Introduction

Nombreuses théories de classification des gp. formels/p-div./plats finis

Première théorie : théorie de Dieudonné des groupes finis/Corps parfait.

(cf. Demazure Gabriel et Astérisque de Fontaine).

La plus simple après celle-ci est la théorie de Cartier : concrète et permet de faire des calculs explicites. D'autres théories plus sophistiquées ont vu le jour après : théories cristallines (Messing, Mazur-Messing, Berthelot-Breen-Messing, de Jong...), sur un A.V.D. d'inégales caractéristiques (Honda, Raynaud, Tate, Fontaine, Fontaine-Lafaille, Conrad, Breuil, Breuil-Kisin...), Displays et Frame de Zink permettant de faire le lien entre la théorie de Cartier et la théorie cristalline (Zink, Lau, ...), ...

Théorie de Cartier des groupes formels

Références : Livre de Zink, notes sur ma page web et celle de Chai

Groupes formels : généralités

R anneau. Dans cet exposé un groupe formel est un foncteur covariant

$$\mathrm{Alg}_R \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

représentable par un schéma formel de la forme $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathrm{Sym}_R M})$ où M est un R-module projectif de type fini

$\Leftrightarrow$ ~~[illegible]~~ localement$/\mathrm{Spec}(R)$ représentable par $\widehat{\mathbb{A}}^d_R = \mathrm{Spf}(R[[X_1, \dots, X_d]])$

<u>Ex</u> : $\star$ $\widehat{\mathbb{G}}_a(A) = (\sqrt{(0)}_A, +)$

$\star$ $\widehat{\mathbb{G}}_m(A) = (1 + \sqrt{(0)}_A, \times) \subset A^\times = \mathbb{G}_m(A)$

Le foncteur associé au groupe formel H s'étend "par continuité" aux R-algèbres adiques en posant pour A I-adique

$$H(A) = \varprojlim_{n \geq 1} H(A/I^n).$$

<u>Ex</u> : $\widehat{\mathbb{G}}_a(A) = (\{a \in A \text{ top. nilpotents}\}, +)$

* loi de gp. formel = (H, u) où H est un gp. formel tel que $\mathrm{Lie}\, H$ soit libre et

$$u : \mathrm{Spf}(R[[X_1, \ldots, X_d]]) \xrightarrow{\sim} H$$

système de coordonnées formelles

avec $X_1 = \ldots = X_d = 0$ est la section nulle de H

* On considèrera également des groupes formels de dimension infinie (je ne veux pas rentrer dans les détails de ce que cela signifie, de toutes façons je ne considèrerai que $\widehat{W}$ et $\widehat{\Lambda}$)

* $\widehat{W} : \mathrm{Alg}_R \longrightarrow \mathrm{Ab}$

$$A \longmapsto \left\{ \sum_{n \geq 0} V^n[a_n] \;/\; a_n \text{ nilpotent nul pour } n \gg 0 \right\}$$

<u>vecteurs de Witt formels</u>

* Rappel (gros vecteurs de Witt)

$$\Lambda : \mathrm{Alg}_R \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

$$A \longmapsto (1 + tA[[t]], \times)$$

Isomorphisme

$$\left(\mathbb{A}^1\right)^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} \Lambda$$

$$(a_i)_{i\geq 1} \longmapsto \prod_{i\geq 1}\left(1-a_i t^i\right)$$

$\forall n\geq 1$, $W_n(X_1,\dots,X_n) = \sum_{d|n} d X_d^{\frac{n}{d}} \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$

La loi de groupe déduite sur $\left(\mathbb{A}^1\right)^{\mathbb{N}}$ est l'unique loi tq.

$\forall n\geq 1$

$$W_n : \left(\mathbb{A}^1\right)^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{G}_a$$

$$(a_i)_{i\geq 1} \longmapsto W_n(a_1,\dots,a_n)$$

soit un morphisme de groupes.

$\Lambda \supset F_n, V_n, n\geq 1$ où $V_n\left(\prod_{i\geq 1}(1-a_i t^i)\right) = \prod_{i\geq 1}\left(1-a_i t^{ni}\right)$

et $W_k(F_n(x)) = W_{kn}(x)$

$[a] = 1-at$, $\Lambda(A) = \left\{\sum_{n\geq 1} V_n[a_n] \;/\; a_n \in A\right\}$.

Gros vecteurs de Witt formels :

$$\hat{\Lambda} : Alg_R \longrightarrow Ab$$

$$A \longmapsto \left\{1+\sum_{i\geq 1} a_i t^i \in 1+tA[t] \;/\; \forall i, a_i \text{ nilp.}\right\}$$

$$\subset \Lambda(A)$$

Courbes dans les groupes formels

H/R gp. formel (éventuellement de dim. ∞)

$$M_H = H(YR[[Y]]) = \ker\big(H(R[[Y]]) \to H(R)\big) = \text{gp. ab. des courbes de } H$$

$$\cup$$

$$M_H^n = H(Y^n R[[Y]])$$

$(M_H^n)_{n \geq 1}$ = filtration de M_H pour laquelle il est séparé complet.

$$M_H = \varprojlim_{n \geq 1} \underbrace{M_H / M_H^n}_{H(YR[[Y]]/Y^n R[[Y]])}$$

$$\boxed{M_H / M_H^2 = H\big(YR[[Y]]/(Y^2)\big) = \mathrm{Lie}\, H}$$

Ex. : * $M_{\hat{G}_a} = (YR[[Y]], +)$

* $M_{\hat{G}_m} = (1 + YR[[Y]], \times)$

$$\cup$$

$M_{\hat{G}_m}^n = (1 + Y^n R[[Y]], \times)$ ss-gp. de congruence

1er théorème de la théorie de Cartier

H/R comme précédemment

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Th}}: \quad \lambda_H : \mathrm{Hom}(\hat{\Lambda}, H) \xrightarrow{\sim} M_H \\ \qquad\qquad \varphi \longmapsto \varphi_{R[[Y]]}(\underset{\hat{\Lambda}(YR[[Y]])}{\underbrace{1-Yt}}) \\ \qquad \text{iso. de gp. ab.}\end{array}}$$

Déf.: $\boxed{\mathbb{E} = \mathrm{End}(\hat{\Lambda})^{op}}$ = anneau de Cartier

$\lambda_\Lambda : \mathbb{E} \xrightarrow{\sim} \Lambda(YR[[Y]])$ comme gp. ab.

M_H est alors un $\underline{\mathbb{E}\text{-module à gauche}}$ en posant

$$\boxed{k.m = \lambda_H(\lambda_H^{-1}(m) \circ k)} \qquad k \in \mathbb{E},\ m \in M_H$$

Déf.: $n \geq 1$, $\quad V_n = \lambda_\Lambda^{-1}(1-Y^n t)$

$\qquad F_n = \lambda_\Lambda^{-1}(1-Yt^n) \qquad \in \mathbb{E}$

$a \in R$, $\quad [a] = \lambda_\Lambda^{-1}(1-aYt)$

⚠ : $\forall A \in Alg_R$, $\hat{\Lambda}(A)$ est un $\mathbb{E}$-module à droite, via le plongement $\hat{\Lambda}(A) \subset \Lambda(A)$ l'action de $F_n \in \mathbb{E}$ sur $\hat{\Lambda}(A)$ est donnée par V_n comme opérateur sur $\Lambda(A)$, de m. les actions de V_n et F_n sont permutées.

(cela est dû au fait que la théorie de Cartier est une théorie de Dieudonné covariante ....).

<u>Action de ces éléments de $\mathbb{E}$ sur M_H</u>

* $\psi_m : R[[Y]] \to R[[Y]]$

$$Y \mapsto Y^m$$

alors pour $m \in M_H = H(Y R[[Y]])$

$$\boxed{V_n . m = H(\psi_n)(m)}$$

* $a \in R$, $u_a : R[[Y]] \to R[[Y]]$

$$Y \mapsto aY$$

$$\boxed{[a].m = H(u_a)(m)}$$

<u>Action de F_n :</u> <u>Rappel</u> : morphisme trace associé à un morphisme plat fini (Deligne SGA $\underline{IV}$ dualité de Poincaré

$$\begin{array}{c} X \\ \big\downarrow f \\ S \end{array} \quad f \text{ fini loc. libre de rang } n$$

$\mathcal{F}$ = faisceau fppf de gp. ab. $/S$, représentable par un S-schéma formel (par exemple, mais on peut faire des hypothèses plus générales)

$$\mathrm{tr}_f : f_* f^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \text{ telque }
\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "ad"] \arrow[rr, bend right, "\times n"'] & f_* f^* \mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{tr}_f"] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

$\rightarrow$ suffit définir $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(S)$ compatible au chgt. de base $/S$

$$X^n = \underbrace{X \times_S \cdots \times_S X}_{n\text{-fois}} \xrightarrow{pr_i} X \qquad i\text{-ème projection}$$

$$\mathcal{A} = f_* \mathcal{O}_X, \quad X^{[n]} := X^n / \mathfrak{S}_n = \mathrm{Spec}\left((\mathcal{A}^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \right)$$

$N_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_S} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_S$ loi polynôme homogène de degré n

(Roby) $\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A}^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \arrow[r, "\exists\ \mathcal{O}_S\text{-linéaire}"] & \mathcal{O}_S \\ \mathcal{A} \arrow[u] \arrow[ur, "N_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_S}"'] & \end{tikzcd}
\qquad a^{\otimes n} = a \otimes \cdots \otimes a \ \longleftarrow\!\!\shortmid\ a$$

$N_{A/\mathcal{O}_S}$ multiplicative et $N_{A/\mathcal{O}_S}(1)=1 \Rightarrow (A^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \to \mathcal{O}_S$ est un morphisme d'algèbres

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} X^{[n]} \arrow[d, shift right] \\ S \arrow[u, bend right, "\delta = \text{section déterminant}"'] \end{tikzcd}$$

Alors,

$$\mathrm{tr}_g : \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sum_{i=1}^n pr_i^*} \mathcal{F}(X^n)^{\mathfrak{S}_n} \xleftarrow{\sim} \mathcal{F}(X^{[n]}) \xrightarrow{\delta^*} \mathcal{F}(X)$$

induit par $X^n \to X^{[n]}$

iso. car $\mathcal{F}$ représentable

<u>Retour à l'action de F_n:</u> $\quad \psi_n : R[[Y]] \to R[[Y]]$, $\quad Y \mapsto Y^n$

$m \in \Pi_H \subset H(R[[Y]])$.

$$\boxed{F_n \cdot m = \mathrm{tr}_{\psi_n}(m)}$$

$\Rightarrow$ on a $\boxed{F_n V_n = n}$ dans $\mathbb{E}$

<u>Rem.</u> Vu que Frob et Ver ont tendance à être permutés, c'est plutôt le Verschiebung qui est une trace.

$\underline{\underline{Ex}}$: $M_{\widehat{G}_a} = \left(Y R[[Y]], + \right)$
$\qquad\qquad\qquad\quad \rotatebox{90}{$\in$}$
$\qquad\qquad\qquad\quad f$

$$V_n \cdot f = f(Y^n) \quad , \quad [a] \cdot f = f(aY)$$

$$f = \sum_{i \geq 1} a_i Y^i \qquad F_n \cdot f = n \sum_{i \geq 1} a_{in} Y^i$$

<u>Structure de M_H et $\mathbb{E}$</u>

$$n \geq 1, \begin{cases} V_n : M_H \longrightarrow M_H \quad \text{injectif}, \; V_n M_H \subset M_H^n = H(Y^n R[[Y]]) \\ V_n : \underbrace{M_H / M_H^2}_{\text{Lie } H} \xrightarrow{\sim} M_H^n / M_H^{n+1} \\ M_H \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \geq 1} M_H / V_n M_H \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Si Lie H est libre et $m_1, \dots, m_d \in M_H$ induisent une base de Lie H alors tout élément de M_H s'écrit de façon unique

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ 1 \leq i \leq d}} V_n [a_{n,i}] m_i \quad , \; a_{n,i} \in R.$$

6

Dans le cas de $\hat{\Lambda}$ on vérifie que $(F_n)_{n\geq 1}$ induisent une base de Lie $\hat{\Lambda} = M_{\hat{\Lambda}} / M_{\hat{\Lambda}}^2$

$\Rightarrow$ tout élément de $\mathbb{E}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\sum_{n,m\geq 1} V_n [a_{n,m}] F_m \,, \quad \forall n \quad a_{n,m} = 0 \text{ pour } m >> 0$$

* Plongement des gros vecteurs de Witt

$$\Lambda(R) \hookrightarrow \mathbb{E}$$

$$\sum_{n\geq 1} V_n[a_n] \longmapsto \sum_{n\geq 1} V_n[a_n] F_n = \prod_{n\geq 1} \left(1 - a_n (Y t)^n\right)$$

Relations $\begin{cases} V_n V_m = V_{nm} \\ F_n F_m = F_{nm} \\ F_n V_m = V_m F_n \text{ si } (n,m) = 1 \\ F_n V_n = n \end{cases}$

$\rightarrow$ détermine complètement la structure de $\mathbb{E}$ = Complété de $\Lambda(R)[F_n, V_n]_{n\geq 1}$

Deuxième théorème de la théorie de Cartier.

Déf : Un module de Cartier est un $\mathbb{E}$-module à gauche M muni d'une filtration décroissante $(M^n)_{n\geq 1}$

tq. :

- $M^1 = M$ et $M \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n\geq 1} M/M^n$ (séparé complet)
- $V_n [a] M^m \subset M^{nm}$ $\quad n, m \geq 1$ et $a \in R$
- M/M^2 est un R-module projectif de type fini
- $\forall n \geq 1$, $V_n : M/M^2 \xrightarrow{\sim} M^n/M^{n+1}$.

Th :

$$\text{Gr. formels}/R \rightleftarrows \text{Mod. de Cartier}/R$$

$$H \longmapsto M_H$$

$$\Lambda(-) \otimes_{\mathbb{E}} M \longmapsfrom M$$

induisent des éq. inverses de catégories.

$\mathbb{E} = \mathrm{End}(\Lambda)^{op} \Rightarrow \Lambda(-) = \mathbb{E}$-module à droite

Applications d'adjonction = applications naturelles.

$\rightarrow$ preuve utilise le théo. de représentabilité énoncé par Farid

Théorie de Cartier/$\mathbb{Q}$

$R = \mathbb{Q}$-algèbre. $A \in Alg_R$

$$\log : 1 + tA[[t]] \xrightarrow{\sim} (tA[[t]], +)$$

$\Rightarrow$ iso. $\boxed{\hat{\Lambda} \xrightarrow[\sim]{\log} \bigoplus_{1}^{+\infty} \widehat{\mathbb{G}_a}}$

$\Rightarrow \mathbb{E} \simeq \mathrm{End}\left(\bigoplus_{1}^{\infty} \widehat{\mathbb{G}_a}\right)^{op}$ = algèbre de matrices infinies à coefficients dans $\mathrm{End}(\widehat{\mathbb{G}_a}) = R$.

$\rightsquigarrow$ "<u>équivalence de Morita</u>" : soit $e \in \mathbb{E}$ l'idempotent qui est la projection sur la première composante de $\bigoplus_{1}^{\infty} \widehat{\mathbb{G}_a}$

pdt. C.V.

$$\left[\underbrace{e = \prod_{\ell \text{ premier}} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{\ell} V_\ell F_\ell}_{\text{idempotent car } F_\ell V_\ell = \ell}\right)}_{\text{idempotent complémentaire}} = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} V_n F_n \in \mathbb{E} \right]$$

$e\mathbb{E}e = R$, si M est un $\mathbb{E}$-module de Cartier

$$eM \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{m}^2$$

et $M \longmapsto eM$ induit une équivalence entre modules de Cartier$/R$ et R-modules projectifs de type fini.

On en déduit :

<u>Th</u> : Il y a une éq.

$$\begin{array}{ccc} \text{Gp. formels}/R & \xrightarrow{\sim} & R\text{-modules projectifs de t.f.} \\ H & \longmapsto & \operatorname{Lie} H \\ M \otimes \widehat{\mathbb{G}}_a & \longleftarrow & M \end{array}$$

<u>Théorie de Cartier$/\mathbb{Z}_{(p)}$</u>

$R = \mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre

* $\forall A \in \mathrm{Alg}_R$, $\hat{\Lambda}(A)$ est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module i.e.

$$\hat{\Lambda} : \mathrm{Alg}_R \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_{(p)}}$$

8

$(n,p)=1$, $\hat{\Lambda} \xrightarrow{\times n} \hat{\Lambda}$ induit un iso. sur $\mathcal{L}ie\,\hat{\Lambda}$

$\Rightarrow$ c'est un iso.

Concrètement si $x \in \underbrace{1+tA[[t]]}_{\Lambda(A)}$ et $1+x \in \hat{\Lambda}(A)$

$$(1+x)^{1/n} = 1 + \sum_{b\geq 1} \underbrace{\binom{1/n}{b}}_{\in \mathbb{Z}_{(p)}} x^b$$

$*$ $\mathbb{E} = \mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. On peut former l'idempotent

$$\boxed{\varepsilon = \prod_{l \neq p} \left(1 - \frac{1}{l} V_l F_l\right) = \sum_{(n,p)=1} \frac{\mu(n)}{n} V_n F_n \in \mathbb{E}}$$

On pose $\mathbb{E}^{(p)} := \varepsilon \mathbb{E} \varepsilon$. Si M est un $\mathbb{E}$-module de Cartier, εM est un $\mathbb{E}^{(p)}$-module.

$$\boxed{\varepsilon . M = \{ m \in M \,/\, (n,p) = 1 \Rightarrow F_n . m = 0 \}}$$

Si $M = M_H$, $\varepsilon M_H :=$ module des courbes p-typiques dans $H(YR[[t]])$

Ex: $\varepsilon . M_{\hat{\mathbb{G}}_a} = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n Y^{p^n} / a_n \in R \right\} \subset M_{\hat{\mathbb{G}}_a} = YR[[Y]]$.

Notons $\boxed{F = F_p,\ V = V_p.}$

On vérifie alors que :

$* \ \widehat{W} \xrightarrow{\sim} \Lambda.\varepsilon \subset \Lambda$

$\sum_{n\geq 0} V^n[a_n] \longmapsto \left(\sum_{n\geq 0} V^n[a_n]\right).\varepsilon$

$* \ \mathbb{E}^{(p)} = \varepsilon.\underbrace{\left\{\sum_{n,m\geq 0} V^n[a_{n,m}]F^m \,\middle|\, \forall n, a_{n,m}=0 \text{ pour } m\gg 0\right\}}_{\text{écriture unique}}.\varepsilon$

$\Rightarrow \mathbb{E}^{(p)} \simeq \widehat{W(R)[F,V]}$ ← Complété V-adique

$* \ \mathbb{E}^{(p)} = \mathrm{End}(\widehat{W})$

De cela on déduit :

~~Th. Gp. formels/R~~

<u>Déf.</u> $\mathbb{E}^{(p)}$-module de Cartier $= \mathbb{E}^{(p)}$-module séparé complet pour la top. V-adique tel que $V.M \to M$ soit injectif et M/VM soit un R-module projectif de t.f.

De tout cela on déduit :

Th : Les foncteurs

$$\text{Gp. formels}/R \rightleftarrows \mathbb{E}^{(p)}\text{-mod. de Cartier}$$

$$H \longmapsto \varepsilon.M_H$$

$$\widehat{W}(-)\otimes_{\mathbb{E}^{(p)}} M \longleftarrow M$$

sont des équivalences. De plus

$$\varepsilon M_H = \mathrm{Hom}(\widehat{W}, H)$$

$$\mathrm{Lie}\, H = \varepsilon.M_H / V\varepsilon.M_H$$

Premières applications : $*$ $R = \mathbb{F}_p$-algèbre parfaite

$\Longrightarrow \sigma = F$ bijectif sur $\underbrace{W(R)}_{p\text{-adique}}$

Gp. formels p-divisibles$/R \simeq W(R)$-modules projectifs de t. f. M munis d'une application σ^{-1}-linéaire $V : M \to M$ tq :

$*$ $pM \subset VM$

$*$ M/VM est un R-mod. proj. de t. f.

$*$ V est top. nilpotent (pour la top. p-adique)

Rem : Si Lie H est libre alors M est libre.

* $pR=0$ et H un groupe formel$/R$ tel que $pH=0$.

Alors $H \simeq \mathrm{Lie}\, H \otimes \widehat{\mathbb{G}_a}$. Cela résulte de ce que

$$\underbrace{pM_H}_{VFM_H}=0 \Rightarrow FM_H=0 \text{ car } V \text{ est injectif sur } M_H.$$

car $pR=0 \Rightarrow VF=p$

<u>Présentation des modules de Cartier</u>

$R=\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Je note maintenant M_H pour le

que je notais avant $\mathcal{E}.M_H$.

Soit M un $E^{(p)}$-module de Cartier tel que M/VM soit un

R-module libre.

<u>Def</u> : Une V-base de $M=(m_1, .., m_d) \in M^d$

induisant une base de M/VM.

Pour une telle V-base tout élément de M s'écrit de

façon unique $\displaystyle\sum_{\substack{n\geq 0\\ 1\leq i\leq d}} V^n[a_{n,i}]m_i$.

$\Rightarrow$ afin de connaître la structure de $\mathbb{E}^{(p)}$_module de M il suffit de connaître les constantes structurelles $(b_{i,j,n})_{\substack{1\leq i,j\leq d \\ n\geq 0}}$ telles que $Fm_i = \sum_{\substack{n\geq 0 \\ 1\leq j\leq d}} V^n[b_{i,j,n}]m_i$

Réciproquement, étant données de telles constantes structurelles cela définit un module de Cartier muni d'une V-base M, les constantes structurelles définissant une résolution

$$0 \to \left(\mathbb{E}^{(p)}\right)^d \longrightarrow \left(\mathbb{E}^{(p)}\right)^d \longrightarrow M \to 0$$

Si $M = M_H$ cela fournit une résolution

$$\boxed{0 \to \widehat{W}^d \longrightarrow \widehat{W}^d \longrightarrow H \to 0}$$

<u>Exemples</u>: $\star$ $M_{\widehat{G}_a}$ a pour V-base $e = Y$ avec comme relation $F \cdot e = 0$ ce qui correspond à la résolution

$$0 \to \widehat{W} \xrightarrow{V} \widehat{W} \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}_a} \to 0$$

$$[a_0, \dots] \longmapsto a_0$$

* Il y a un morphisme

$$\widehat{\Lambda} \xrightarrow{t=1} \widehat{\mathbb{G}_m}$$

$$\sum_{i\geq 1} V_i[x_i] \longmapsto \prod_{i\geq 1}(1-x_i)$$

Composé avec l'inclusion

$$\widehat{W} \hookrightarrow \widehat{\Lambda}$$

$$\sum_{i\geq 0} V^i[x_i] \longmapsto \sum_{i\geq 0} V^i[x_i]\varepsilon$$

il donne un morphisme

$$e : \widehat{W} \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}_m}$$

$$\sum_{i\geq 0} V^i[x_i] \longmapsto \prod_{\substack{i\geq 0\\(n,p)=1}} (1-x_i)^{\frac{\mu(n)}{n}}$$

$e = V$-base de $M\widehat{\mathbb{G}_m}$. De plus $F.e = e$

$\Rightarrow$ résolution

$$\left[0 \to \widehat{W} \xrightarrow{V-\mathrm{Id}} \widehat{W} \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}_m} \longrightarrow 0\right.$$

$$\left.\sum_{i\geq 0} V^i[x_i] \longmapsto \prod_{\substack{i\geq 0\\(n,p)=1}} (1-x_i)^{\frac{\mu(n)}{n}}\right]$$

11

Plus généralement, soit H le groupe formel de dimension $1/\mathbb{Z}_{(p)}$ tel que M_H soit muni de la V-base e vérifiant

$$\boxed{Fe = V^{h-1} e}, \qquad h \geq 1$$

$e \in H(YR[[Y]])$ est une V-base $\Rightarrow e : \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_{(p)}[[Y]]) \xrightarrow{\sim} H$ i.e. définit une loi de groupe formel sur H. Soit

$$\log : H_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{G}_a}/\mathbb{Q}$$

tel que l'image de $\bar{e} \in \mathrm{Lie}\, H$ par $\log$ soit la base canonique de $\mathrm{Lie}\, \widehat{\mathbb{G}_a}$. Alors $\log(e) \in \widehat{\mathbb{G}_a}(Y\mathbb{Z}_{(p)}[[Y]]) = Y\mathbb{Z}_{(p)}[[Y]]$ est le logarithme de la l.g.f. précédente. Posons $f = \log(e)$

$$F.e = V^{h-1} e \Rightarrow F.f = V^{h-1} f \text{ dans } M_{\widehat{\mathbb{G}_a}}$$

Donc, $*$ $f'(0) = 1$

$*$ f est p-typique i.e. $f = \sum_{n \geq 0} a_n Y^{p^n}$

$*$ f satisfait l'équation fonctionnelle

$$f(Y) = Y + \frac{1}{p} f(Y^{p^h})$$

$$\Rightarrow \boxed{f(Y) = \sum_{n\geq 0} \frac{Y^{p^{nh}}}{p^n}}$$

et la l.g.f. associée est

$$f^{-1}\big(f(X)+f(Y)\big) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[X,Y]]$$

pas évident à priori, cela résulte de la théorie de Cartier.