Le théorème de classification des fibrés

F alg. clos $\qquad E_h|E$ N.R. de degré h

$X := X_{F,E}$ $\qquad X_h = X_{F,E_h} = \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{d\geq 0} B_{F,E}^{\varphi_E^h = \pi^d}\Big) = X \otimes_E E_h$, où $\varphi_E^h = \varphi_{E_h}$

$$\begin{array}{c} X_h \\ \downarrow {\scriptstyle \pi_h} \\ X = X_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c} (X_h)_{h\geq 1} \\ \downarrow \\ X \end{array}\right)^{\widehat{\mathbb{Z}}}$$

* On note pour $d \in \mathbb{Z}$ $\qquad \mathcal{O}_{X_h}(d) = \widetilde{P_{F,E_h,\pi}[d]}$

$$\mathrm{Pic}(X_h) = \mathcal{O}_{X_h}(1)^{\otimes \mathbb{Z}}$$

Pour $\lambda = \frac{d}{h}$, $(d,h) = 1$ on note $\underbrace{\mathcal{O}_X(\lambda)}_{\text{semi-stable de pente } \lambda} = \pi_{h*}\mathcal{O}_{X_h}(d)$

Rappel: $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(\lambda), \mathcal{O}(\mu)) = 0$ si $\lambda > \mu$

$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(\lambda), \mathcal{O}(\mu)) = 0$ si $\lambda \leq \mu$

$$\mathcal{O}(\lambda)\otimes\mathcal{O}(\mu) = \bigoplus_{\text{finie}} \mathcal{O}(\lambda+\mu)$$

$$\mathcal{O}(\lambda)^{\vee} = \mathcal{O}(-\lambda).$$

But : [**Th :** $\forall \lambda \in \mathbb{Q}$ un fibré est semi-stable de pente λ ssi il est isomorphe à une somme directe de $\mathcal{O}_X(\lambda)$.]

Torsion d'un fibré équivariant par un cocycle

Prop. Y schéma et G un groupe agissant sur Y.

Soit $(\mathcal{E}, (c_\tau)_{\tau\in G})$ un fibré G-équivariant sur Y où

$$\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_Y \quad \text{et} \quad c_\tau : \tau^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}.$$

Pour $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ et $\tau \in G$ posons $f^\tau = c_\tau \circ \tau^* f \circ c_\tau^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$. Alors :

(1) Cela définit une action de G sur $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ par automorphismes

(2) L'ensemble des structures de fibré G-équivariant sur $\mathcal{E}$ est en bijection avec $Z^1(G, \mathrm{Aut}\,\mathcal{E})$

(3) Deux telles structures donnent naissance à des fibrés G-équivariants isomorphes ssi les cocycles associés diffèrent d'un cobord.

(4) Les classes d'iso. de fibrés G-équivariants dont le fibré sous-jacent est isomorphe à $\mathcal{E}$ est en bijection avec
$$H^1(G, \operatorname{Aut} \mathcal{E}).$$

Descente du théorème de classification via le revêtement π_h

Def. : $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X$ est pur si $\exists n, \lambda$ tq. $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^n$. But : pur $\Leftrightarrow$ s.s.

Prop. : Pour $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X$ et $h \geq 1$

(1) $\mathcal{E}$ est s.s. de pente $\lambda \Leftrightarrow \pi_h^* \mathcal{E}$ est s.s. de pente $h\lambda$

(2) $\mathcal{E}$ est pur $\Leftrightarrow \pi_h^* \mathcal{E}$ est pur.

dem : * Le point (1) a déjà été vu

* Pour le point (2). $\pi_h^* \mathcal{O}_X(\lambda) \simeq \mathcal{O}_{X_h}(h\lambda)^n$ pour un $n \geq 1$.

donc $\mathcal{E}$ pur $\Rightarrow \pi_h^* \mathcal{E}$ pur.

Réciproquement : si $\pi_h^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{X_h}(\lambda)^n$, quitte à remplacer h par $h'h$ avec $h'\lambda \in \mathbb{Z}$ on peut supposer que $\lambda \in \mathbb{Z}$ i.e.

$$\pi_h^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{X_h}(d)^n, \quad d \in \mathbb{Z}.$$

On a alors
$$\left.\begin{array}{l} \deg(\pi_h^* \mathcal{E}) = nd \\ \quad \| \\ h \deg \mathcal{E} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{h \mid nd}$$

Si $\delta = \mathrm{pgcd}(d,h)$ on a $\pi_h^* \underbrace{\mathcal{O}_X\left(\frac{d}{h}\right)}_{\mathcal{O}_X\left(\frac{d/\delta}{h/\delta}\right)} = \mathcal{O}_{X_h}(d)^{\frac{h}{\delta}}$

$$\underbrace{\mathcal{O}_X\left(\frac{d/\delta}{h/\delta}\right)}_{\text{rang } \frac{h}{\delta}.}$$

$$\cancel{h \mid nd \Rightarrow \frac{h}{\delta} \mid \frac{n}{\delta} d \Rightarrow \frac{h}{\delta} \mid \ldots}$$

$$h \mid nd \Rightarrow \frac{h}{\delta} \mid n \frac{d}{\delta} \Rightarrow \frac{h}{\delta} \mid n \Rightarrow \boxed{\frac{n\delta}{h} \in \mathbb{N}}$$

et alors $\boxed{\mathcal{O}_{X_h}(d)^n \simeq \pi_h^* \mathcal{O}_X\left(\frac{d}{h}\right)^{\frac{n\delta}{h}}}$

Via cet isomorphisme, $\mathcal{O}_{X_h}(d)^n$ est muni d'une structure de fibré $\mathrm{Gal}(E_h|E)$-équivariant et $\mathrm{Aut}\left(\mathcal{O}_{X_h}(d)^n\right) = GL_n(E_h)$ ↺ $\mathrm{Gal}(E_h|E)$

action donnée par la structure de fibré équivariant = action usuelle standard.

D'après Hilbert 90 $H^1\left(\mathrm{Gal}(E_h|E), GL_n(E_h)\right) = \{1\}$

Donc, $\pi_h^* \mathcal{E} \simeq \pi_h^* \mathcal{O}_X\left(\frac{d}{h}\right)^{\frac{n\delta}{h}} \Longrightarrow \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X\left(\frac{d}{h}\right)^{\frac{n\delta}{h}}$ $\square$

↑ fibrés sur X ≃ fibrés $\mathrm{Gal}(E_h|E)$-éq. sur X_h

Th: Le théorème de classification sur X_h pour tout $h \geq 1$ est équivalent à l'énoncé suivant :

Pour $h \geq 1$ et $n \geq 1$, si $0 \to \mathcal{O}_{X_h}\left(-\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \underbrace{\mathcal{E}}_{\substack{\text{rang } n+1 \\ \text{degré } 0}} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}(1) \to 0$ est exacte

on a $H^0(X_h, \mathcal{E}) \neq 0$.

dem : * Si le théorème est vérifié, soit $\mathcal{E}$ comme dans l'énoncé,

$$\mathcal{E} \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}_{X_h}(\lambda_i)$$ Puisque $\deg \mathcal{E} \geq 0$, $\exists i$ $\lambda_i \geq 0$

Alors $H^0(X_h, \mathcal{O}_{X_h}(\lambda_i)) \neq 0 \Rightarrow H^0(X_h, \mathcal{E}) \neq 0$.

* Réciproquement :

On montre par récurrence sur $rg\, \mathcal{E}$: $\mathcal{E}$ semi-stable $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ pur.

Le cas $rg\, \mathcal{E} = 1$ est immédiat d'après le calcul du Pic.

Quitte à remplacer E par E_h, on suppose que $\mathcal{E}$ est un fibré semi-stable de pente λ et rang $n+1$ sur X.

Soit $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tel que $h\lambda \in \mathbb{Z}$.

Puisque $\mathcal{E}$ s.s. de pente $\lambda \Leftrightarrow \pi_h^* \mathcal{E}$ s.s. de pente $h\lambda$

$\mathcal{E}$ pur $\Leftrightarrow \pi_h^* \mathcal{E}$ pur

quitte à remplacer $\underbrace{E \text{ par } E_h}_{\text{i.e. } X \text{ par } X_h}$ et $\mathcal{E}$ par $\pi_h^* \mathcal{E}$ on peut supposer

que $\boxed{\mu(\mathcal{E}) \in \mathbb{Z}.}$

On vérifie de plus que pour $d \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{E} \text{ s.s. de pente } \lambda \Leftrightarrow \mathcal{E}(d) \text{ s.s. de pente } \lambda + d$$

$$\mathcal{E} \text{ pur} \Leftrightarrow \mathcal{E}(d) \text{ pur}$$

$\mathcal{O}_X(\lambda) \otimes \mathcal{O}_X(d) = \mathcal{O}_X(\lambda + d)$

On peut donc supposer, quitte à tordre $\mathcal{E}$ que

$\boxed{\mu(\mathcal{E}) = 0.}$

* Il suffit alors de montrer que $H^0(X, \mathcal{E}) \neq 0$.

En effet, si c'est le cas $\exists u : \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$ non nul.

$\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{E}$ s.s. de pente 0 + $\mathrm{Fib}_X^{ss, 0}$ cat. abélienne

$\Rightarrow u : \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{E}$ loc. facteur direct et $\mathcal{E}/u(\mathcal{O}_X)$ s.s. de pente 0 (4)

Hypothèse de récurrence $\Rightarrow$ $\mathcal{E}/u(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X^n$

$$+ \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)^n = 0 \Rightarrow \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^{n+1} \quad \square$$

* Montrons donc que $H^0(X, \mathcal{E}) \neq 0$. $\quad rg\, \mathcal{E} = n+1$.

Soit $\mathcal{L} \subset \pi_n^* \mathcal{E}$ un sous-fibré en droites de degré maximal.

$$\begin{array}{c} X_n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\ X \end{array} \qquad \deg(\mathcal{L}) = d \ , \ \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{X_n}(d).$$

Puisque $\pi_n^* \mathcal{E}$ est s.s. de pente 0, $\boxed{d \leq 0.}$

* Si $\boxed{d = 0}$, $\mathcal{O}_{X_n} \subset \pi_n^* \mathcal{E}$ et par le raisonnement précédent

$$\pi_n^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{X_n}^{n+1} \Rightarrow \pi_n^* \mathcal{E} \text{ pur} \Rightarrow \mathcal{E} \text{ pur} \simeq \mathcal{O}_X^{n+1}.$$

* Si $\boxed{d \leq -2}$. Par hypothèse de récurrence

$$\underbrace{\pi_n^* \mathcal{E}}_{\text{degré } 0} / \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{degré} \leq 0} \simeq \underbrace{\bigoplus_i \mathcal{O}_{X_n}(\lambda_i)}_{\text{degré} \geq 0} \Rightarrow \exists i, \lambda_i \geq 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} d+2 \leq 0 \\ \lambda_i \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \text{ morphisme non nul } \mathcal{O}_{X_n}(d+2) \to \mathcal{O}_{X_n}(\lambda_i)$$

$\Rightarrow$ $\exists$ morphisme non nul

monomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathcal{L} & \to & \overbrace{\mathcal{E}'}^{\text{rang } 2} & \to & \mathcal{O}_{X_n}(d+2) & \to 0 \\ & \| & & \downarrow & & \downarrow \neq 0 & \\ 0 \to & \mathcal{L} & \to & \pi_n^* \mathcal{E} & \to & \pi_n^* \mathcal{E}/\mathcal{L} & \to 0 \end{array}$$

en appliquant $\_ \otimes \mathcal{O}_X(-d-1)$ $\rightsquigarrow$ $0 \to \underset{\mathcal{O}_{X_n}(-1)}{\overset{\|}{\mathcal{L}(-d-1)}} \to \mathcal{E}'(-d-1) \to \mathcal{O}_{X_n}(1) \to 0$

$\Rightarrow$ $H^0(X_n, \mathcal{E}'(-d-1)) \neq 0$

hypothèse du théorème "pour $n=1$" (pas le $\bar{m}$ n qu'ici)

$\Rightarrow$ $\exists$ morphisme non nul $\mathcal{O}_{X_n}(d+1) \to \mathcal{E}'$

Par composition avec $\mathcal{E}' \to \pi_n^* \mathcal{E}$ on en déduit un morphisme

non nul $\quad \mathcal{O}_{X_n}(d+1) \xrightarrow{\quad v \quad} \pi_n^* \mathcal{E}$

et alors $\widetilde{\mathrm{Im}(v)} \subset \pi_n^* \mathcal{E}$ est un sous-fibré de degré $\geq d+1$

en droites

saturé de l'image de v

comme morphisme de $\mathcal{O}_X$-mod.

Impossible par ~~minimalité~~ maximalité de $d = \deg \mathcal{L}$.

* Le cas $\boxed{d=-1}$ $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{X_n}(-1) \subset \pi_n^* \mathcal{E}$

π_n étale fini $\Rightarrow \pi_n^! = \pi_n^*$ et $\pi_{n!} = \pi_{n*}$ et donc

$$\mathrm{Hom}\left(\mathcal{O}_{X_n}(-1), \pi_n^*\mathcal{E}\right) \simeq \mathrm{Hom}\Big(\underbrace{\pi_{n*}\mathcal{O}_{X_n}(-1)}_{\mathcal{O}_X\left(-\frac{1}{n}\right)}, \mathcal{E}\Big)$$

$$\Rightarrow \exists u : \mathcal{O}_X\left(-\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \mathcal{E}, \quad u \neq 0$$

$$\mathrm{Im}\, u = \mathcal{O}_X\left(-\frac{1}{n}\right) / \ker u \quad + \quad \mathcal{O}_X\left(-\frac{1}{n}\right) \text{ semi-stable}$$

$$\Rightarrow \quad \mu(\mathrm{Im}\, u) \geq -\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \mu\left(\widetilde{\mathrm{Im}\, u}\right) \geq -\frac{1}{n}$$

saturé de $\mathrm{Im}\, u$.

De plus, $\widetilde{\mathrm{Im}\, u} \subset \mathcal{E}$ s.s. de pente $0 \Rightarrow \mu\left(\widetilde{\mathrm{Im}\, u}\right) \leq 0$.

$$-\frac{1}{n} \leq \mu\left(\widetilde{\mathrm{Im}\,u}\right) \leq 0$$

Or, $\mu\left(\widetilde{\mathrm{Im}\,u}\right) = \frac{d}{h}$ avec $1 \leq h \leq n$ car $rg\left(\widetilde{\mathrm{Im}\,u}\right) \leq rg\left(\mathcal{O}_X\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = n$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{n} \leq \frac{d}{h} \leq 0 \\ 1 \leq h \leq n \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\mu\left(\widetilde{\mathrm{Im}\,u}\right) = 0 \text{ ou } -\frac{1}{n}}$$

* Si $\widetilde{\mathrm{Im}\,u}$ vérifie $\mu\left(\widetilde{\mathrm{Im}\,u}\right) = 0 \Rightarrow \widetilde{\mathrm{Im}\,u}$ s.s. de pente 0

car $\widetilde{\mathrm{Im}\,u} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est s.s. de pente 0

$$\Longrightarrow H^0\left(X, \widetilde{\mathrm{Im}\,u}\right) \neq 0 \Rightarrow H^0(X, \mathcal{E}) \neq 0$$

[hypothèse de récurrence, $rg\left(\widetilde{\mathrm{Im}\,u}\right) \leq n$

* Si $\mu\left(\widetilde{\mathrm{Im}\,u}\right) = -\frac{1}{n}$ alors $rg\left(\widetilde{\mathrm{Im}\,u}\right) = n$

$u : \mathcal{O}_X\left(-\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Im}\,u}$ est un isomorphisme car iso. en fibre générique + $\widehat{m}$ pentes

$$\Rightarrow 0 \to \mathcal{O}_X\left(-\frac{1}{n}\right) \to \mathcal{E} \to \underbrace{\mathcal{H}}_{} \to 0$$

fibré en droites de degré $1 \Rightarrow \mathcal{H} \simeq \mathcal{O}_X(1)$

$$\Longrightarrow \quad H^0(X, \mathcal{E}) \neq 0 \qquad \square$$

↑ hypothèse du théorème

Th: Le théorème de classification des fibrés est équivalent à (pour tout E)

(1) Si $0 \to \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right) \to \underbrace{\mathcal{F}}_{} \to 0$

Cohérent de torsion de degré 1

(i.e. $\simeq i_{x*} k(x)$, $x \in |X|$)

est une modification de degré 1 de $\mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right)$, on a

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^n$$

(2) Si $0 \to \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{F}}_{} \longrightarrow 0$

Cohérent de degré 1

est une modification de degré -1 de $\mathcal{O}_X^n$, on a

$\exists h \in \{1, \dots, n\}$ $\quad \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{h}\right) \oplus \mathcal{O}_X^{n-h}$.

dem: * Si le théo. de classification des fibrés est vérifié.

Soit $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right) \to \underbrace{\mathcal{F}}_{\text{torsion de degré 1.}} \to 0$

$\mathcal{E} \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}_X(\lambda_i)$. Si $\lambda_i \geq 0$, $\mathrm{Hom}\left(\mathcal{O}_X(\lambda_i), \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right)\right) \neq 0 \Rightarrow \lambda_i \leq \frac{1}{n}$.

et de plus $\mathrm{rg}(\mathcal{O}_X(\lambda_i)) \leq \mathrm{rg}\left(\mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n$

$\Rightarrow \lambda_i = 0$ ou $\frac{1}{n}$ Car si $\lambda_i = \frac{d}{h}$, $1 \leq h \leq n$, $d \geq 0$

$\frac{d}{h} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow d = 0$ ou $h = n$ et $d = 1$

Si $\exists i, \lambda_i = \frac{1}{n}$ $\quad \mathcal{O}_X(\lambda_i) \hookrightarrow \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right)$ est automatiquement un iso.

même rang et même degré

Impossible car alors $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(\lambda_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc, $\forall i$, $\lambda_i \leq 0$. Mais $\deg(\mathcal{E}) = 0 \Rightarrow \forall i, \lambda_i = 0 \Rightarrow \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^n$ □

* Si $0 \to \mathcal{O}_X^n \to \mathcal{E} \to \underbrace{\mathcal{F}}_{\text{torsion de degré 1}} \to 0$ $\quad \mathcal{E} \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}_X(\lambda_i)$

$\deg(\mathcal{E}) = 1 = \sum_i d_i$ $\quad$ si $\lambda_i = \frac{d_i}{h_i}$, $(d_i, h_i) = 1$

Si $\exists i_0$ tq. $\lambda_{i_0} < 0$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X(\lambda_{i_0})) = 0$

$\Rightarrow$ la composée

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X^n \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "0"'] & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(\lambda_i) \arrow[r, two heads] & \mathcal{O}_X(\lambda_{i_0}) \end{tikzcd}$$

est nul

$\Rightarrow \mathcal{O}_X^n \subset \bigoplus_{i \neq i_0} \mathcal{O}_X(\lambda_i)$ Impossible car $\mathrm{rg}(\mathcal{O}_X^n) = \mathrm{rg}\left(\bigoplus_i \mathcal{O}_X(\lambda_i)\right)$.

Donc $\forall i, \lambda_i \geq 0$. Alors, $\sum_i d_i = 1 \Rightarrow \exists i_0$, $\lambda_{i_0} = \frac{1}{h}$ et $\lambda_i = 0$ pour $i \neq i_0$.

$\Rightarrow \square$

* **Réciproquement:**

Cas de rang 2: $0 \to \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X(1) \to 0$

Il s'agit de montrer que $H^0(X, \mathcal{E}) \neq 0$.

$\times$ section non nulle de $\mathcal{O}_X(2)$

On choisit un morphisme non nul $\mathcal{O}_X(-1) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(1)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(-1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}_X(1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(1) \arrow[r] & \mathcal{E}' \arrow[r] & \mathcal{O}_X(1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X(1)) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}' \simeq \mathcal{O}_X(1)^2$

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X(1)^2 \to \underset{\substack{\parallel \\ \text{faisceau cohérent de torsion de longueur } 2}}{\mathcal{F}} \to 0 \qquad \left(\leftarrow \mathrm{Coker}(\mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X(1))\right)$$

Soit $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ un sous-faisceau de longueur 1

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(1)^2 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\text{donné par } u, v :\ \mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{F}/\mathcal{F}'"'] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F}/\mathcal{F}' \simeq i_{x*} k(x),\ x \in |X| \end{tikzcd}$$

* Si $u = 0$ ou bien $v = 0$ alors $\ker(\mathcal{O}_X(1)^2 \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}') \simeq \mathcal{O}_X(1) \oplus \underbrace{\ker(\mathcal{O}_X(1) \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}')}_{\simeq\, \mathcal{O}_X}$

$\simeq \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(1)$

* Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, $\ker u \simeq \mathcal{O}_X$, $\ker v \simeq \mathcal{O}_X$ et

$$0 \to \underbrace{\ker u \oplus \ker v}_{\simeq\, \mathcal{O}_X^2} \to \ker(\mathcal{O}_X(1)^2 \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}') \to \underbrace{\mathcal{G}}_{\text{cohérent de torsion de degré } 1} \to 0$$

$$\Rightarrow \ker\left(\mathcal{O}_X(1)^2 \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'\right) \simeq \begin{cases} \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(1) \\ \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

↑ hypothèse du théo.

On a maintenant une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E} \to \underbrace{\ker\left(\mathcal{O}_X(1)^2 \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'\right)}_{\mathcal{O}_X\left(\frac{1}{2}\right) \text{ ou } \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(1)} \to \mathcal{F}' \to 0$$

Si $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{2}\right) \to \mathcal{F}' \to 0 \Rightarrow \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^2 \Rightarrow H^0(X, \mathcal{E}) \neq 0.$

Si $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{F}' \to 0 \Rightarrow \underbrace{\ker\left(\mathcal{O}_X(1) \to \mathcal{F}'\right)}_{\mathcal{O}_X \text{ ou } \mathcal{O}_X(1)} \subset \mathcal{E}$

$\Rightarrow H^0(X, \mathcal{E}) \neq 0.$

<u>Cas général:</u>

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X\left(-\frac{1}{n}\right) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}_X(1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(1)^n \arrow[r] & \mathcal{E}' \arrow[r] & \mathcal{O}_X(1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\mathcal{E}' \simeq \mathcal{O}_X(1)^{n+1}$ car $\mathrm{Ext}^1\left(\mathcal{O}_X(1)^n, \mathcal{O}_X(1)\right) = 0$

$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X(1)^{n+1} \to \mathcal{F} \to 0$

$\mathcal{F}$ → cohérent torsion de degré $n+1$.

Déf: Un fibré élémentaire est un fibré $\mathcal{E}$ non nul possédant une résolution de la forme

$$0 \to \mathcal{O}_X^n \to \bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{h_i}\right) \to \mathcal{E} \to 0$$

pour des entiers $n \geq 0$, $d \geq 1$ et $h_i \geq 1$.

Prop: Soit $\mathcal{E}$ un fibré élémentaire et

$$u : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \underbrace{\mathcal{F}}_{\text{cohérent de torsion de degré } 1}$$

(1) Si $\deg \mathcal{E} = 1$, $H^0(X, \ker u) \neq 0$

(2) Si $\deg \mathcal{E} > 1$ il existe un fibré élémentaire $\mathcal{E}'$ de degré $\deg \mathcal{E} - 1$ et un monomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}' \hookrightarrow \ker u$.

$\Rightarrow$ le résultat par application à $\underbrace{\mathcal{O}_X(1)^{n+1}}_{\text{élémentaire}} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$

en considérant un drapeau $0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}$ de gradués de longueur 1.