Rappels de la dernière fois – Ramero.

Λ = gros vecteurs de Witt

$$\Lambda(A) = \Big\{ \underbrace{\sum_{n\geq 1} V_n [a_n]}_{\prod_{n\geq 1}(1-a_n t^n)} \;\Big|\; a_n \in A \Big\} = 1 + tA[[t]]$$

$\hat{\Lambda} : Alg_R \to Ab$ gros vecteurs de Witt formels.

$$A \to \Big\{ \sum_{n\geq 1} V_n [a_n] \;\Big|\; a_n \text{ nilpotent nul pour } n \gg 0 \Big\} \subset \Lambda(A)$$

$$\mathbb{E} = \mathrm{End}(\hat{\Lambda})^{opp} = \Big\{ \sum_{n,m\geq 1} V_n [a_{n,m}] F_m \Big\}$$

H gp. formel$/R$ ~~M_H~~ $M_H = H(YR[[Y]]) = \mathbb{E}$-module des courbes

via $\lambda_H : \mathrm{Hom}(\hat{\Lambda}, H) \xrightarrow{\sim} M_H$

$\varphi \mapsto \varphi(1-Yt)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{gp. formels}/R \rightleftarrows \text{modules de Cartier}/R & \\ H \longmapsto M_H & \text{éq. de catégories} \\ \hat{\Lambda}(-) \otimes_{\mathbb{E}} M \longleftarrow M & \end{array} \right\}$$

Théorie de Cartier / $\mathbb{Z}_{(p)}$

$R = \mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre

$\forall A \in Alg_R$, $\hat{\Lambda}(A)$ est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-module i.e.

$$\hat{\Lambda} : Alg_R \longrightarrow Mod_{\mathbb{Z}_{(p)}}$$

$(n,p)=1$, $\hat{\Lambda} \xrightarrow{\times n} \hat{\Lambda}$ induit un iso. sur $Lie\,\hat{\Lambda} \Rightarrow$ c'est un iso.

Plus généralement $\forall H$ gp. formel$/R$, $H : Alg_R \longrightarrow Mod_{\mathbb{Z}_{(p)}}$.

Concrètement, si $1+x \in 1+tA[[t]]$,

$$(1+x)^{1/n} = 1 + \sum_{k\geq 1} \underbrace{\binom{1/n}{k}}_{\in \mathbb{Z}_{(p)} \text{ car } (n,p)=1} x^k$$

$\ast$ Donc, $\mathbb{E} = End(\hat{\Lambda})^{op} = \mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Par analogie avec la théorie de Cartier$/\mathbb{Q}$ on peut former l'idempotent

$$\boxed{\varepsilon = \prod_{l \neq p} \left(1 - \frac{1}{l} V_l F_l\right) = \sum_{(n,p)=1} \frac{\mu(n)}{n} V_n F_n \in \mathbb{E}}$$

On pose $\mathbb{E}^{(p)} := \varepsilon \mathbb{E} \varepsilon$. Si M est un $\mathbb{E}$-module de Cartier, εM est un $\mathbb{E}^{(p)}$-module.

$$\boxed{\mathcal{E}.M = \{ m \in M \,/\, (n,p)=1 \Rightarrow F_n . m = 0 \}}$$

Si $M = M_H$, $\mathcal{E}M_H :=$ module des courbes p-typiques dans $M_H = H(YR[[Y]])$

$\underline{\underline{Ex}}$: $\mathcal{E}.M_{\widehat{\mathbb{G}}_a} = \left\{ \sum_{m\geq 0} a_m Y^{p^m} \,\middle|\, a_m \in R \right\} \subset M_{\widehat{\mathbb{G}}_a} = YR[[Y]]$

Posons $\boxed{F = F_p ,\ V = V_p}$.

On vérifie alors que :

$*$ $\widehat{W} \xrightarrow{\sim} \widehat{\Lambda}.\mathcal{E} \subset \widehat{\Lambda}$

$\sum_{m\geq 0} V^m[a_m] \longmapsto \sum_{m\geq 0} V^m[a_m].\mathcal{E}$

$*$ $\mathbb{E}^{(p)} = \mathcal{E}. \underbrace{\left\{ \sum_{n,m\geq 0} V^n[a_{n,m}]F^m \,\middle|\, \forall n, a_{n,m} = 0 \text{ pour } m \gg 0 \right\}}_{\text{écriture unique}} \overset{\text{redondant}}{.\mathcal{E}}$

$\Rightarrow \mathbb{E}^{(p)} \simeq \widehat{W(R)[F,V]}$ où $W(R) \hookrightarrow \mathbb{E}^{(p)}$

$\sum_{m\geq 0} V^m[a_m] \longmapsto \mathcal{E} \sum_{m\geq 0} V^m[a_m]F^m$.

$*$ $\mathbb{E}^{(p)} = \mathrm{End}(\widehat{W})$

Déf: $\mathbb{E}^{(p)}$_module de Cartier = $\mathbb{E}^{(p)}$_module séparé complet pour la topologie V-adique, sans V-torsion i.e. $VM \to M$ injectif et M/VM est un R-module projectif de type fini.

De tout cela on déduit:

Th. Les foncteurs

$$\text{Gp. formels}/R \;\rightleftarrows\; \mathbb{E}^{(p)}\text{-mod. de Cartier}$$

$$H \longmapsto \mathcal{E}.M_H = \text{Courbes } p\text{-typiques}$$

$$\widehat{W}(-) \otimes_{\mathbb{E}^{(p)}} M \longleftarrow M$$

sont des équivalences. De plus $\mathcal{E}.M_H = \mathrm{Hom}(\widehat{W}, H)$

$$\mathrm{Lie}\, H = \mathcal{E}.M_H / V\mathcal{E}.M_H .$$

Présentation des modules de Cartier

$R = \mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Je note maintenant $M_H^{(p)}$ pour ce que je notais avant $\varepsilon . M_H$.

Soit M un $\mathbb{E}^{(p)}$-module de Cartier tel que M/VM soit un R-module libre.

Def: Une V-base de $M = (m_1, \dots, m_d) \in M^d$ induisant une base de M/VM.

Pour une telle V-base tout élément de M s'écrit de façon unique $\sum_{\substack{n \geq 0 \\ 1 \leq i \leq d}} V^n [a_{n,i}] m_i$.

$\Rightarrow$ afin de connaître la structure de $\mathbb{E}^{(p)}$-module de M il suffit de connaître les constantes structurelles $(b_{i,j,n})_{\substack{1 \leq i,j \leq d \\ n \geq 0}}$ telles que $F m_i = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ 1 \leq j \leq d}} V^n [b_{i,j,n}] m_j$.

Réciproquement, étant données de telles constantes structurelles cela définit un module de Cartier muni d'une V-base M, les constantes structurelles définissant une résolution.

$$0 \to \left(\mathbb{E}^{(p)}\right)^d \longrightarrow \left(\mathbb{E}^{(p)}\right)^d \longrightarrow M \to 0$$

Si $M = M_H$ Cela fournit une résolution par application de $\widehat{W}(-) \underset{\mathbb{E}^{(p)}}{\otimes} -$

$$\boxed{0 \to \widehat{W}^d \longrightarrow \widehat{W}^d \longrightarrow H \to 0}$$

<u>Exemples</u> : $*$ $M_{\widehat{G}_a}$ a pour V-base $e = Y \in Y R[[Y]]$ avec comme relation $F.e = 0$ ce qui correspond à la résolution

$$0 \to \widehat{W} \xrightarrow{V} \widehat{W} \longrightarrow \widehat{G}_a \to 0$$

$$[a_0, \ldots] \longmapsto a_0$$

(Rappelons que $F \in \mathbb{E}^{(p)}$ agit comme V dans $\widehat{W}$ et V comme F)

$*$ Il y a un morphisme

$$\widehat{\Lambda} \xrightarrow{t=1} \!\!\!\!\to \widehat{G}_m$$

$$\sum_{i \geq 1} V_i[x_i] \longmapsto \prod_{i \geq 1} (1 - x_i)$$

$$\| $$

$$\prod_{i \geq 1} (1 - x_i t^i)$$

Composé avec l'inclusion

$$\widehat{W} \hookrightarrow \widehat{\Lambda}$$

$$\sum_{i\geq 0} V^i[x_i] \longmapsto \sum_{i\geq 0} V^i[x_i]\,\varepsilon$$

où $\varepsilon = \sum_{(n,p)=1} \frac{\mu(n)}{n} V_n F_n$

il donne un morphisme

$$e : \widehat{W} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{G}_m}$$

$$\sum_{i\geq 0} V^i[x_i] \longmapsto \prod_{\substack{i\geq 0 \\ (n,p)=1}} (1-x_i)^{\frac{\mu(n)}{n}}$$

(Rem: Il n'y a pas de morphisme $W \to \mathbb{G}_m$ induisant le morphisme de gp. formels précédents
pro-unipotent)

e = V-base de $M_{\widehat{\mathbb{G}_m}} = \mathrm{Hom}(\widehat{W}, \widehat{\mathbb{G}_m})$ car le morphisme précédent est surjectif sur les algèbres de Lie. De plus $F.e = e$.

$\Rightarrow$ Résolution

$$\boxed{0 \to \widehat{W} \xrightarrow{V-\mathrm{Id}} \widehat{W} \xrightarrow{e} \widehat{\mathbb{G}_m} \to 0}$$

Plus généralement, soit H le groupe formel de dimension $1/\mathbb{Z}_{(p)}$ tel que M_H soit muni de la V-base e vérifiant

$$\boxed{Fe = V^{h-1}e} \qquad h \geq 1$$

$e \in H(Y\mathbb{R}[[Y]])$ est une V-base $\Rightarrow e : \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_{(p)}[[Y]]) \xrightarrow{\sim} H$ i.e. définit une loi de groupe formel sur H ~~…~~, F.

Soit $\log : H_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{G}}_{a/\mathbb{Q}}$ tel que l'image de $\bar{e} \in \mathrm{Lie}\, H$ par $\log$ soit la base canonique de $\mathrm{Lie}\, \widehat{\mathbb{G}}_a$. Alors, $\log(e) \in \widehat{\mathbb{G}}_a(Y\mathbb{Z}_{(p)}[[Y]]) = Y\mathbb{Z}_{(p)}[[Y]]$ est le logarithme de la l.g.f. F. Posons $f = \log(e)$

$$Fe = V^{h-1}e \Rightarrow F.f = V^{h-1}f \quad \text{dans } M_{\widehat{\mathbb{G}}_a}.$$

On a donc :

* $f'(0) = 1$
* f est p-typique i.e. $f = \sum_{n \geq 0} a_n Y^{p^n}$
* f satisfait l'équation fonctionnelle

$$f(Y) = Y + \frac{1}{p} f(Y^{p^h})$$

$$\Rightarrow \boxed{f(Y) = \sum_{n\geq 0} \frac{Y^{p^{nh}}}{p^n}}$$

et la loi de groupe formel associée est donc

$$F(X,Y) = f^{-1}\big(f(X)+f(Y)\big) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[X,Y]]$$

pas évident a priori

Soit $F_0 \in \mathbb{F}_p[[X,Y]]$ la réduction modulo p de F.

On a alors $[p]_{F_0} = T^{p^h}$

$\Rightarrow$ si H_0 est le groupe formel associé sur $\mathbb{F}_p$, $F : H_0 \to H_0^{(p)}$,

alors $\boxed{F^h = p}$

$\rightarrow$ loi de groupe formel de Honda de hauteur h.

* Lorsque $h=1$, $f(T) = \sum_{n\geq 0} \frac{T^{p^n}}{p^n}$, $F(X,Y) = f^{-1}\big(f(X)+f(Y)\big)$

$$E(T) = \exp\Big(\sum_{n\geq 0} \frac{T^{p^n}}{p^n}\Big) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[T]] \text{ et}$$

$$E : F \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{G}_m}$$

exponentielle d'Artin-Hasse

* Lorsque $h=2$, sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ le groupe formel associé est celui d'une courbe elliptique supersingulière $/\overline{\mathbb{F}}_p$.

2 Applications de la théorie de Cartier

* Théorie de Dieudonné sur un anneau parfait :

$R =$ anneau parfait de car. p.

$\Rightarrow W(R)$ est p-adiquement complet

$\sigma := F$ bijectif et $VW(R) = pW(R)$.

Un groupe formel $/R$ est p-divisible si $H \xrightarrow{\times p} H$ est une isogénie.

Groupes formels p-div. $/R \simeq (M, V)$ où M est un $W(R)$-module projectif de type fini, $V : M \to M$ est un opérateur σ^{-1}-linéaire vérifiant : * $pM \subset VM$
* V est p-adiquement top. nilp
* M/VM est un R-module projectif

$$H \longmapsto (M_H^{(p)}, V)$$

Rem : Dans cette correspondance Lie H libre $\Rightarrow M_H^{(p)}$ libre.

* $pR=0$. H groupe formel vérifiant $pH=0$.

Alors, $H \simeq \mathrm{Lie}\, H \otimes \widehat{\mathbb{G}}_a$

En effet, rappelons que $\widehat{\mathbb{G}}_a$ a pour équation structurelle $F.e=0$.

$$\Rightarrow \quad H \simeq \mathrm{Lie}\, H \otimes \widehat{\mathbb{G}}_a \Leftrightarrow F . M_H^{(p)} = 0$$

Car $pR=0 \Rightarrow F$ et V commutent.

$$\text{Or } pH=0 \Rightarrow \underset{V(F M_H^{(p)})}{p . M_H^{(p)}} = 0 \Rightarrow F M_H^{(p)} = 0.$$

V injectif

Sur le champ des groupes formels de dimension 1

$\mathcal{H}$ = champ des groupes formels de dimension 1 / $\mathbb{Z}$

topologie = Zariski ou fppf.

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \xrightarrow{\sim} & B\mathbb{G}_m \\ H & \longmapsto & \mathrm{Lie}\, H \\ \mathcal{L} \otimes \widehat{\mathbb{G}}_a & \longleftarrow & \mathcal{L} \end{array}\right]$$

Soit le foncteur

$$U : \text{Anneaux} \longrightarrow \text{Ens}$$

$$A \longmapsto \{\text{lois de groupes formelles de dim. } 1/A\}$$

$$\overline{U}(A) = \left\{ (H, u) \;/\; H \in \mathcal{H}(A) \text{ et } u : \hat{\mathbb{A}}^1 \xrightarrow{\sim} H \right\}$$

$T=0 \longleftrightarrow$ neutre

$$\hat{\mathbb{A}}^1 = \mathrm{Spf}\left(A[[T]]\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \overline{U} & & (H,u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & & H \end{array}$$

* $\overline{U}$ est représentable par un schéma affine. En effet,

soit $F(X,Y) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]_{i,j\geq 1}[[X,Y]]$ la série formelle

$$F(X,Y) = X + Y + \sum_{i,j\geq 1} a_{ij} X^i Y^j$$

$$F(X,Y) = F(Y,X) \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

$$F(F(X,Y),Z) = F(X, F(Y,Z)) \Leftrightarrow$$ certaines relations polynomiales satisfaites par les $(a_{ij})_{i,j\geq 1}$

$\leadsto$ définit un idéal I de $\mathbb{Z}[a_{ij}]_{i,j\geq 1}$

$$\overline{U} = \mathrm{Spec}\Big(\underbrace{\mathbb{Z}[a_{ij}]_{i,j\geq 1} / I}_{\text{anneau de Lazard}}\Big)$$

$$\begin{array}{c} U \\ \downarrow \\ \mathfrak{X} \end{array}$$ est une présentation de $\mathfrak{X}$.

Soit le foncteur G : Anneaux $\longrightarrow$ groupes

$$A \longmapsto \underbrace{\mathrm{Aut}\left(\hat{\mathbb{A}}^1_A\right)}_{\text{Automorphismes de } \hat{\mathbb{A}}^1_A \text{ envoyant l'origine sur l'origine}}$$

schéma formel pointé par l'origine

$$\hat{\mathbb{A}}^1_A = \mathrm{Spf}\left(A[[T]]\right)$$

G est un schéma en groupes $/\mathbb{Z}$. En effet,

$$\mathbb{A}^1\setminus\{0\} \times \left(\mathbb{A}^1\right)^{\mathbb{N}_{\geq 1}} \xrightarrow{\sim} G$$

$(b_0, (b_i)_{i\geq 1}) \longmapsto$ l'automorphisme continu de $A[[T]]$ tel que

$$T \longmapsto \sum_{i\geq 1} a_i T^i$$

$$G \simeq \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[X_0^{\pm 1}, X_i\right]_{i\geq 1}\right).$$

G = <u>groupe de jauge</u> = changement de coordonnée sur une loi de groupe formel de dim. 1

$G \curvearrowright U$ via $g.(H,u) = (H, u\circ g^{-1})$

On a alors $\boxed{\mathfrak{X} = [G \backslash U]}$

Structure de G : il y a un morphisme surjectif

$$u : G \twoheadrightarrow \mathbb{G}_m$$
$$f \mapsto \underbrace{f'(0)}_{\text{Jacobien de l'automorphisme de } \widehat{\mathbb{A}}^1}$$

$G_1 := \ker u =$ schéma en groupes pro-unipotent pour la filtration naturelle, $G_n = \{ f \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{A}}^1) \mid f'(0) = 1, f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0 \}$

$$G_1 = \varprojlim_{n \geq 1} G_1 / G_n , \quad G_n / G_{n+1} \simeq \mathbb{G}_a .$$

Section de u : $\mathbb{G}_m \longrightarrow G$

$\lambda \mapsto$ homothétie de rapport λ de $\widehat{\mathbb{A}}^1$

$$\Rightarrow \boxed{G = G_1 \rtimes \mathbb{G}_m}$$

L'action de $\mathbb{G}_m$ sur U donnée par $\mathbb{G}_m \subset G \curvearrowright U$ fournit une graduation de l'anneau de Lazard

$$R = \mathbb{Z}[a_{ij}]_{i,j\geq 1} / \underbrace{I}_{\text{homogène}} \qquad \deg(a_{ij}) = i+j-1$$

$$U = \mathrm{Spec}(R)$$

$$R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$$

$\boxed{\underline{\text{Th}} \text{ (Lazard) : L'anneau gradué } R \text{ est un anneau de polynômes } \mathbb{Z}[u_i]_{i\geq 1} \xrightarrow{\sim} R, \ \deg(u_i) = i.}$

Cf. notes sur ma page web, cours en Chine.
Calcul de cohomologie de Hochschild $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a) = R$-mod. libre de base la classe de l'extension $0 \to \mathbb{G}_a \to W_2 \to \mathbb{G}_a \to 0$

$$x \mapsto [0,x]$$
$$[a,b] \mapsto a$$

$\underline{\text{Ex}}$: Soit V l'ouvert de U égal à $\underbrace{\mathrm{Spec}(R)}_{\text{cône}} \setminus \underbrace{V(R^+)}_{\text{origine du cône}}$ idéal d'augmentation

$$\mathbb{G}_m \backslash V = \mathrm{Proj}(\mathbb{Z}[u_i]_{i\geq 1}) = \mathbb{P}^\infty \text{ espace projectif de dim } \infty$$

$$[G_1 \backslash \mathbb{P}^\infty] \underset{\text{sous champ ouvert}}{\hookrightarrow} \mathcal{X} \underset{\text{fermé}}{\hookleftarrow} \text{Champ des gp. formels isomorphes à } \mathcal{L} \otimes \widehat{\mathbb{G}}_a$$

Application de la Théorie de Cartier

$X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$

$\mathcal{U} : \mathbb{Z}_{(p)}\text{-algèbres} \longrightarrow \text{Ensembles}$

$A \longmapsto \left\{ (H, e) \text{ où } H \text{ est un groupe formel de dim. } 1/A \text{ et } e : \mathrm{Spf}(A[[y]]) \tilde{\to} H \text{ une courbe } p\text{-typique qui est une V-base} \right\}$

$\mathcal{U}$ est une présentation de $X_{\mathbb{Z}_{(p)}}$.

$$\begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \downarrow \\ X \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \end{array}$$

analogue p-typique de l'anneau de Lazard.

$\mathcal{U} = \mathrm{Spec}\big(\underbrace{\mathbb{Z}_{(p)}[v_i]_{i \geq 0}}_{R}\big)$ si (H, e) est l'objet universel$/R$

équation structurelles de $M_H^{(p)}$, $Fe = \sum_{i \geq 0} V^i [v_i] e$

Soit $f \in R[[T]]$ le logarithme de la loi de groupe formel universelle F sur R, $f(T) = T + \sum_{n \geq 1} a_n T^{p^n}$, $F(X, Y) = f^{-1}(f(X) + f(Y))$

$$F.e = \sum_{i \geq 0} V^i [v_i] e$$

$$\Updownarrow$$

éq. fonctionnelle $f(T) = T + \frac{1}{p} \sum_{i \geq 0} f\left(v_i T^{p^{i+1}}\right)$

On trouve alors en résolvant cette équation fonctionnelle

$$f(T) = T + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{r \geq 1 \\ \underbrace{i_1 + \dots + i_r = n}_{\text{partition de } n}}} \frac{v_{i_1} v_{i_2}^{p^{i_1}} \cdots v_{i_r}^{p^{i_{r-1}}}}{p^r} \right) T^{p^n}$$

$f^{-1}\left(f(X) + f(Y)\right) \in R[[X,Y]]$ est la loi de gp. formel universelle p-typique.

$\rightarrow$ Brown-Peterson.