

# CANDIDATURE DE LAURENT FARGUES - DR1

## 1. CARRIÈRE

- 1998–2001 : Thèse sous la direction de Michael Harris à l’institut de Mathématiques de Jussieu (Paris 7), soutenue en décembre 2001.
- Octobre 2002 - Octobre 2011 : Chargé de Recherche au CNRS au laboratoire de mathématiques d’Orsay
- Novembre 2009 : Habilitation à diriger des recherches de l’université Paris-Sud
- Octobre 2011 - Février 2013 : Directeur de recherche CNRS IRMA Strasbourg
- Depuis Février 2013 : Directeur de Recherche au CNRS à l’institut de mathématiques de Jussieu

## 2. DOMAINE SCIENTIFIQUE

Programme de Langlands, théorie de Hodge  $p$ -adique, géométrie  $p$ -adique et variétés de Shimura.

## 3. DISTINCTIONS

- Chargé du cours Peccot au Collège de France au printemps 2004
- Prix Petit d’Ormoy, Carrière, Thébault de l’académie des sciences (2009)
- PI ERC Advanced « GeoLocLang » (début au 1er Octobre 2017)
- Invité au congrès international des mathématiciens à Rio en 2018 (sections 3 et 4)
- « Tsinghua University Loo-Keng Hua Distinguished Lecture », printemps 2018
- Octobre/Novembre 2015 : Série de 8 exposés de 2h au séminaire Drinfeld à Chicago
- A venir : Eilenberg lectures à Columbia à l’Automne 2022

## 4. ENCADREMENT

### 4.1. Thèses soutenues.

- Miaofen Chen a soutenu sa thèse en Mai 2011. Elle est actuellement associate professor à la East China Normal University (Shanghai)
- Xu Shen a soutenu sa thèse en décembre 2012. Il est actuellement sur un poste permanent au Morningside Center of Mathematics (Pékin)
- Arno Kret (dont le directeur principal était Laurent Clozel) a soutenu sa thèse en décembre 2012. Il est actuellement sur un poste permanent à Amsterdam.
- Valentin Hernandez a soutenu sa thèse (en cotutelle avec Vincent Pilloni) en juin 2017. Il est désormais maître de conférence à Orsay.
- Arthur-César Le Bras a soutenu sa thèse (en cotutelle avec Michael Harris) en juin 2017. Après un post-doc à Bonn avec Peter Scholze il est désormais chargé de recherches au CNRS.
- Ildar Gaisin (thèse en cotutelle avec Jean-François Dat) a soutenu sa thèse en Septembre 2017. Il est actuellement en post-doc à Tokyo avec Naoki Imai.

- Nhuyen Kieu Hieu (thèse en cotutelle avec Pascal Boyer) a soutenu sa thèse et sera en post-doc dans la cadre de l'ERC de Eva Viehmann durant l'année 2019-2020

#### 4.2. Thèses en cours.

- Depuis Septembre 2018 : Sebastian Bartling, thèse financée par mon ERC
- Depuis Septembre 2018 : Tobias Kreutz en cotutelle avec Bruno Klingler

#### 4.3. Stages de M2.

- 2017-2018 : Sebastian Bartling
- 2017-2018 : Arnaud Vanhaecke. Il est maintenant en thèse avec Pierre Colmez.
- printemps 2013 : Macarena Peche Irissary. Elle a ensuite effectué une thèse sous la direction de Christophe Cornut.
- Miaofen Chen et Xu Shen avant leur thèse.

#### 4.4. Post-docs.

- 2016-2017 : Alexander Ivanov et Daniel Kirch (anciens étudiants de M.Rapoport), post-docs financés par la DFG
- 2017-2018 : Timo Richartz (ancien étudiant de M.Rapoport financé par la DFG)
- 2018-2019 : Johannes Anschütz (post-doc avec P.Scholze auparavant à Bonn) et Paul Breutmman (ancien étudiant Urs Hartl), tous deux financés par mon ERC.
- A partir de septembre 2020 : Luciena Xiao Xiao sur mon ERC.

#### 4.5. Rapports de thèse et d'HDR.

- rapporteur de la thèse (2009) et de l'HDR (2016) de Vincent Pilloni
- rapporteur de l'HDR de Benoît Stroh en 2014
- rapporteur de la thèse de Stéphane Bijakowski (étudiant Pilloni et Stroh) en 2014
- rapporteur de la thèse de Shinan Liu (étudiant Stroh, soutenance en septembre 2018)
- rapporteur de la thèse de Stephan Neupert en 2016 (élève Eva Viehmann)
- rapporteur de la thèse de Banafsheh Farang-Hariri (2012, élève de Lysenko)
- rapporteur de la thèse de Tobias Ashendorf en 2012 (élève Thomas Zink)

## 5. PUBLICATIONS

- « Une suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'uniformisation de Rapoport-Zink », Note aux CRAS 334 (2002), no. 9, 739-742
- « Cohomologie des espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locales » dans Asterisque 291 (2004) pages 1-200
- « Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramifications », Duke Math vol. 140, No 3 (2007)
- « L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques » dans « L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld » pages 1-325, Birkhauser, Progress in Math, vol. 262
- « Filtration de monodromie et cycles évanescents formels », Inventiones Mathematicae 177, 2009
- « La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats », Journal für die reine und angewandte Mathematik 645 (2010)

- « La filtration canonique des points de torsion des groupes  $p$ -divisibles », Annales scientifiques de l'ENS, 2011, vol.44
- « Factorization of analytic functions in mixed characteristic », en collaboration avec J.M. Fontaine, Frontiers of mathematical sciences, 307-315, Int. Press, Somerville, MA, 2011.
- « Vector bundles and  $p$ -adic Galois representations », en collaboration avec J.-M. Fontaine, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics Volume 51, 2011
- « Groupes analytiques rigides  $p$ -divisibles », Math. Ann. 374 (2019), no. 1-2
- « Vector bundles on curves and  $p$ -adic Hodge theory », en collaboration avec J.-M. Fontaine, dans « Automorphic Forms and Galois Representations », London Mathematical Society Lecture Note Series, volume 415, Cambridge University Press, 2014
- « Quelques résultats et conjectures concernant la courbe », dans Astérisque 369, 2015 (actes de la conférence en l'honneur de Gérard Laumon)
- « From local class field to the curve and Vice Versa », dans « Algebraic geometry : Salt Lake City 2015 », p.181-198, Proc. Sympos. Pure Math., 97.2, Amer. Math. Soc.
- «  $G$ -torseurs en théorie de Hodge  $p$ -adique », à paraître à Compositio Math.
- « Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge  $p$ -adique », travail en commun avec J.-M. Fontaine, Astérisque 406
- « La courbe » proceedings de l'ICM à Rio
- « Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local » à paraître aux Annales de l'ENS
- « Groupes analytiques rigides  $p$ -divisibles II » accepté pour publication à Math. Annalen.

*Prépublications* : cf. <http://www.math.jussieu.fr/~fargues>

## 6. TRAVAUX SCIENTIFIQUES

### 6.1. Points essentiels.

- *Généralisation des travaux de Harris-Taylor ([9]) sur la réalisation géométrique des correspondances de Langlands locales* (travaux de thèse : Astérisque 291). Harris et Taylor ([9]) avaient démontré que la correspondance de Langlands locale pour les corps  $p$ -adiques se réalise dans la cohomologie étale  $\ell$ -adique des espaces de Lubin-Tate. J'ai généralisé cela à des espaces de modules plus généraux de groupes  $p$ -divisibles, les espaces de Rapoport-Zink. La preuve passe par une étude détaillée de la cohomologie de certaines variétés de Shimura.
- *Mise au point des travaux de Faltings sur l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et Drinfeld* (« L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld » pages 1-325, Birkhauser, Progress in Math, vol. 262). Utilisé de façon cruciale par Dat dans [6]. Plus récemment, et de façon surprenante, il est au coeur de la preuve du résultat principal de [7].

Plus précisément, je décris un isomorphisme équivariant « en niveau infini » entre l'espace de Lubin-Tate des déformations d'un groupe formel  $p$ -divisible de dimension 1 et hauteur  $n$  et la tour de revêtements de l'espace de Drinfeld  $\Omega \subset \mathbb{P}^{n-1}$ . J'en déduis que la cohomologie étale  $\ell$ -adique des deux tours de revêtements est la même, ce qui est le résultat utilisé par Dat. Le résultat cohomologique n'est pas évident car il faut

« revenir en niveau fini » et utiliser un résultat d'approximation du type Elkik pour « décompléter la cohomologie en niveau infini ».

+description détaillée de l'isomorphisme au niveau des squelettes au sens de Berkovich (« Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramifications », Duke Math vol. 140, No 3 (2007)). Dans le cas de l'espace de Drinfeld le squelette est l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire, pour l'espace de Lubin-Tate il s'agit d'un espace de polygones de Newton. Je décris explicitement l'isomorphisme comme au niveau de ces squelettes comme un isomorphisme de complexes simpliciaux.

- *La filtration de monodromie des cycles proches  $\ell$ -adiques ne dépend que du complété formel* (« Filtration de monodromie et cycles évanescents formels », Inventiones Mathematicae 177, 2009) : généralisation d'un résultat de Berkovich ([2]) sur l'invariance par complétion formelle des cycles proches. Ce résultat est à la base de ceux de Boyer sur l'étude de la cohomologie des variétés de Shimura de Harris-Taylor ([16]).

Plus précisément, Berkovich avait démontré que la fibre en un point fermé des cycles proches  $\ell$ -adiques ne dépend que du complété formel en ce point (à priori cela se calcul à partir de l'hensélianisé en ce point). J'étends ce résultat en montrant que la fibre en un point fermé des cycles proches  $\ell$ -adiques, comme faisceau pervers muni de sa filtration de monodromie, ne dépend que du complété formel (comme objet de la catégorie dérivée filtrée). La preuve utilise de façon cruciale le théorème d'approximation de Popescu ([18]), une généralisation de la désingularisation de Néron. Boyer applique mon résultat à la fibre des cycles proches en un point supersingulier des variétés de Harris-Taylor. Le complété formel en un tel point est un espace de Lubin-Tate. Au final, Boyer utilise ce résultat afin de calculer complètement la cohomologie des espaces de Lubin-Tate en termes de correspondances de Langlands locales, complétant en cela le résultat de Harris et Taylor ([9]) qui calculaient seulement la somme alternée comme représentation virtuelle.

- *Découverte de l'existence d'une fonction degré et de filtrations de Harder-Narasimhan sur les schémas en groupes plats finis* (« La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats », Journal für die reine und angewandte Mathematik 645 (2010)). C'est pour cette découverte que j'ai obtenu mon prix de l'académie des sciences. L'existence de cette filtration aurait pu être faite dès 1967 par Tate dans son article fondateur [21] et n'avait pas été remarquée par les spécialistes du domaine tels que Raynaud ou Fontaine.

*Application aux sous-groupes canoniques* (« La filtration canonique des points de torsion des groupes  $p$ -divisibles », Annales scientifiques de l'ENS, 2011, vol.44). Application aux formes automorphes  $p$ -adiques (travaux de Pilloni, Pilloni Stroh et Bijakowski, et plus récemment Boxer, Calegari, Gee et Pilloni).

- *Découverte et travail sur la courbe : travail en commun avec Jean-Marc Fontaine* (« Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge  $p$ -adique » Astérisque 406). La courbe joue désormais un rôle central en théorie de Hodge  $p$ -adique et dans mes travaux sur le programme de Langlands. C'était le sujet central de mon exposé à l'ICM de Rio.
- *Introduction des  $\varphi$ -modules sur  $A_{inf}$*  dans l'article « Quelques résultats et conjectures concernant la courbe » (Astérisque 369, 2015 (actes de la conférence en l'honneur de Gérard Laumon)). Mon résultat concernant les  $\varphi$ -modules sur  $A_{inf}$  est au coeur des Berkeley lectures on  $p$ -adic geometry de Scholze. Plus récemment Emerton et Gee ont utilisé ces objets dans leur travail sur le champ d'Emerton-Gee ([8]). Les  $\varphi$ -modules sur

$A_{inf}$  sont également au coeur des travaux de Bhatt, Morrow et Scholze ([3]) puisqu'ils produisent une théorie cohomologie à valeur dans ces objets.

Plus précisément, mon théorème dit que les  $\varphi$ -modules sur l'anneau de Fontaine  $A_{inf}$  (que l'on peut penser comme étant des « Shtukas locaux », une version locale d'objets globaux introduits dans un autre contexte (corps de fonctions) par Drinfeld) sont la même chose que certaines modifications de fibrés sur la courbe. Les théorèmes de comparaison (isomorphismes de périodes  $p$ -adiques) entre cohomologie étale  $p$ -adique et cohomologie de de Rham des variétés algébriques sur un corps  $p$ -adique fournissent naturellement de telles modifications de fibrés. Grâce à mon théorème on en déduit un  $\varphi$ -module sur  $A_{inf}$  à partir de la cohomologie étale  $p$ -adique d'une variété algébrique. Inspiré par cela Bhatt, Morrow et Scholze on alors construit directement une théorie cohomologique à valeurs dans mes  $\varphi$ -modules sur  $A_{inf}$  (une version plus fine à valeurs dans la catégorie dérivée qui leur permet d'étudier la torsion dans la cohomologie des variétés algébrique).

- *Découverte de ma conjecture de géométrisation du programme de Langlands local basée sur le champ des fibrés sur la courbe. Travail en cours avec Peter Scholze afin de construire, en utilisant des éléments de cette conjecture, la correspondance de Langlands locale dans la direction représentations vers paramètres de Langlands pour les corps  $p$ -adiques.*

Cette conjecture de géométrisation s'inspire par analogies (qui marchent de façon miraculeuse en remplaçant une courbe projective lisse sur un corps fini par « la courbe ») du programme de Langlands géométrique de Drinfeld et Laumon sur les corps de fonctions, repensé en termes de « la courbe » et s'applique au programme de Langlands local « classique » sur un corps  $p$ -adique. Elle utilise toute la puissance de la théorie des espaces perfectoides et des diamants de Scholze. Il s'agit de la première incursion du programme de Langlands géométrique, qui a toujours été dans un contexte corps de fonctions sur un corps fini (travaux de Drinfeld, Laumon, Frenkel-Gaitsgory-Vilonen), dans le domaine des corps de caractéristique 0 et du programme de Langlands usuel « originel » en caractéristique 0 (formes modulaires...). C'est en cela qu'elle est vraiment très innovante. Jamais auparavant de telles techniques géométriques, qui s'appliquaient au cas de corps du type  $\mathbb{F}_p((T))$ , n'avaient été importées dans le cadre « arithmétique » de corps du type  $\mathbb{Q}$ , ou plutôt  $\mathbb{Q}_p$  ici (et personne n'avait imaginé que cela soit possible).

Le travail en cours sur la construction des paramètres locaux avec Scholze utilise des éléments de cette conjecture couplés aux travaux récents de Vincent Lafforgue [13] (cas des corps de fonction) toujours en appliquant un procédé d'analogies qui marchent une fois de plus miraculeusement.

L'article « Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local » (à paraître aux Annales de l'ENS) traite du cas  $GL_1$  de ma conjecture de géométrisation. Je montre que, comme dans le cas des corps de fonctions (ou des surfaces de Riemann), les fibres d'un certain morphisme d'Abel-Jacobi sont simplement connexes en grand degré.

## 6.2. Travaux récents : en détails.

6.2.1. *Filtrations des groupes plats finis.* Mes travaux sur les filtrations de Harder-Narasimhan, les sous-groupes canoniques et leurs applications que j'ai effectués avant mon passage DR (les publications « *La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats* » et

« *La filtration canonique des points de torsion des groupes  $p$ -divisibles* » à Crelle et aux Annales de l'ENS) ont été continués par Pilloni, Stroth, Bijakowski et mon étudiant Valentin Hernandez. Plus précisément :

- l'article [17], un des résultats principaux de la thèse de Pilloni (j'étais rapporteur de sa thèse et son habilitation), utilise de façon cruciale ces deux articles
- il en est de même de [4] (j'étais rapporteur de la thèse de Bijakowski et de l'habilitation de Stroth)
- la thèse de mon étudiant Valentin Hernandez est la continuation de mon article sur les sous-groupes canoniques aux Annales de l'ENS ([12] et [11])
- Plus récemment l'article [5] utilise également de façon cruciale mes deux articles. Dans [5] les auteurs prouvent l'automorphie potentielle des courbes de genre 2, le théorème de Wiles / Taylor Wiles (la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil qui implique le théorème de Fermat) étant l'automorphie des courbes de genre 1.

6.2.2. *La courbe.* Mon travail avec Jean-Marc Fontaine sur « la courbe » est publié dans la revue Astérisque (Asterisque 406). Cela me permet définitivement de tourner la page de cet aspect là de mes travaux concernant les généralités sur la courbe et ses implications en théorie de Hodge  $p$ -adique. La courbe a permis de repenser complètement le domaine de la théorie de Hodge  $p$ -adique de façon géométrique. C'est désormais le point d'entrée standard dans le domaine pour les nouvelles générations. J'ai notamment fait un gros travail d'explication de ce travail, par exemple :

- Cours de M2 (24h) à l'IMJ en 2014 sur le sujet
- Cours à Bonn en 2011 (12h) sur le sujet à l'invitation de Michael Rapoport
- Mars 2015 : Cours "p-adic Hodge theory, vector bundles and their modifications" à l'école "Spring school on p-adic arithmetic" à Essen

Je me suis tout d'abord attaché à appliquer ces nouvelles idées à des "thèmes classiques de théorie de Hodge  $p$ -adique" afin de les revisiter et mieux les comprendre.

Tout d'abord la théorie des  $\varphi$ -module de Breuil-Kisin. Dans l'article « *Quelques résultats et conjectures concernant la courbe* », publié dans les actes de la conférence en l'honneur de Gérard Laumon, j'ai introduit des  $\varphi$ -modules sur  $A_{\text{inf}}$  qui sont maintenant appelés  $\varphi$ -modules de Breuil-Kisin-Fargues. J'ai construit un foncteur pleinement fidèle de cette catégorie de  $\varphi$ -modules vers une catégorie de modifications de fibrés vectoriels sur la courbe et j'ai conjecturé que cela était une équivalence de catégories (en donnant les premiers pas d'une démonstration). Cette équivalence est maintenant complètement démontrée (la preuve est publiée dans les notes du cours de Peter Scholze à Berkeley en 2014 ([20])). L'introduction de ces nouveaux objets a eu d'importantes conséquences :

- À la suite de cela Bhatt, Morrow et Scholze ont défini de manière géométrique une telle théorie cohomologique sur les schémas formels propres et lisses sur  $\mathcal{O}_C$ , à valeurs dans des complexes de  $\varphi$ -modules sur  $A_{\text{inf}}$  et ont donné des applications à l'étude de la torsion dans la cohomologie étale de ces variétés ([3]). Le point est qu'ils ne construisent pas seulement des  $\varphi$ -modules sur  $A_{\text{inf}}$  mais plutôt un complexe de cohomologie, ce qui raffine la construction précédente et donne des informations sur la torsion. En effet, l'équivalence précédente n'est pas une équivalence exacte et ne passe pas aux complexes de cohomologie. Le début de ce travail de Bhatt Morrow et Scholze est la conséquence

d'un exposé que j'ai donné à Paderborn en octobre 2013 sur les  $\varphi$ -modules sur  $A_{\text{inf}}$  auquel Peter Scholze assistait où s'est posée la question de comparer l'approche de Scholze dans son article "*p*-adic Hodge theory for rigid analytic varieties" et mon approche via les modifications de fibrés.

- Niziol ([15]) a interprété la cohomologie syntomique géométrique en termes de fibrés sur la courbe. Plus précisément, la cohomologie de Deligne s'interprète parfois comme groupes d'extensions de structures de Hodge mixtes, les régulateurs archimédiens envoyant une extension de motifs mixtes sur l'extension correspondante de structures de Hodge. Niziol donne une interprétation similaire dans son article pour la cohomologie syntomique en termes d'extensions de modifications de fibrés vectoriels.

Mon introduction des groupes analytiques rigides  $p$ -divisibles (mon article « *Groupes analytiques rigides  $p$ -divisibles* » à Math Annalen) est un des points clefs de la classification de Scholze-Weinstein. Je l'avais écrit afin de mieux comprendre la théorie des espaces de Banach-Colmez et il s'est avéré être un élément clef de leur résultat (notamment la partie pleine fidélité est contenue dans mon article).

On peut également citer les travaux de thèse de mon étudiant Le Bras qui clarifient le lien entre espaces de Banach-Colmez et fibrés sur la courbe ([14]) via une procédure de tilting « à la Bridgeland ». L'autre partie de la thèse de Le Bras ([7]) utilise elle de façon surprenante le résultat principal de mon livre « *L'isomorphisme entres les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques* ».

Enfin la courbe était au coeur de mon exposé à l'ICM de Rio.

6.2.3. *Conjecture de géométrisation.* Je me consacre désormais entièrement à mes travaux concernant ma conjecture de géométrisation de la correspondance de Langlands locale.

Le premier résultat obtenu dans cette direction, qui est le point de départ de ma conjecture, est l'article « *G-torseurs en théorie de Hodge  $p$ -adique* » qui va paraître à Compositio Math. Dans celui-ci je démontre que l'ensemble  $B(G)$  de Kottwitz s'interprète comme les classes d'isomorphismes de  $G$ -fibrés sur la courbe. Je fait de plus le lien entre la description par Kottwitz de l'ensemble  $B(G)$  et la théorie de la réduction des  $G$ -fibrés sur la courbe au sens de Harder-Narasimhan/Atiyah-Bott. J'y démontre également un lien intéressant entre la théorie du corps de classe local et la cohomologie étale de la courbe. Par exemple, la classe fondamentale en cohomologie étale de la courbe coïncide avec celle de la théorie du corps de classe et la dualité de Poincaré en cohomologie étale sur la courbe est la dualité de Tate-Nakayama. Cela m'amène à formuler des conjectures sur la cohomologie d'intersection des ouverts de la courbe ainsi qu'à la structure de leur groupe fondamental. Pour ce dernier aspect, outre cet article, je renvoie à mon article « *From local class field to the curve and Vice Versa* » paru aux proceedings de l'AMS « 2015 Summer Research Institute on Algebraic Geometry » ayant eu lieu à Salt Lake City en Juillet 2015. Notons que Johannes Anschütz (post-doc à Bonn puis post-doc dans le cadre de mon ERC) a étendu mon résultat au cas des corps locaux de caractéristique positive dans son article « *Reductive group schemes over the Fargues-Fontaine curve* » ([1]).

J'ai donné une première application de ce résultat à la théorie des espaces de périodes  $p$ -adiques de Rapoport-Zink dans un travail en collaboration avec Miaofen Chen et Xu Shen (cf. la prépublication « *On the structure of some  $p$ -adic period domains* » ). Dans celui-ci on démontre le résultat suivant que j'avais conjecturé il y a quelques temps avec Rapoport : le lieu faiblement admissible coïncide avec le lieu admissible si et seulement si l'ensemble de Kottwitz  $B(G, \mu)$  est pleinement HN décomposable. Dans cet énoncé,  $G$  est un groupe réductif sur un corps  $p$ -adique et  $\mu$  une classe de conjugaison géométrique de cocaractère minuscule à valeurs dans  $G$ . Une des difficultés ici est que l'on ne suppose pas  $(G, \mu)$  de type Hodge au sens où dans une représentation linéaire fidèle de  $G$  le cocaractère  $\mu$  resterait minuscule. C'est typiquement ce genre de problème que permet de résoudre la courbe en travaillant géométriquement avec des  $G$ -fibrés. Les lieux admissibles et faiblement admissibles sont des ouverts partiellement propres de l'espace adique associé à la variété de drapeaux  $\mathcal{F}(G, \mu)$ . Le lieu admissible est l'image d'une application de périodes  $p$ -adique de de Rham (analogue des applications de périodes de Griffiths en géométrie complexe). Le lieu faiblement admissible en est une « approximation ». Le résultat que l'on démontre étend un résultat de Hartl ([10]) pour  $GL_n$  qui avait classifié tous les cas possibles pour lesquels les lieux admissibles et faiblement admissible coïncident (mon article avec Chen et Shen permet, entre autres, de simplifier nettement la preuve très technique de ce résultat de Hartl grâce à la courbe). Ce théorème permet par exemple de calculer l'espace des périodes  $p$ -adiques des surfaces K3 à réduction supersingulière. Je renvoie également à la section 2.3 de mon article pour l'ICM à Rio pour une explication de ce résultat. L'article est actuellement en cours de révision suite à un premier rapport positif de la revue "Cambridge Journal of Mathematics".

Avant de m'attaquer frontalement à ma conjecture j'ai écrit un article sur le cas de  $GL_1$  i.e. « la théorie du corps de classe géométrique » dans le cadre de ma conjecture. Il s'agit de l'article « *Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local* » à paraître aux Annales de l'ENS. J'y étudie en détails un morphisme d'Abel-Jacobi entre certains diamants. Je démontre au final que ce morphisme est une fibration pro-étale localement triviale en diamants simplement connexes en grand degré. Cela donne immédiatement ma conjecture dans le cas  $GL_1$  (et donne la démonstration la plus compliquée connue à ce jour du théorème de Kronecker-Weber local). Cet article m'a également permis de clarifier certains aspects de ma conjecture avec notamment l'introduction du diamant  $\text{Div}^1$  qui est en quelque sorte « le miroir » de la courbe.

Jusqu'à récemment j'étais en train d'écrire un gros article sur ma conjecture dont le but était de donner l'énoncé le plus précis qu'il soit de celle-ci. Malheureusement la théorie des diamants de Scholze n'était qu'à un stade embryonnaire suite à son introduction par Scholze dans son cours à Berkeley à l'automne 2014 (programme spécial du MSRI où j'ai formulé ma conjecture), les définitions de base n'étant pas complètement fixées encore. Cela ne rendait pas aisé l'écriture de cet article. Plutôt que de travailler séparément nous avons récemment décidé Scholze et moi de fusionner nos travaux afin de nous faciliter la tâche. Désormais nous sommes en train d'écrire un article en commun « *Geometrization of the local Langlands correspondence* ». Celui-ci contiendra à la fois un énoncé très précis de ma conjecture (avec une définition précise de ce qu'est un faisceau pervers sur mon champ  $\text{Bun}_G$ ) ainsi que son projet de construction des  $L$ -paramètres des représentations de groupes  $p$ -adiques « à la Vincent Lafforgue » qu'il avait entamé à Berkeley dans son cours (il a complètement repris



cet aspect là depuis en utilisant mon champ  $\text{Bun}_G$ ). En parallèle Scholze a écrit un article « Étale cohomology of diamonds » ([19]) qui contient tous les résultats de base concernant les fondements de la théorie des diamants et tous les résultats liés qu'il avait annoncés à Berkeley et qui n'étaient pas vraiment rédigés jusqu'à présent. On utilise cet article « Étale cohomology of diamonds » comme chapitre 0 de notre article en commun en quelques sortes.

Nous avons fini de rédiger la partie « Satake géométrique », « géométrie du champ des fibrés », et « acyclicité locale » de ce travail (plus d'une centaine de pages). Nous avons déjà donné des exposés sur le sujet par exemple à la conférence de clôture de l'ANR PerCoLaTor au CIRM en juillet 2018 ainsi que dans mon exposé à l'ICM à Rio. Mes Eillenberg lectures à Columbia en 2022 porteront sur ce sujet.

Notons la conférence *Arbeitsgemeinschaft « The geometric Langlands conjecture »* que j'ai co-organisée en Janvier 2016 à Oberwolfach avec Dennis Gaitsgory, Peter Scholze et Kari Vilonen. Cette conférence ouverte à tous étaient une sorte d'école d'hiver où les participants donnaient des exposés. Le thème principal était ma conjecture de géométrisation.

Bien sûr ma conjecture a de nombreuses ramifications autres que sa propre démonstration. Je prévois de faire travailler des étudiants en thèse et post-docs sur le sujet.

## 7. ERC GEOLOCLANG

J'ai obtenu une ERC Advanced dont le projet concerne ma conjecture de géométrisation. Celle-ci a débuté le 1er octobre 2017.

Le premier gros évènement financé par mon ERC a eu lieu à Lyon d'Avril à Juin 2018 en collaboration avec le labex Milyon :

<http://milyon.universite-lyon.fr/recherche/semestres-et-mois-thematiques/2018-2/groupe-algebriques-et-geometrisation-du-programme-de-langlands/>

Ce semestre thématique était composé de deux parties. La seconde concerne mes travaux récents sur la géométrisation du programme de Langlands (les deux organisateurs principaux étaient Vincent Pilloni et moi). Il y a eu des mini cours, exposés et une mini conférence. Je renvoie au programme détaillé en lien ci-dessus. J'ai personnellement donné une série d'exposés sur ma conjecture et mes travaux en cours avec Scholze. Mon ERC a financé les voyages et le logement de tous les participants qui donnaient des exposés à partir de la mini-conférence, le labex Milyon se chargeant de financer les participants qui ne donnaient pas d'exposés. Ce programme spécial a été une réussite, de nombreux spécialistes mondiaux du domaine sont venus et des étudiants du monde entier sont venus assister.

Mis à part cela :

- Sebastian Bartling a commencé une thèse sous ma direction financée par mon ERC
- Johanness Anschütz et Paul Breutmann ont passé l'année 2018-2019 en postdoc sur mon ERC.

J'ai déjà utilisé mon ERC afin de donner des séries d'exposés sur mes travaux :

- A Imperial College en Novembre 2017 (groupe de travail sur mes travaux de Caraiani/Gee)
- A Harvard en Novembre 2017 (GT sur ma conjecture de Gaitsgory/Lurie)
- Au Tata Institut, décembre 2017-janvier 2018, série de 5 exposés afin d'expliquer ma conjecture

Avec Ana Caraiani, Frank Calegari et Peter Scholze nous devons organiser un programme spécial au Hausdorff institut à Bonn "The arithmetic of the Langlands program" du 4 Mai au 21 Aout 2020. Je devais utiliser mon ERC pour financer une partie de ce programme. Le programme a été annulé à cause du virus et aura probablement lieu en 2022.

#### 8. ENSEIGNEMENT DANS LES 5 DERNIÈRES ANNÉES

- Professeur chargé de cours d'exercice incomplet à Polytechnique (TD d'EDP pour les physiciens pendant 5 ans, TD « Analyse réelle et introduction aux méthodes variationnelles » pendant 8 ans, correction de copies et pendant 4 ans TD de théorie de Galois). J'ai arrêté en Septembre 2018.
- Printemps 2014 : Cours de M2 « Théorie de Hodge  $p$ -adique, le point de vue de la courbe » à l'université Paris 6 (24h de cours).
- Mars 2015 : Cours «  $p$ -adic Hodge theory, vector bundles and their modifications » à l'école « Spring school on  $p$ -adic arithmetic » à Essen
- Octobre/Novembre 2015 : 8 exposés de 2h (voir plus) au « Geometric Langlands Seminar » de Drinfeld à l'université de Chicago.
- Aout 2016 : 5h de cours sur mes travaux à l'école d'été « The Langlands correspondence in arithmetic and geometry » KIAS. Séoul.
- Octobre 2016 : 8h de Cours au Morningside center of mathematics (Beijing) sur mes travaux.
- Printemps 2018 : « Tsinghua University Loo-Keng Hua Distinguished Lecture » au Yau Mathematical Sciences Center à Pékin
- Programme « Groupes algébriques et géométrisation du programme de Langlands » du labex Milyon (co-financé par mon ERC « GeoLocLang »). Avril-Juin 2018. 10h de cours sur mes travaux.
- A venir : Eilenberg lectures à Columbia à l'automne 2022.

#### 9. ACTIVITÉS D'ÉVALUATION DANS LES 5 DERNIÈRES ANNÉES

- Évaluateur récurrent pour la DFG
- Tenure track / passage full professor : évaluations pour diverses universités américaines et chinoises
- Evaluation de dossiers ERC Consolidator et Starting depuis le Printemps 2017 (je ne suis membre d'aucun panel mais suite à l'obtention de mon ERC advanced j'ai reçu des demandes d'évaluation de dossiers).
- Printemps 2018 : comité de selection à Marseille sur un poste MCF section 25.

#### 10. ORGANISATIONS RÉCENTES

- Conférence « Arithmétique des variétés de Shimura et des formes automorphes et Applications » au CIRM en juillet 2014

- Organisation avec Ulrich Görtz, Eva Viehmann et Torsten Wedhorn de la conférence « Reductions of Shimura Varieties » à Oberwolfach fin Aout 2015
- Organisation avec Dennis Gaitsgory, Peter Scholze et Kari Vilonen du Arbeitsgemeinschaft « The geometric Langlands conjecture » du 3 au 9 Avril à Oberwolfach.
- Programme « Groupes algébriques et géométrisation du programme de Langlands » du labex Milyon (co-financé par mon ERC « GeoLocLang »). Avril-Juin 2018.
- Janvier 2019, Organisation avec Ulrich Görtz, Eva Viehmann et Torsten Wedhorn de la conférence « Arithmetic of Shimura Varieties » à Oberwolfach. Cette conférence à Oberwolfach est devenu récurrente tous les 2/3 ans. J'en profite pour développer les liens entre mathématiciens Allemands et Français du domaine en faisant venir tous les jeunes nouveaux mathématiciens Français (typiquement, par exemple, Benoit Stroh, Vincent Pilloni et Gabriel Dospinescu aux éditions précédentes et Olivier Taibi, Arthur-César Le Bras à cette édition). La prochaine édition de la conférence est prévue pour 2022.

À venir :

- En 2020 Peter Scholze, Ana Caraiani, Frank Calegari et moi devions organiser un programme spécial au Hausdorff institut à Bonn intitulé « The arithmetic of the Langlands program ». Il a été annulé à cause du virus et sera probablement reporté en 2022.

## 11. EXPOSÉS DANS DES CONFÉRENCES INTERNATIONALES

### 11.1. Récentes.

- « Conference on Arithmetic Geometry », Banach Center (Varsovie), juillet 2013
- « Conference on Arithmetic Algebraic Geometry », Paderborn, Octobre 2013
- « Hot Topics : Perfectoid spaces and their applications » MSRI février 2014
- « Automorphic forms, Shimura varieties, Galois representations and L-functions », MSRI décembre 2014
- « Workshop on p-adic Analysis » Univ. Wuppertal. 16-17 Juillet 2015
- 2015 Summer Research Institute on Algebraic Geometry University of Utah, Salt Lake City
- « p-adic Hodge theory and Iwasawa theory » Septembre 2015, Bielefeld
- « Motives and Automorphic forms » Septembre 2015, Oxford, Clay Institut
- « Recent developments in integral p-adic cohomology theories » à Bonn en février 2016
- Arbeitsgemeinschaft « The geometric Langlands conjecture » Oberwolfach, Avril 2016.
- Septembre 2016 : Conférence « Geometric representation theory » Oxford Clay Institut
- Novembre 2016 : « The Second Sino-French Conference in Arithmetic Geometry » Sanya (Chine)
- Mai 2017 : Simons Symposium « p-adic Hodge theory » à Schloss-Elm (Krün Allemagne)
- Octobre 2017 : « Arithmétique, Géométrie et Représentations », conférence franco-indienne à Jussieu
- Juillet 2018 : « Correspondance de Langlands p-adique, variétés de Shimura et perfectoides » au CIRM
- Juillet 2018 : « Automorphic Forms, Galois Representations and L-functions » conférence satellite de l'ICM à Rio
- Aout 2018 : Exposé en sections 3 et 4 à l'ICM à Rio
- Octobre 2018 : Exposé à la conférence à Bonn pour les 70 ans de M. Rapoport

- Mars 2019 : Exposé à la conférence en l'honneur de M. Rapoport au Morningside center à Pékin
- Mars 2019 : Exposé à la conférence « Derived algebraic geometry and its applications » au MSRI
- Mai 2019 : Atelier sur la géométrisation du programme de Langlands local au CRM à Montréal (il s'agissait d'une conférence consacrée à mes travaux)
- Juin 2019 : Exposé à la conférence du SFB 45 à Bonn
- Juillet 2019 : Exposé à la conférence « Periods and motives » à Berlin

À venir : cf. <https://webusers.imj-prg.fr/~laurent.fargues/ERC.html>

### 11.2. Quelques conférences marquantes.

- Conférence pour les 50 ans de l'IHES, mai 2008
- « Conference on Arithmetic Algebraic Geometry on the occasion of Michael Rapoport's 60th birthday » , Bonn octobre 2008
- « Conference on Arithmetic Algebraic Geometry on the occasion of Thomas Zink's 60th birthday » , Bielefeld juin 2009
- « Conférence en l'honneur de Jean-Marc Fontaine » , Paris mars 2010
- « Conférence en l'honneur de Gérard Laumon », IHES-université Paris-Sud, juin 2012
- Arbeitsgemeinschaft « The geometric Langlands conjecture » à Oberwolfach, janvier 2016 (co-organisé avec Dennis Gaitsgory, Peter Scholze et Kari Vilonen) sur ma conjecture de géométrisation
- Conférence pour les 70 ans de M. Rapoport, Bonn octobre 2019

## 12. SÉJOURS RÉCENTS DANS D'AUTRES LABORATOIRES

- Septembre-Décembre 2014. Professeur invité au MSRI. Programme « New Geometric Methods in Number Theory and Automorphic Forms »
- Octobre-Novembre 2015. Professeur invité à l'université de Chicago à l'invitation de Ngo Bao Chau.
- Décembre 2015. Caltech à l'invitation d'Elena Mantovan.
- Financés sur mon ERC en Novembre/Décembre 2017 : exposés à Londres. « Quelques résultats et conjectures concernant la courbe » à Imperial College (groupe de travail de Caraiani/Gee sur mon article « Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local »), exposé à Harvard (groupe de travail Gaitsgory/Lurie sur « la courbe »), IAS à l'occasion du semestre spécial organisé par A. Venkatesh : exposé au séminaire de théorie des nombres Princeton/IAS et séjour à l'IAS
- Décembre 2017-Janvier 2018 : Caltech et Tata Institute financés sur mon ERC (séries d'exposés sur mes travaux).
- En Mai et Juin 2018 j'ai séjourné à l'ENS Lyon dans le cadre du programme spécial coorganisé entre le Labex Milyon et mon ERC
- Printemps 2019 : Eisenbud professor au MSRI au programme spécial « Derived Algebraic Geometry »
- *Shing Tung Yau m'a proposé d'être visiteur régulier au Morningside Center of Mathematics pour y organiser des groupes de travail, des conférences et y donner des cours. A partir du 1er Octobre 2019, et ce pendant 3 ans, je passerai 3 mois par an au Morningside Center à Pékin. Il s'agit d'une occasion importante afin de développer les liens entre mathématiciens Français et Chinois, cela dans la continuité des programmes organisés*

par Luc Illusie et Jean-Marc Fontaine depuis 2005 (année durant laquelle nous étions allés à l’université de Tsinghua pour y donner des cours dans le cadre d’une école d’été et où nous avons pris des étudiants de Tsinghua en thèse (typiquement mon ancienne étudiante en thèse Miaofen Chen). Ce programme a été efficace puisque de nombreux étudiants chinois ayant fait leur thèse dans le cadre de cette coopération ont soutenu leur thèse et sont soit en poste en France soit en Chine (typiquement mon ancien étudiant chinois Xu Shen qui est maintenant en poste au Morningside Center). J’ai déjà passé 3 mois durant l’hiver 2019/2020 à Pékin où j’ai donné un cours de M2 de 24h sur la Courbe pour une vingtaine d’étudiants.

### 13. ACTIVITÉS ADMINISTRATIVES

- Le point suivant a été négocié avec la direction de l’IMJ : je prendrai la direction de l’équipe GRFA après Pierre-Henri Chaudouard qui en est actuellement le directeur
- Gestion de mon ERC Advanced depuis Octobre 2017.
- Membre du comité CPR (comité pour les recrutements) de l’IMJ
- À noter. J’ai négocié le point suivant avec la direction de l’IMJ : les overheads de mon ERC financeront 5 1/2 ATER.

### 14. ACTIVITÉS ÉDITORIALES

Membre du comité éditorial du Journal de l’Institut de Mathématiques de Jussieu.

### RÉFÉRENCES

- [1] Johannes Anschütz. Reductive group schemes over the Fargues–Fontaine curve. *Math. Ann.*, 374(3–4) :1219–1260, 2019.
- [2] Vladimir Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2) :367–390., 1996.
- [3] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. Integral  $p$ -adic Hodge theory. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 128 :219–397, 2018.
- [4] Stéphane Bijakowski, Vincent Pilloni, and Benoît Stroh. Classicité de formes modulaires surconvergentes. *Ann. of Math. (2)*, 183(3) :975–1014, 2016.
- [5] George Boxer, Frank Calegari, Toby Gee, and Vincent Pilloni. Abelian surfaces over totally real fields are potentially modular. <https://arxiv.org/abs/1812.09269>.
- [6] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *Invent. Math.*, 169(1) :75–152, 2007.
- [7] Gabriel Dospinescu and Arthur-César Le Bras. Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands  $p$ -adique. *Ann. of Math. (2)*, 186(2) :321–411, 2017.
- [8] Matthew Emerton and Toby Gee. Moduli stacks of étale  $(\phi, \gamma)$ -modules and the existence of crystalline lifts. <https://arxiv.org/abs/1908.07185>.
- [9] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [10] Urs Hartl. On a conjecture of Rapoport and Zink. *Invent. Math.*, 193(3) :627–696, 2013.
- [11] Valentin Hernandez. Invariants de Hasse  $\mu$ -ordinaires. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 68(4) :1519–1607, 2018.
- [12] Valentin Hernandez. La filtration canonique des  $\mathcal{O}$ -modules  $p$ -divisibles. *Math. Ann.*, 375(1-2) :17–92, 2019.
- [13] Vincent Lafforgue. Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(3) :719–891, 2018.

- [14] Arthur-César Le Bras. Espaces de Banach-Colmez et faisceaux cohérents sur la courbe de Fargues-Fontaine. *Duke Math. J.*, 167(18) :3455–3532, 2018.
- [15] Wiesława Nizioł. Geometric syntomic cohomology and vector bundles on the Fargues-Fontaine curve. *J. Algebraic Geom.*, 28(4) :605–648, 2019.
- [16] Boyer Pascal. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [17] Vincent Pilloni. Prolongement analytique sur les variétés de Siegel. *Duke Math. J.*, 157(1) :167–222, 2011.
- [18] Dorin Popescu. General Néron desingularization. *Nagoya Math. J.*, 100 :97–126, 1985.
- [19] P. Scholze. Étale cohomology of diamonds. <https://arxiv.org/abs/1709.07343>.
- [20] P. Scholze and J. Weinstein. Berkeley lectures on  $p$ -adic geometry. *Annal of Math Studies*, 207.
- [21] J. T. Tate.  $p$ -divisible groups.. In *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages 158–183. Springer, Berlin, 1967.

LAURENT FARGUES, CNRS, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, 4 PLACE JUSSIEU 75252 PARIS  
Email address: `laurent.fargues@imj-prg.fr`