1

Cours M2 Jussieu
Sur la Courbe
Printemps 2014
Cours n°2

Fonctions holomorphes de la variable p

Hypothèses : $\mathbb{F}_q$ corps fini

E corps local de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ → $[E:\mathbb{Q}_p]<+\infty$ ou $E=\mathbb{F}_q((\pi))$

π uniformisante de E

(tout ce qu'on fait ne dépend pas de ce choix)

$F|\mathbb{F}_q$ valué complet $|\cdot| : F \to \mathbb{R}_+$ (non triviale)

parfait, $|\cdot| = q^{-v(\cdot)}$

$\Downarrow$

v pas discrète !

Ex :

$$\left\{\begin{array}{l} F = k((\pi^{1/p^\infty})) \qquad k|\mathbb{F}_q \text{ parfait} \\ F = \widehat{k((\pi))} \\ F \text{ sphériquement complet} = k((\pi^\Gamma)) = \left\{ f = \sum_{\alpha\in\Gamma} a_\alpha \pi^\alpha \;\middle|\; \begin{array}{l} a_\alpha \in k \\ \text{supp}(f) \text{ bien ordonné} \end{array} \right\} \end{array}\right.$$

$\Gamma \subset \mathbb{R}$ sous-groupe vérifiant $p\Gamma = \Gamma$.

→ cf. Poonen "Maximally complete fields".

Le Corps $\mathcal{E}$

Déf: $\mathcal{E}|E$ l'unique extension non-ramifiée complète de corps résiduel $F|\mathbb{F}_q$.

i.e. $\mathcal{E} = \mathcal{O}_\mathcal{E}[\frac{1}{\pi}]$ $\mathcal{O}_\mathcal{E} = \mathcal{O}_E$ - algèbre π-adique plate

$$\boxed{\mathcal{O}_\mathcal{E}/\pi\mathcal{O}_\mathcal{E} = F.}$$

Il existe un unique relèvement multiplicatif $[xy]=[x].[y]$

$$[\cdot] : F \longrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{E}$$

$$[x] = \lim_{n\to+\infty} \left(\widehat{x^{q^{-n}}}\right)^{q^n}$$

relèvement quelconque de $x^{q^{-n}}$.

Tout élément de $\mathcal{E}$ s'écrit de façon unique

$$\sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n, \quad x_n \in F.$$

Remarque culturelle:

$K|\mathbb{F}_q$. $K = \varinjlim_{\text{filtrante}} \mathbb{F}_q$-alg. lisses

$\Rightarrow \mathbb{L}_{K/\mathbb{F}_q} \sim \Omega^1_{K/\mathbb{F}_q}$

$\mathcal{H}^{-2}(\mathbb{L}_{K/\mathbb{F}_q})=0 \Longrightarrow$ il existe un relèvement π-adique plat-$\mathcal{O}_{E}$. $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O} = K$

$\mathcal{H}^{-1}(\mathbb{L}_{K/\mathbb{F}_q})=0 \Rightarrow$ deux tels relèvements sont iso.

$\mathcal{O}$ = anneau de Cohen.

Mais si $\Omega^1_{K/\mathbb{F}_q} \neq 0$ iso. non unique

Ici F parfait $\Rightarrow \Omega^1_{F/\mathbb{F}_q} = 0$

$\Rightarrow$ relèvement unique à iso. unique près.

2 Cas : $* \; E = \mathbb{F}_q((\pi)) \Rightarrow [-]$ est additif i.e. $F \hookrightarrow \mathcal{E}$

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = F[[\pi]]$$
$$\mathcal{E} = F((\pi))$$

$* \; E | \mathbb{Q}_p \qquad \mathcal{O}_{\mathcal{E}} = W_{\mathcal{O}_E}(F) = W(F) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E \qquad E|E_0 = W(\mathbb{F}_q)_{\mathbb{Q}}$

extension max. N.R.

$$\sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n + \sum_{n \geq 0} [y_n]\pi^n = \sum_{n\geq 0} [P_n(x_0,\dots,x_n, y_0,\dots,y_n)]\pi^n$$

$$P_n \in \mathbb{F}_q[X_0^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty}, Y_0^{1/p^\infty}, \dots, Y_n^{1/p^\infty}]$$

Idem pour la multiplication.

Ex : $E = \mathbb{Q}_p$. $\quad P_0 = X_0 + Y_0$

$$P_1 = X_1 + Y_1 + S(X_0^{1/p}, Y_0^{1/p}) \qquad S(X,Y) = \frac{(X+Y)^p - X^p - Y^p}{p}$$

L'anneau B^b :

Déf. $B^b = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in \mathcal{E} \;/\; \sup_n |x_n| < +\infty \right\}$ (la topologie de F intervient)

$$\cup$$

$$\mathbb{A} = \left\{ \sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n \in \mathcal{E} \;/\; x_n \in \mathcal{O}_F \right\}$$

A_{inf} " notation classique.

Ex : * $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ mais on retrouve B^b du cours précédent en faisant $z = \pi$.

* $A = \begin{cases} \mathcal{O}_F[\![\pi]\!] \\ W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \end{cases}$

On a $\boxed{B^b = A\left[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\varpi_F]}\right]}$ $\quad 0 < |\varpi_F| < 1$

Normes de Gauss : Def. $\rho \in]0,1[$, $\rho = q^{-r}$, $r \in [0,+\infty[$

$x = \sum_n [x_n] \pi^n \in B^b$

$$\left[\begin{array}{l} |x|_\rho := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| \rho^n \\ \quad \| \\ q^{-v_r(x)} \quad \text{où } v_r(x) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} \{ v(x_n) + n r \} \end{array}\right]$$

Rem : * Lorsque $\rho \neq 1$ la borne sup précédente est toujours atteinte pas le cas pour $|\cdot|_1$

* $\lim_{\substack{\rho \to 1 \\ <}} |x|_\rho = |x|_1$.

* $\lim_{r \to +\infty} \frac{v_r(x)}{r} = v_\pi(x) = \mathrm{ord}_\pi(x)$

Déf: $|\cdot|_0 = q^{-v_\pi}$

Prop: $\forall \rho \in [0,1]$, $|\cdot|_\rho$ = norme multiplicative sur B^b
i.e. $\forall r \in [0,+\infty[$, v_r est une valuation.

dém: $* \ |x_1| = \lim_{\substack{\rho \to 1 \\ <}} |x|_\rho \Rightarrow$ il suffit de traiter le cas $\rho \in]0,1[$

$* \ |\pi^b [\varpi_F^l] x|_\rho = \rho^b |\varpi_F|^l \cdot |x|_\rho$ et $B^b = A\left[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\varpi_F]}\right]$

$\Longrightarrow$ il suffit de tout montrer pour la restriction de $|\cdot|_\rho$ à A.

Lemme: Pour $x = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n \in A$ et $b \in \mathbb{N}$ notons

$$N_b(x) = \sup_{0 \leq i \leq b} |x_i|.$$

(1) $\forall b$, N_b ne dépend pas du choix de π

(2) $|x|_\rho = \sup_{b \geq 0} N_b(x) \rho^b$

(3) $N_b(x+y) \leq \sup\{N_b(x) + N_b(y)\}$

(4) $N_b(xy) \leq \sup_{i+j=b} N_i(x) N_j(y)$

Preuve: (1) Si $a \in \mathcal{O}_F$, $N_b(x) \leq |a| \Longleftrightarrow x \in \underbrace{A[a] + \pi^{b+1} A}_{\text{idéal indépendant du choix de } \pi}$.

(2) $\sup_{h\geq 0} N_h(x)\rho^h = \sup_{h\geq 0}\sup_{0\leq i\leq h} |x_i|\rho^h$

$= \sup_{i\geq 0} \underbrace{\sup_{h\geq i} |x_i|\rho^h}_{|x_i|\rho^i \text{ car } \rho\in[0,1]}$

$= |x|_\rho$

(3) $N_h(x)=|a|$ $\quad a, b\in O_F$ $\quad x\in([a], \pi^{h+1})$ $\quad$ (idéaux de A)

$N_h(y)=|b|$ $\quad y\in([b], \pi^{h+1})$

$\Rightarrow x+y\in([a],[b],\pi^{h+1})\subset([c],\pi^{h+1})$

si $|c|=\sup\{|a|,|b|\}$

$\Rightarrow N_h(x+y)\leq\sup\{N_h(x), N_h(y)\}$.

(4) $\left(\sum_{i\geq 0}[x_i]\pi^i\right)\left(\sum_{j\geq 0}[y_j]\pi^j\right)\equiv\sum_{i+j\leq h}[x_iy_j]\pi^{i+j} \mod \pi^{h+1}$

Si $\sum_{i+j\leq h} O_F x_iy_j = O_F a$ alors $\in([a],\pi^{h+1})$

$|a| = \sup_{i+j=h} N_i(x)N_j(y)$.

* Le lemme $\Rightarrow |\cdot|_\rho$ norme sous-mult. indépendante de π.

Reste à montrer la multiplicativité.

$$x = \sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n \qquad n_0 = \inf\{n \,/\, |x_n|\rho^n = |x|_\rho\}$$

$$y = \sum_{m\geq 0} [y_m]\pi^m \qquad m_0 = \inf\{m \,/\, |x_m|\rho^m = |y|_\rho\}$$

Posons $\|\;\| = N_{n_0+m_0}(\cdot)\rho^{n_0+m_0}$ = semi-norme sur $\mathbb{A}$..

$\|\cdot\| \leq |\;|_\rho$.

$$x = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} [x_n]\pi^n}_{x'} + [x_{n_0}]\pi^{n_0} + \underbrace{\sum_{n>n_0} [x_n]\pi^n}_{x''} \quad , \ |x'|_\rho < |x|_\rho$$

$$y = y' + [y_{m_0}]\pi^{m_0} + y'' \quad , \ |y'|_\rho < |y|_\rho$$

$$xy \equiv x'y + y'x + [x_{n_0}y_{m_0}]\pi^{n_0+m_0} \bmod \pi^{n_0+m_0+1}$$

$$\|x'y+y'x\| \leq |x'y+y'x|_\rho \leq \sup\{|x'|_\rho|y|_\rho, |y'|_\rho|x|_\rho\} < |x|_\rho |y|_\rho.$$

$$\|[x_{n_0}y_{m_0}]\pi^{n_0+m_0}\| = |x|_\rho |y|_\rho$$

$$\Rightarrow \|xy\| = |x|_\rho|y|_\rho \Rightarrow |xy|_\rho \geq |x|_\rho |y|_\rho \qquad \square$$

<u>Rem</u>: $*$ Si $\rho\in[0,1[$, $|\;|_{\rho|E}$ = l'unique v.a. définissant la topologie de E telle que $|\pi|_\rho = \rho$.

$*$ Si $\rho = 1$, $|\cdot|_{1|E}$ = valeur absolue triviale - Topologie induite = topologie discrète.

Def: $I \subset [0,1]$ intervalle. B_I = Complété de B / $(|.|_\rho)_{\rho \in I}$.

$$B := B_{]0,1[}$$

Ex: * $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ $\quad I \subset]0,1[\Rightarrow B_I = \mathcal{O}(\underbrace{\mathbb{D}_{F,I}})$

Couronne rigide analytique de la variable π sur F ($\pi = \gamma$)

mais B_I est vue comme $\underline{E\text{-algèbre}}$ et non une F-algèbre.

- $B_{\{0\}}$ = Complété de B^b pour $v_\pi = \mathcal{E}$

- $B_{\{1\}} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \pi^n \,/\, \lim_{n \to -\infty} x_n = 0 \text{ et } \sup_n |x_n| < +\infty \right\}$

  ↳ pas d'interprétation géométrique

- si $I \neq \{0\}, \{1\}$ $\quad B_I = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{F, I \setminus \{0,1\}}) \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ méromorphe en } 0 \text{ si } 0 \in I \\ \|f\|_1 < +\infty \text{ si } 1 \in I \end{array} \right\}$

~~Cas I compact~~

* $B_I = \begin{cases} E\text{-algèbre de Fréchet si } 1 \notin I \\ E^{\text{dag}}\text{-algèbre de Fréchet si } 1 \in I \end{cases}$

Cas I Compact

* $I = [\rho_1, \rho_2] \subset]0,1]$, $x \in B^b$, $r \longmapsto v_r(x)$ Concave

$\Longrightarrow$ atteint sa borne inf aux extrémités de l'intervalle $-\log_q I$

$\Longrightarrow \forall \rho \in I, \quad |\cdot|_\rho \leq \sup\{|\cdot|_{\rho_1}, |\cdot|_{\rho_2}\}$

$$\Longrightarrow B_I = \begin{cases} E\text{-alg. de Banach si } 1 \notin I \\ E^{disc}\text{-alg. de Banach si } 1 \in I. \end{cases}$$

* Si $I = [0, \rho]$ on vérifie que si $0 < \rho' \leq \rho$ et $x \in B^b$

alors $|x|_0 \leq 1 \Longrightarrow |x|_{\rho'} \leq |x|_\rho$

$\Longrightarrow$ la topologie de B_I est définie par $\sup\{|\cdot|_0, |\cdot|_\rho\}$

$\Longrightarrow B_I =$ Banach.

* En général, $B_I = \varprojlim\limits_{\substack{J \subset I \\ \text{Compact}}} B_J = \varprojlim$ alg. de Banach.

Topologie induite sur $\mathbb{A}$: $\mathbb{A} = \{x \in B^b \mid \sup\limits_{\rho \in [0,1]} |x|_\rho \leq 1\}$

Def: Topologie faible de $\mathbb{A}$ = topologie produit via

$$\mathcal{O}_F^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}$$
$$(x_n)_{n\geq 0} \longmapsto \sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n$$

= topologie de la C.V. simple des coeff. de Teichmüller

= topologie $([\varpi_F], \pi)$-adique

= Complet.

$\forall \rho \in]0,1[$, topologie induite par $| \ |_\rho$ sur $\mathbb{A}$ = topologie faible

$\rho = 0 \to$ top. π-adique

$\rho = 1 \to$ top. $[\varpi_F]$-adique

$\Rightarrow \forall I \subset [0,1]$

$\mathbb{A} \subset B_I$ fermé.

[**Ex**: $\mathbb{A}$ complet $\Rightarrow B_{[0,1]} = B^b$ et $B^\circ_{[0,1]} = \mathbb{A}$.]

Rem: * Si $E|\mathbb{Q}_p$ pas de bonne notion de fonction holomorphe de la variable π pour des rayons ≥ 1 :

$\{\sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n \mid \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$ n'est pas stable par l'addition.

Car $\{\sum_{n\geq 0} \underset{\mathbb{F}_q}{\underset{\cap}{[x_n]}}\pi^n \in E \mid x_n = 0 \text{ pour } n \gg 0\}$ pas stable par l'addition

* Si $E|\mathbb{Q}_p$ la topologie induite par $| \ |_1$ sur $\mathbb{A}$ n'est pas la topologie de la C.V. uniforme des coeff. de Teichmüller : $\forall \varepsilon \in \mathfrak{m}_F$, $\left|[1+\varepsilon]-1\right|_1 = 1$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \big| [1+\varepsilon] - 1 \big|_1 \neq \big| [1] - 1 \big|_1 = 0.$$

$[-] : \mathcal{O}_F \to A$ pas $\mathcal{C}^0$ pour $|\cdot|_1$

alors que c'est clairement le cas si $E = \mathbb{F}_q((\pi))$.

Polygones de Newton

Pb : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie $\forall \rho \in]0,1[\quad \lim_{|n|\to+\infty} |x_n| \rho^n = 0$

alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} [x_n] \pi^n$ C.V. dans B. Mais si $E|\mathbb{Q}_p$:

* On ne sait pas si tout élément de B possède un tel développement "en série de Laurent" de cette forme là
* Pour ces éléments on ne sait pas si une telle écriture est unique (quasi-sûr faux)
* On ne sait pas si le produit ou la somme de deux tels éléments est de cette forme là.

Solution : transformée de Legendre inverse

Prop : $x \in B$ non nul. $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, $x_n \in B^b$.

Alors, $\forall K$ compact de $]0,+\infty[$ $\exists N$, $n \geq N \Rightarrow \forall r \in K$, $v_r(x) = v_r(x_n)$.

→ Démi : $\varphi_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ suite de fonctions concaves qui converge simplement vers φ. Alors, la C.V. est uniforme sur tout compact de $]0,+\infty[$.

Corollaire : $\forall x \in B$ non nul, $\forall K$ compact de $]0,+\infty[$ il existe $y \in B^b$ tel que $\forall r \in K$, $v_r(x) = v_r(y)$

$\Rightarrow$ la fonction concave $\begin{cases}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ r \longmapsto v_r(x) \end{cases}$ est un polygone concave à pentes entières.

Def : Pour $x \in B$ on note $Newt(x)$ la transformée de Legendre inverse de $r \mapsto v_r(x)$

= polygone à abscisses de rupture entières (décroissant)

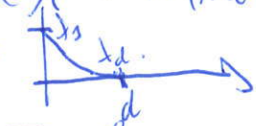
Prop : $Newt(xy) = Newt(x) * Newt(y)$

→ Conséquence de $v_r(xy) = v_r(x) + v_r(y)$

$\Rightarrow$ pentes de $Newt(xy)$ obtenues par concaténation des pentes de $Newt(x)$ et $Newt(y)$.

Rem: Bien sûr si $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in B^b$

$\mathrm{Newt}(x) =$ enveloppe convexe de $\{(n, v(x_n))\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Ex: $\mathrm{Newt}([\ldots](\pi-[a_1])\cdots(\pi-[a_d])) =$  $\lambda_1 = v(a_1) \geq \dots \geq v(a_d) > 0$

Polygone de Newton des éléments de B_I, I quelconque

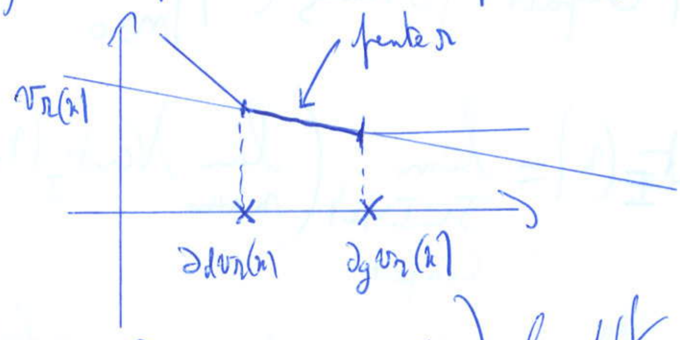
↳ dur à vérifier sans transformée de Legendre

Problème: $I \subset [0,1]$ intervalle, $x \in B_I$ non nul.

On aimerait définir $\mathrm{Newt}_I(x)$ = polygone dont les pentes $\in -\log_q(I\setminus\{0\}) \subset [0,+\infty[$

de telle manière que si $x \in B^b$, $\mathrm{Newt}_I(x) = \mathrm{Newt}(x) \setminus \{\text{pentes } \lambda \text{ t.q. } q^{-\lambda} \notin I\}$.

Si $I = \{q^{-r}\}$ et $x \in B^b$, $v_r(x)$ ne détermine pas complètement $\mathrm{Newt}_I(x)$



Solution: Mais $(v_r(x), \partial_g v_r(x), \partial_d v_r(x))$ le détermine complètement.

Les valuations de rang 2 $\quad x \mapsto \begin{cases} (v_r(x), \partial_d v_r(x)) \\ (v_r(x), -\partial_g v_r(x)) \end{cases}$ éléments des spécialisations de v_r elles se prolongent à B_I lorsque $q^{-r} \in I$.

$\Rightarrow \forall x \in B_I \setminus \{0\}$, $q^{-r} \in I$ on peut définir $\partial_g v_r(x), \partial_d v_r(x) \in \mathbb{Z}$ si $r \neq 0$.
$\in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ si $r=0$.

Prop: $x \in B_I$, $x \neq 0$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, $x_n \in B^b$. Alors, $\forall K$ compact de $-\log_q(I \setminus \{0\}) \subset [0,+\infty[$.

il existe N tq. $\forall n \geq N$,

$$q^{-r} \in I \Rightarrow \begin{cases} v_r(x_n) = v_r(x) \\ \partial_d v_r(x_n) = \partial_d v_r(x) \\ \partial_g v_r(x_n) = \partial_g v_r(x) \quad \text{si } r \neq 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall J \subset I \setminus \{0\}$ compact $\left(\mathrm{Newt}_J(x_n)\right)_{n \geq 0}$ est constant pour $n >> 0$.

On pose alors $\mathrm{Newt}_I(x) = \lim\limits_{\substack{J \subset I \setminus \{0\} \\ \text{compact}}} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{Newt}_J(x_n) \right)$

ne dépend pas du choix de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de B^b tendant vers x.

* On a encore $\mathrm{Newt}_I(xy) =$ Concaténé de $\mathrm{Newt}_I(x)$ et $\mathrm{Newt}_I(y)$.