. **Construction analytique du foncteur.** On présente maintenant une construction du foncteur
$$\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}] \longrightarrow \mathscr{M}odif_X^{ad,\geq 0}$$
en termes de fibrés vectoriels sur Y^{ad}. Il s'agit d'une construction « analytique » par opposition à la construction précédente qui était « algébrique ».

Définition 4.38. *On note φ-Mod$_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}$ la catégorie des fibrés vectoriels $\mathscr{E}$ sur Y^{ad} munis d'une modification de support fini*
$$\varphi^*\mathscr{E} \hookrightarrow \mathscr{E}.$$

Par modification de support fini on entend que le faisceau cohérent de torsion $\mathscr{E}/\varphi^*\mathscr{E}$ est à support fini i.e. contenue dans Y_I^{ad} pour un intervalle compact $I \subset]0,1[$.

Il y a un foncteur
$$\begin{array}{ccc} \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}} & \longrightarrow & \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}} \\ (M,\varphi) & \longmapsto & (M\otimes_{\mathfrak{S}}\mathcal{O}_{Y^{ad}}, \varphi\otimes\varphi). \end{array}$$

La proposition suivante est élémentaire mais fondamentale pour la construction.

Proposition 4.39. *Soit $(\mathscr{E},\varphi) \in \varphi$-Mod$_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}$. Alors,*
$$\bigcap_{n\geq 0}\varphi^{n*}\mathscr{E} \quad et \quad \bigcup_{n\leq 0}\varphi^{n*}\mathscr{E}$$
sont des fibrés vectoriels φ-équivariants sur Y^{ad} donnant lieu à un objet de $\mathscr{M}odif_{X^{ad}}$
$$\bigcap_{n\geq 0}\varphi^{n*}\mathscr{E} \hookrightarrow \bigcup_{n\leq 0}\varphi^{n*}\mathscr{E}.$$

Démonstration. Commençons par préciser les notations. La modification $\varphi^*\mathscr{E} \hookrightarrow \mathscr{E}$ induit par itération une suite de modifications
$$\cdots \hookrightarrow \varphi^{(n+1)*}\mathscr{E} \hookrightarrow \varphi^{n*}\mathscr{E} \hookrightarrow \varphi^{(n-1)*}\mathscr{E} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \varphi^*\mathscr{E} \hookrightarrow \mathscr{E}.$$
qui forme un système projectif. On note alors
$$\bigcap_{n\geq 0}\varphi^{n*}\mathscr{E} = \varprojlim_{n\geq 0}\varphi^{n*}\mathscr{E}.$$
comme faisceau de $\mathcal{O}_{Y^{ad}}$-modules. De la même façon, on dispose d'un système inductif
$$\mathscr{E} \hookrightarrow (\varphi^{-1})^*\mathscr{E} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \varphi^{n*}\mathscr{E} \hookrightarrow \varphi^{(n-1)*}\mathscr{E} \hookrightarrow \cdots$$
et on note
$$\bigcup_{n\leq 0}\varphi^{n*}\mathscr{E} = \varinjlim_{n\leq 0}\varphi^{n*}\mathscr{E}.$$
Soit maintenant $I \subset]0,1[$ un intervalle compact. Puisque le conoyau de φ sur $\mathscr{E}$ est à support fini, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geq N$, les morphismes de faisceaux de $\mathcal{O}_{Y^{ad}}$-modules
$$\varphi^{(n+1)*}\mathscr{E} \hookrightarrow \varphi^{n*}\mathscr{E}$$
et
$$(\varphi^{-n})^*\mathscr{E} \hookrightarrow (\varphi^{-n-1})^*\mathscr{E}$$
soient des isomorphismes en restriction à Y_I^{ad}. Il en résulte que les systèmes projectifs et inductifs précédents deviennent « essentiellement constants » en restriction à Y_I^{ad}. On en déduit facilement le résultat. □

Pour $(\mathscr{E},\varphi)\in\varphi\text{-Mod}_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}$ on note désormais

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_\infty &= \bigcap_{n\geq 0}\varphi^{n*}\mathscr{E}\\ \mathscr{E}^\infty &= \bigcup_{n\leq 0}\varphi^{n*}\mathscr{E}.\end{aligned}$$

Remarquons le point clef suivant : les inclusions de fibrés

$$\mathscr{E}_\infty\subset\mathscr{E}\subset\mathscr{E}^\infty$$

sont telles que :

- il existe $\rho\in]0,1[$ tel que
$$\mathscr{E}_{\infty|Y^{ad}_{[\rho,1[}}=\mathscr{E}_{|Y^{ad}_{[\rho,1[}},$$
- il existe $\rho'\in]0,1[$ tel que
$$\mathscr{E}^\infty_{|Y^{ad}_{]0,\rho']}}=\mathscr{E}^\infty_{|Y^{ad}_{]0,\rho']}}.$$

Lemme 7. *Soit $(\mathscr{E}_1,\varphi)\to(\mathscr{E}_2,\varphi)$ un morphisme de φ-modules sur $\mathcal{O}_{Y^{ad}}$ tel que le morphisme induit $\mathscr{E}_1\to\mathscr{E}_2$ soit une modification à support fini i.e. $\mathscr{E}_1\hookrightarrow\mathscr{E}_2$ de conoyau un faisceau cohérent de torsion de longueur finie. Alors,*

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{1,\infty} &\xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_{2,\infty}\\ \mathscr{E}_1^\infty &\xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_2^\infty.\end{aligned}$$

Démonstration. Il existe $\rho\in]0,1[$ tel que le morphisme

$$\mathscr{E}_{1,\infty}\longrightarrow\mathscr{E}_{2,\infty}$$

soit un isomorphisme sur $Y^{ad}_{[\rho,1[}$. Puisque ce morphisme est un morphisme de fibrés $\varphi^{\mathbb{Z}}$-équivariants et que les itérés sous $\varphi^{\mathbb{Z}}$ de $Y^{ad}_{[\rho,1[}$ recouvrent Y^{ad}, c'est un isomorphisme. On conclut de la même façon pour le morphisme $\mathscr{E}_1^\infty\to\mathscr{E}_2^\infty$. □

Définition 4.40. *On note $\varphi\text{-Mod}_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}[\mathscr{M}^{-1}]$ la catégorie $\varphi\text{-Mod}_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}$ localisée relativement à la famille de morphismes $(\mathscr{E}_1,\varphi)\to(\mathscr{E}_2,\varphi)$ dont le morphisme sous-jacent $\mathscr{E}_1\to\mathscr{E}_2$ est une modification à support fini.*

On a donc construit un foncteur contravariant

$$\begin{aligned}\varphi\text{-Mod}_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}[\mathscr{M}^{-1}] &\longrightarrow \mathscr{M}odif_X^{\geq 0}\\ (\mathscr{E},\varphi) &\longmapsto \big[\mathscr{E}_\infty\hookrightarrow\mathscr{E}^\infty\big]^\vee.\end{aligned}$$

Il y a bien évidemment un foncteur

$$\begin{aligned}\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}] &\longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}[\mathscr{M}^{-1}]\\ (M,\varphi) &\longmapsto \big(M\otimes_{\mathfrak{S}}\mathcal{O}_{Y^{ad}},\varphi\otimes\varphi\big).\end{aligned}$$

Proposition 4.41. *Le foncteur composé*

$$\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}]\longrightarrow\varphi\text{-}Mod_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}[\mathscr{M}^{-1}]\longrightarrow\mathscr{M}odif_X^{\geq 0}$$

est à valeurs dans $\mathscr{M}odif_X^{ad,\geq 0}$.

Démonstration. Rappelons (on renvoie à la section 7 de [3] par exemple) que l'on note

$$\mathscr{R}=\varinjlim_{\rho\to 0}\Gamma(Y^{ad}_{]0,\rho]},\mathcal{O}_{Y^{ad}})$$

l'anneau de Robba et

$$\mathscr{E}^\dagger=\mathscr{R}^b=\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}\left[\tfrac{1}{\pi}\right]$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger} &= \{x \in \mathscr{R} \mid \lim_{\rho\to 0} |x|_\rho < +\infty\} \\ &= \Big\{ \sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}_F} \mid \exists \rho > 0, \exists C \in \mathbb{R},\ \forall n\ \ |x_n|\rho^n \leq C \Big\}.\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que l'inclusion $\mathfrak{S} \subset \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$ s'étend en une inclusion

$$\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{S} \subset \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$$

i.e. tout élément primitif dans $\mathfrak{S}$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$. Maintenant, pour $(M,\varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}$, si $(\mathscr{E},\varphi) = (M,\varphi)\otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{Y^{ad}}$, puisque pour un $\rho \in]0,1[$ on a

$$\mathscr{E}_{|Y^{ad}_{]0,\rho]}} = \mathscr{E}^\infty_{Y^{ad}_{]0,\rho]}}$$

alors

$$\varinjlim_{\rho\to 0} H^0(Y^{ad}_{]0,\rho]}, \mathscr{E}^\infty) = M \otimes_{\mathfrak{S}} \mathscr{R}$$

comme φ-module sur l'anneau de Robba. Mais puisque tout élément primitif devient une unité de $\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$, ce φ-module est étale au sens de Kedlaya :

$$(M\otimes_{\mathfrak{S}} \mathscr{R}, \varphi\otimes\varphi) = (M\otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}, \varphi\otimes\varphi)\otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}} \mathscr{R}$$

avec $\varphi\otimes\varphi$ bijectif sur $M\otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$. D'après Kedlaya, le fibré $\mathscr{E}^\infty$ associé sur X^{ad} est semi-stable de pente 0. □

Nous ne démontrons pas le résultat suivant afin de ne pas alourdir le texte. Il suffit de retracer pas à pas chacune des constructions.

Proposition 4.42. *Les deux constructions précédentes du foncteur*

$$\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}] \longrightarrow \mathscr{M}odif_X^{ad,\geq 0}$$

coïncident.

4.5. **Énoncé de la conjecture.** Commençons par résumer ce que l'on a démontré dans les sections précédentes.

Théorème 4.43. *Il y a un foncteur contravariant*

$$\begin{aligned}\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}] &\longrightarrow \mathscr{M}odif_X^{ad,\geq 0} \\ (M,\varphi) &\longmapsto \big[V(M,\varphi)\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathscr{E}(M,\varphi)\big]\end{aligned}$$

où

- $V(M,\varphi) = Hom_\varphi(M,\mathfrak{S})$.
- $\mathscr{E}(M,\varphi) = \mathscr{E}(D^\vee,\varphi)$ *avec* $(D,\varphi)\in\varphi\text{-}Mod_{\mathrm{B}^+}$ *tel que*
$$(M,\varphi)\otimes_{\mathfrak{S}} \overline{\mathrm{B}} = (D,\varphi)\otimes_{\mathrm{B}^+}\overline{\mathrm{B}}$$
via l'équivalence $\varphi\text{-}Mod_{\mathrm{B}^+} \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-}Mod_{\overline{\mathrm{B}}}$.
- *via l'équivalence* $\varphi\text{-}Mod^\rho_{\mathfrak{S}} \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}]$ *pour un* $\rho\in]0,1[$, *le conoyau de la modification est le faisceau cohérent de torsion sur* X *associé au faisceau cohérent de torsion* φ*-invariant*
$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n_*\mathscr{F}.$$
sur Y^{ad} *où* $\mathscr{F}$ *est tel que* $H^0(Y^{ad},\mathscr{F}) = (\operatorname{coker}\varphi[\frac{1}{\pi}])^\vee$.

Via l'équivalence entre fibrés sur X *et fibrés sur* X^{ad}, *le foncteur précédent est donné par*

$$(M,\varphi)\longmapsto \Big[\bigcap_{n\geq 0}\varphi^{n*}\big(M\otimes_{\mathfrak{S}}\mathcal{O}_{Y^{ad}}\big) \hookrightarrow \bigcup_{n\leq 0}\varphi^{n*}\big(M\otimes_{\mathfrak{S}}\mathcal{O}_{Y^{ad}}\big)\Big].$$

On peut maintenant énoncer la conjecture.

Conjecture 4. *Le foncteur*

$$\varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}[\mathscr{S}^{-1}] \otimes \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathscr{M}odif_X^{ad,\geq 0}$$

est une équivalence de catégories.

4.6. **La conjecture en rang 1.** On reprend les exemples 4.12, 4.20, 4.29 et 4.33. Le théorème suivant est essentiellement contenu dans [2].

Théorème 4.44. *La conjecture précédente est vérifiée pour les objets de rang* 1*.*

Démonstration. L'essentielle surjectivité se résume à ce que tout $t \in P$ homogène s'écrit sous la forme $\Pi(x) = \Pi^+(x)\Pi^-(x)$ à un $E^\times$-multiple près où $x \in \mathfrak{S}$ est primitif distingué. Ce résultat est démontré dans [2].

Passons à la pleine fidélité. Soient $M = \mathfrak{S}.e$ avec $\varphi(e) = xe$ et $M' = \mathfrak{S}.\epsilon$ avec $\varphi(\epsilon) = y\epsilon$ deux φ-modules de rang 1 dans $\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}^{\rho}$. On peut supposer que x et y sont distingués i.e. congrus à une puissance de π modulo $W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)$. Se donner un morphisme de M vers M' revient à se donner un élément $z \in \mathfrak{S}$ vérifiant

$$xz = \varphi(z)y.$$

Si une telle équation est vérifiée alors

$$\text{div}(x) + \text{div}(z) = \varphi(\text{div}(z)) + \text{div}(y)$$

dans $\text{Div}^+(Y)$. Puisque $z \in \mathfrak{S}$, son diviseur est contenu dans $\{\|\mathfrak{m}\| \geq \rho\}$ pour un $\rho \in]0,1[$. On en déduit que si $D = \text{div}(x) - \text{div}(y)$ alors

$$\text{div}(z) = \sum_{n<0} \varphi^n(D).$$

Puisque les supports des itérés de D sous les puissances de φ sont disjoints (grâce à l'hypothèse faite que nos φ-modules sont dans $\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}^{\rho}$) on a donc $D \geq 0$ c'est à dire

$$\text{div}(x) \geq \text{div}(y)$$

soit encore $x \in \mathfrak{S}y$. Écrivons $x = wy$, $w \in \mathfrak{S}$. Nécessairement, w est primitif distingué et

$$z = \Pi^-(w)$$

à un $E^\times$-multiple près. On vérifie alors facilement que le choix d'un tel z est équivalent à se donner un morphisme des modifications associées. $\square$

4.7. **Quelques pas vers la conjecture du point de vue analytique.**

Proposition 4.45. *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \varphi\text{-}Mod_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}[\mathscr{M}^{-1}] & \longrightarrow & \mathscr{M}odif_{X^{ad}}^{\geq 0} \\ (\mathscr{E},\varphi) & \longmapsto & \left[\mathscr{E}_\infty \hookrightarrow \mathscr{E}^\infty\right]^\vee \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. Étant donné un faisceau cohérent de torsion $\mathscr{F}$ sur Y^{ad} et un intervalle $I \subset]0,1[$ on lui associe le faisceau cohérent de torsion

$$\tau_I\mathscr{F} := j_I * j_I^*\mathscr{F}$$

où $j_I : Y_I^{ad} \hookrightarrow Y^{ad}$. C'est le plus grand sous-faisceau de $\mathscr{F}$ à support dans Y_I^{ad}. Remarquons que

$$\varphi^*(\tau_I\mathscr{F}) = \tau_{I'}(\varphi^*\mathscr{F})$$

où les extrémités de I' sont obtenues à partir de celles de I en appliquant $\rho \mapsto \rho^q$.

Nous allons décrire un foncteur inverse. On choisit $\rho \in]0,1[$ quelconque. Soit

$$\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_2$$

une modification de fibrés $\varphi^{\mathbb{Z}}$-équivariants sur Y^{ad}. On lui associe la modification duale

$$\mathscr{H}_2^\vee \subset \mathscr{H}_1^\vee.$$

Soit alors $\mathscr{E}$ l'unique $\mathcal{O}_{Y^{ad}}$-module satisfaisant

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_2^\vee \subset \mathscr{E} \subset \mathscr{H}_1^\vee \\ \mathscr{E}/\mathscr{H}_2^\vee = \tau_{]0,\rho]}\Big(\mathscr{H}_1^\vee/\mathscr{H}_2^\vee\Big).\end{aligned}$$

On a via la structure $\varphi^{\mathbb{Z}}$-équivariante sur $\mathscr{H}_1^\vee/\mathscr{H}_2^\vee$

$$\begin{aligned}\varphi^*\Big(\tau_{]0,\rho]}\Big(\mathscr{H}_1^\vee/\mathscr{H}_2^\vee\Big)\Big) &= \tau_{]0,\rho^q]}\Big(\varphi^*\Big(\mathscr{H}_1^\vee/\mathscr{H}_2^\vee\Big)\Big) \\ &\xrightarrow{\sim} \tau_{]0,\rho^q]}\Big(\mathscr{H}_1^\vee/\mathscr{H}_2^\vee\Big)\Big) \\ &\hookrightarrow \tau_{]0,\rho]}\Big(\mathscr{H}_1^\vee/\mathscr{H}_2^\vee\Big).\end{aligned}$$

On en déduit que via le morphisme $\varphi^*\mathscr{H}_1^\vee \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_1^\vee$,

$$\varphi^*\mathscr{E} \subset \mathscr{E}$$

avec pour conoyau un faisceau cohérent de torsion de longueur finie. On vérifie aisément que cela définit une équivalence inverse (indépendante du choix de ρ grâce à la localisation faite de la catégorie φ-$\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}$). □

Mentionnons maintenant le résultat suivant dont nous éludons la preuve.

Proposition 4.46. *Via le foncteur sections globales sur Y^{ad}, la catégorie φ-$Mod_{\mathcal{O}_{Y^{ad}}}[\mathscr{M}^{-1}]$ est équivalente à la catégorie φ-$\widetilde{Mod}_{\mathrm{B}}$ dont les objets sont les couples (M,φ) où M est un* B*-module projectif et $\varphi : M \to M$ un morphisme φ-linéaire de conoyau annulé par un élément primitif et les morphismes entre (M_1,φ_1) et (M_2,φ_2) sont donnés par*

$$Hom_{\mathscr{S}^{-1}\mathrm{B},\varphi}(\mathscr{S}^{-1}M_1, \mathscr{S}^{-1}M_2).$$

En examinant la preuve du lemme 1.3.13 de [11] on est alors amené à la conjecture suivante.

Conjecture 5.

(1) Soit M un B*-module projectif muni d'un morphisme φ-linéaire de M dans lui-même de conoyau annulé par un élément primitif. Alors, M est un* B*-module libre i.e. le fibré associé sur Y^{ad} est trivial.*

(2) Pour tout entier n on a

$$GL_n(\mathscr{R}) = GL_n(\mathrm{B}).GL_n(\mathscr{R}^b).$$

Théorème 4.47. *Sous la conjecture 5, la conjecture 4 est vérifiée.*

Démonstration. Soit $(M,\varphi) \in \varphi$-$\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathrm{B}}$. Par hypothèse, M est un B-module libre. L'objet de $\mathscr{M}odif_X^{\geq 0}$ associé est admissible si et seulement si

$$(M,\varphi)\otimes_{\mathrm{B}}\mathscr{R}$$

est étale i.e. de la forme

$$(\Lambda,\varphi)\otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}}\mathscr{R}$$

avec $\Lambda \subset M\otimes_{\mathrm{B}}\mathscr{R}$ un $\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$-module libre de rang fini et $\varphi : \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda$ (un tel réseau Λ est alors unique à isogénie près i.e. $\Lambda[\big[\frac{1}{\pi}\big]]$ est unique). Si c'est le cas, d'après le point (2) de la conjecture 5, on peut choisir une base de M qui soit une base de $\Lambda\big[\frac{1}{\pi}\big]$. Puisque $\mathrm{B}\cap\mathscr{R}^b = \mathfrak{S}\big[\frac{1}{\pi}\big]$, on en déduit que $(M\cap\Lambda,\varphi) \in \varphi$-$\mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}$ et vérifie

$$(M\cap\Lambda,\varphi)\otimes_{\mathfrak{S}}\mathrm{B} = (M,\varphi).$$

La correspondance $(M,\varphi)\mapsto(M\cap\Lambda,\varphi)$ induit alors une équivalence inverse. □

4.8. **Application aux groupes p-divisibles.**

4.8.1. *Construction d'un foncteur.* Soit $C|\mathbb{Q}_p$ valué complet algébriquement clos et $F = C^\flat$. On prend $E = \mathbb{Q}_p$ et on note $\mathfrak{m} = \ker\big(\mathrm{B} \xrightarrow{\theta} C\big) \in |Y_F|$. On note $\mathfrak{m}_{\mathfrak{S}} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{S}$ qui est engendré par un élément primitif de degré 1.

Définition 4.48.

(1) *On note* φ*-Mod*$_{\mathfrak{S}}^{\leq \mathfrak{m}}$ *la sous-catégorie pleine de* φ*-Mod*$_{\mathfrak{S}}$ *formée des* (M,φ) *tels que* $\operatorname{coker}\varphi\big[\frac{1}{p}\big]$ *soit annulé par* $\mathfrak{m}$*.*

(2) *On note* φ*-Mod*$_{\mathfrak{S}}^{\leq \mathfrak{m}, f}$ *la sous-catégorie pleine de* φ*-Mod*$_{\mathfrak{S}}^{\leq \mathfrak{m}}$ *formée des* (M,φ) *tels que la réduction modulo* p *de* φ *soit topologiquement nilpotent sur le* $\mathcal{O}_F$*-module libre* M/pM*.*

Définition 4.49. *On note* $BT_{\mathcal{O}_C}$ *la catégorie des groupes* p*-divisibles sur* $\mathcal{O}_C$ *et* $BT_{\mathcal{O}_C}^f$ *celle des groupes* p*-divisibles formels.*

Nous allons maintenant expliquer comment construire un foncteur contravariant

$$\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}^{\leq \mathfrak{m}, f} \longrightarrow \mathrm{BT}_{\mathcal{O}_C}^f$$

tel que si $(M,\varphi) \mapsto H$ alors on ait canoniquement

(1) $M/\varphi(M) \simeq (M/\varphi(M)) \otimes \mathfrak{m}_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{S}}^2 = \omega_H$
(2) $\varphi(M)/\mathfrak{m}_{\mathfrak{S}}.M = \omega_{H^D}^*$

Nous utilisons pour cela la théorie des fenêtres et des cadres de Zink ([15]) complétée par le résultat de Lau ([12]). Soit $A_{cris} := A_{cris}(\mathcal{O}_C)$. Le triplet $(A_{cris}, \varphi, \mathrm{Fil}^1 A_{cris})$ est un cadre au sens de [15].

Définition 4.50. *On note* φ*-ModFil*$_{A_{cris}}$ *la catégorie des triplets* $(N, \varphi, \mathrm{Fil}\, N)$ *où*

- N *est un* A_{cris}*-module libre,*
- $\varphi : N \to N$ *est un morphisme semi-linéaire relativement au Frobenius cristallin,*
- $\mathrm{Fil}\, N$ *est un sous-module contenant* $\mathrm{Fil}^1 A_{cris}.N$ *et tel que* $\mathrm{Fil}\, N/\mathrm{Fil}^1 A_{cris}.N$ *soit facteur direct dans* $N/\mathrm{Fil}^1 A_{cris}.N$*,*
- $\varphi(\mathrm{Fil}\, N) \subset pN$ *et* $\varphi(N) + \frac{\varphi}{p}(\mathrm{Fil}\, N)$ *engendrent* N*.*

Soit maintenant $(M,\varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}^{\leq \mathfrak{m}}$. On pose

$$N = \varphi(M) \otimes_{\mathfrak{S}} A_{cris}.$$

On définit alors

$$\mathrm{Fil}\, N = N \cap (M \otimes \mathrm{Fil}^1 A_{cris})$$

et le Frobenius $\varphi : N \to N$ comme étant simplement $\varphi \otimes \varphi$. Utilisant que si $\mathfrak{m}_{\mathfrak{S}} = (a)$

$$\frac{\varphi(a)}{p} \in A_{cris}^\times,$$

on vérifie aisément que

$$(N, \varphi, \mathrm{Fil}\, N) \in \varphi\text{-ModFil}_{A_{cris}}$$

avec

$$\begin{aligned} N/\mathrm{Fil}\, N &= \varphi(M)/\mathfrak{m}_{\mathfrak{S}} M \\ \mathrm{Fil}\, N/\mathrm{Fil}^1 A_{cris}.N &= (M/\varphi(M)) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathfrak{m}_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{S}}^2 \simeq M/\varphi(M). \end{aligned}$$

La catégorie φ-ModFil$_{A_{cris}}$ est munie d'une dualité. Plus précisément, étant donné $(N, \varphi, \mathrm{Fil}\, N) \in \varphi$-ModFil$_{A_{cris}}$, il existe une unique application linéaire

$$\Psi : N \longrightarrow {}^{\varphi}N$$

vérifiant $\Phi \circ \Psi = p\mathrm{Id}$ où Φ est le linéarisé de φ (on renvoie à [15]). On a alors

$$(N^\vee, \varphi, \mathrm{Fil}\, N^\vee) \in \varphi\text{-ModFil}_{A_{cris}}$$

où $N^\vee = \mathrm{Hom}_{A_{cris}}(N, A_{cris})$, le linéarisé de φ sur $N^\vee$ est obtenu par transposition de Ψ et

$$\mathrm{Fil}\, N^\vee/\mathrm{Fil}^1 A_{cris}.N^\vee = \big(\mathrm{Fil}\, N/\mathrm{Fil}^1 A_{cris} N\big)^\perp.$$

On vérifie alors que le foncteur composé

$$\varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}^{\leq \mathfrak{m}, f} \longrightarrow \varphi\text{-ModFil}_{A_{cris}} \xrightarrow{\text{Dualité}} \varphi\text{-ModFil}_{A_{cris}}$$

prend ses valeurs dans les A_{cris}-fenêtres au sens de Zink i.e. la condition *(iv)* de la définition 1.2 de [15] est vérifiée. D'après le théorème 1.6 de [15] complété par le résultat principal de [12], on obtient ainsi un foncteur contravariant

$$\mathcal{BT} : \varphi\text{-Mod}_{\mathfrak{S}}^{\leq \mathfrak{m}, f} \longrightarrow \mathrm{BT}^{f}_{\mathcal{O}_C}.$$

4.8.2. *Énoncé de la conjecture.* On peut maintenant énoncer la conjecture principale de cette section.

Conjecture 6. *Si $p \neq 2$, le foncteur (4.8.1) précédent s'étend en une équivalence de catégories*

$$\mathcal{BT} : \varphi\text{-}Mod_{\mathfrak{S}}^{\leq \mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} BT_{\mathcal{O}_C}.$$

telle que

$$T_p\big(\mathcal{BT}(M, \varphi)\big) = Hom_{\mathfrak{S},\varphi}(M, \mathfrak{S})$$

Lorsque $p = 2$, on dispose de plus d'une telle équivalence et égalité à isogénies près.

Utilisant les théorème 5 et 7 de [1] couplés à la conjecture 4 on espère pouvoir démontrer la conjecture précédente d'une manière similaire à la preuve du théorème 2.2.7 de [11].

Références

[1] G. Faltings. Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1) :117–144, 1999.

[2] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique. *Prépublication.*

[3] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Vector bundles on curves and p-adic hodge theory. *A paraitre aux Proceedings du Symposium EPSRC ≪ Automorphic forms and Galois representations ≫ ayant eu lieu à Durham en juillet 2011.*

[4] L. Fargues and J.-M. Fontaine. Vector bundles and p-adic Galois representations. In *Fifth International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2*, volume 2 of *AMS/IP Stud. Adv. Math., 51, pt. 1*, pages 77–113. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[5] Laurent Fargues and Jean-Marc Fontaine. Factorization of analytic functions in mixed characteristic. In *Frontiers of mathematical sciences*, pages 307–315. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[6] A. Genestier and V. Lafforgue. Théorie de Fontaine en égales caractéristiques. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 44(2) :263–360, 2011.

[7] A. Genestier and V. Lafforgue. Structures de Hodge-Pink pour les $\phi/\mathfrak{S}$-modules de Breuil et Kisin. *Compos. Math.*, 148(3) :751–789, 2012.

[8] Urs Hartl and Richard Pink. Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc. *Compos. Math.*, 140(3) :689–716, 2004.

[9] R. Huber. A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties. *Math. Z.*, 217(no. 4) :513–551, 1994.

[10] K.S. Kedlaya. Slope filtrations revisited. *Doc. Math.*, 10 :447–525, 2005.

[11] M. Kisin. Crystalline representations and F-crystals. In *Algebraic geometry and number theory*, volume 253 of *Progr. Math.*, pages 459–496. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[12] E. Lau. Displays and formal p-divisible groups. *Invent. Math.*, 171(3) :617–628, 2008.

[13] P. Scholze. Perfectoid spaces. *Publ. math. de l'IHÉS*, 116(1) :245–313, 2012.

[14] J.-P. Wintenberger. Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(1) :59–89, 1983.

[15] T. Zink. Windows for displays of p-divisible groups. 195 :491–518, 2001.

[16] Thomas Zink. The display of a formal p-divisible group. *Astérisque*, (278) :127–248, 2002. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, I.

Laurent Fargues, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu 75252 Paris
E-mail address: laurent.fargues@imj-prg.fr