1

Cours M2
Jussieu
Printemps 2014
Cours n°11

Périodes des groupes p-divisibles

Mise au point sur Spf et Spec

* S schéma.

$BT_S =$ groupes p-divisibles sur S / de Barsotti-Tate

$=$ faisceaux fppf de groupes abélien $/S$, $\mathcal{G}$ vérifiant :

* $\mathcal{G}$ est de p^∞-torsion i.e. $\varinjlim_n \mathcal{G}[p^n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$
* $\mathcal{G} \xrightarrow{\times p} \mathcal{G}$ est un épimorphisme
* $\forall n$, $\mathcal{G}[p^n]$ est un schéma en groupes fini localement libre $/S$

* Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel d'idéal de définition $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_\mathfrak{X}$

$$\mathfrak{X} = \varinjlim_n \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathcal{I}^n)$$ (schémas formels $\subset$ ind-schémas)

on note $BT_\mathfrak{X} := 2\text{-}\varprojlim_n BT_{\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathcal{I}^n)}$

i.e. $= \left\{ (\mathcal{G}_n, \iota_n) \,/\, \mathcal{G}_n \in BT_{\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathcal{I}^n)} \text{ et } \iota_n : \mathcal{G}_{n+1} \bmod \mathcal{I}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_n \right\}$

* On a alors le résultat d'algébrisation suivant (GAGF)

Prop: Si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ alors $BT_{\mathrm{Spec}(A)} \xrightarrow{\sim} BT_{\mathrm{Spf}(A)}$

A I-adique

$$\mathcal{G} \longmapsto \varprojlim_n \left(\mathcal{G} \otimes_A A/I^n\right)$$

→ résulte de ce que si Proj_A = A-modules projectifs de type fini alors

$$\mathrm{Proj}_A \xrightarrow{\sim} 2\text{-}\varprojlim_n \mathrm{Proj}_{A/I^n}$$

⇒ si $\mathcal{C}_A$ = A-schémas en groupes finis localement libres sur $\mathrm{Spec}(A)$ alors

$$\mathcal{C}_A \xrightarrow{\sim} 2\text{-}\varprojlim_n \mathcal{C}_{A/I^n}.$$

□

Rem: Analogue de GAGF: Grothendieck

$$\begin{array}{c} \text{Schémas abéliens principalement} \\ \text{polarisés sur } \mathrm{Spec}(A) \end{array} \xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} \text{Schémas abéliens princ.} \\ \text{polarisés sur } \mathrm{Spf}(A). \end{array}$$

Ex. : $K|\mathbb{Q}_p$ valué complet. $\mathcal{G}$ = groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K$
de fibre spéciale connexe sur k_K i.e.
$\mathcal{G}[p] \otimes k_K$ est un schéma en groupes connexe.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \mathcal{G} & \\
\swarrow & & \searrow
\end{array}
$$

$\mathcal{G}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ a pour fibre générique $\mathcal{G} \otimes K$ = groupe p-div. étale classifié par $T_p(\mathcal{G}) = \varprojlim_n \mathcal{G}[p^n](\mathcal{O}_{\overline{K}})$
$= \varprojlim_n (\mathcal{G}[p^n] \otimes K)(\overline{K})$ $\circlearrowleft$ $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$

$\mathcal{G}/\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ est un groupe formel $\simeq \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K[[x_1, \dots, x_d]])$ de fibre générique
$\mathcal{G} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}\,\mathcal{G} \otimes \hat{\mathbb{G}}_a$
donné par les logarithmes de $\mathcal{G}$.

Ex. : $\mu_{p^\infty}/\mathbb{Z}_p$ ⇝ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ il a pour fibre générique le gp. p-divisible $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$ donné par χ_{cycl} le caractère cyclotomique
⇝ $\underbrace{\text{sur } \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)}$ il a pour fibre générique $\hat{\mathbb{G}}_{m/\mathbb{Q}_p} \xrightarrow[\sim]{\log} \hat{\mathbb{G}}_{a/\mathbb{Q}_p}$.

↓

on a $\mu_{p^\infty} = \hat{\mathbb{G}}_m$ sur $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ <u>mais pas sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$</u>

Quasi-logarithmes et logarithmes

$K|\mathbb{Q}_p$ complet. $\mathcal{G}$ = groupe formel p-divisible sur $\mathcal{O}_K$.

$\mathcal{G} \simeq \mathrm{Spf}(R)$ où $R \simeq \mathcal{O}_K[[x_1,\dots,x_d]]$

R^+ = idéal d'augmentation de R donné par la section unité de $\mathcal{G}$ $\simeq (x_1,\dots,x_d)$.

Soit $\mathcal{G}\hat{\otimes} K$ la fibre générique de $\mathcal{G}$ comme groupe formel.

$$\mathcal{G}\hat{\otimes} K = \mathrm{Spf}\Big(\underbrace{\widehat{R[\tfrac{1}{p}]}}\Big)$$

complétion relativement à $R^+[\frac{1}{p}]$

$$\widehat{R[\tfrac{1}{p}]} \simeq K[[x_1,\dots,x_d]]$$

Il y a alors un isomorphisme $\boxed{\mathcal{G}\hat{\otimes} K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(\mathcal{G})[\tfrac{1}{p}] \otimes_K \widehat{\mathbb{G}}_a}$

donné par les logarithmes de $\mathcal{G}$. Plus précisément :

Si $\omega_{\mathcal{G}}$ = formes différentielles invariantes par translations sur $\mathcal{G}$

$$= \left\{ \alpha \in \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K} \;/\; m^*\alpha = pr_1^*\alpha + pr_2^*\alpha \right\}$$

où $m : \mathcal{G}\times\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ est la loi de groupe formel et $\mathcal{G}\times\mathcal{G} \overset{pr_1}{\underset{pr_2}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}$ sont les deux projections.

$$\hat{\Omega}^1_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}/\mathcal{O}_K} = pr_1^* \hat{\Omega}^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K} \oplus pr_2^* \hat{\Omega}^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}.$$

$$\omega_{\mathcal{G}} = \left\{ \alpha \in \underset{\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{O}_K[[x_1,\dots,x_d]].dx_i}{\underset{\shortparallel}{\hat{\Omega}^1_{R/\mathcal{O}_K}}} \;\middle|\; \Delta_* \alpha = \alpha\otimes 1 + 1 \otimes \alpha \right\}$$

, $\Delta : R \to R\hat{\otimes}R$ est la comultiplication

Alors $\underset{\displaystyle \mathcal{O}_K\text{-module libre de rang } d.}{\underset{\shortparallel}{\omega_{\mathcal{G}}}} \xrightarrow{\sim} e^*\hat{\Omega}^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K} = R^+/(R^+)^2 \simeq \mathcal{O}_K^d$.

évaluation sur l'espace tangent en 0.

$e =$ section neutre de $\mathcal{G}$.

lemme de Poincaré dans $K[[x_1,\dots,x_d]]$ (car. 0)

Alors, $\forall \alpha \in \omega_{\mathcal{G}}$ on a $d\alpha = 0 \Longrightarrow \exists !\ \log_\alpha \in \widehat{R[\frac{1}{p}]}$

vérifiant $\begin{cases} d(\log_\alpha) = \alpha \\ \log_\alpha \text{ s'annule à l'origine i.e. } \log_\alpha \in \widehat{R[\frac{1}{p}]}^+ = (x_1,\dots,x_d) \end{cases}$

" $\log_\alpha = \displaystyle\int_{(0,\dots,0)}^{(x_1,\dots,x_d)} \alpha$ "

α invariante par translations

$$\Downarrow$$

$\log_\alpha : \mathcal{G}\hat{\otimes} K \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}}_a$ est l'unique morphisme de groupes formels vérifiant $\boxed{\log_\alpha^{*} dT = \alpha}$.

$$\Omega^1_{\widehat{\mathbb{G}}_a/\mathcal{O}_K} = \mathcal{O}_K[[T]]\cdot dT, \quad \widehat{\mathbb{G}}_a = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K[[T]]).$$

$$\omega_{\widehat{\mathbb{G}}_a/\mathcal{O}_K} = \mathcal{O}_K\cdot dT$$

Si $\mathrm{Lie}\,\mathcal{G} = \omega_{\mathcal{G}}^{*}$ cela définit un isomorphisme

$$\boxed{\mathcal{G}\hat{\otimes} K \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}[\tfrac{1}{p}]\otimes\widehat{\mathbb{G}}_a}$$

Quasi-logarithmes :

Def. $\mathrm{QLog}(\mathcal{G}) = \Big\{ f \in \underbrace{\widehat{R[\tfrac{1}{p}]}}_{\simeq K[[x_1,\dots,x_d]]} \ \Big/\ f \in \widehat{R[\tfrac{1}{p}]}^{+} \text{ et } \Delta f - f\otimes 1 - 1\otimes f \in \cancel{R[\tfrac{1}{p}]} \Big\}$

$\cancel{(\mathcal{O}_K[[x_1,\dots]]\dots)[\tfrac{1}{p}]}$

$R\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} R[\tfrac{1}{p}]$

$\wr\wr$

$(\mathcal{O}_K[[x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_d]])[\tfrac{1}{p}]$

$$= \Big\{ f \in \Gamma(\mathcal{G}\hat{\otimes} K, \mathcal{O}_{\mathcal{G}\hat{\otimes} K}) \ \Big/\ f(0)=0 \text{ et } m^{*}f - pr_1^{*}f - pr_2^{*}f \in \Gamma(\mathcal{G}\times\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}})[\tfrac{1}{p}] \Big\}$$

Un quasi-logarithme f est trivial si $f \in R[\frac{1}{p}]$

$$\mathrm{Qlog}(\mathcal{G})/\sim \;:=\; \mathrm{Qlog}(\mathcal{G})/_{R^+[\frac{1}{p}]}$$

$\shortparallel$

classes d'équivalence de quasi-logarithmes.

$$\left[\ \underline{\text{Prop:}}\ f \in \mathrm{Qlog}(\mathcal{G}) \Rightarrow f^* dT = df \in \widehat{\Omega}^1_{R/\mathcal{O}_K}[\tfrac{1}{p}] \subset \Omega^1_{\widehat{R[\frac{1}{p}]}/K}\ \right]$$

Or, si $f \in K[[x_1, \ldots, x_d]]$, $\forall i$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in (\mathcal{O}_K[[x_1, \ldots, x_d]])[\frac{1}{p}] \Rightarrow f$ définit une fonction rigide analytique sur $\mathring{\mathbb{B}}^d = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{A}^d \mid \forall i,\ |x_i| < 1\}$

$\Rightarrow$ Si $\mathcal{G}^{rig}$ = fibre générique de $\mathcal{G}$ comme espace rigide analytique $\simeq \mathring{\mathbb{B}}^d$ alors

$$\underbrace{\Gamma(\mathcal{G}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}^{rig}})^b}_{\shortparallel\atop R[\frac{1}{p}]} \subset \underbrace{\Gamma(\mathcal{G}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}^{rig}})}_{\cup\atop \mathrm{Qlog}(\mathcal{G})} \subset \Gamma(\mathcal{G}\hat{\otimes} K, \mathcal{O}_{\mathcal{G}\hat{\otimes} K}) = \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{G}^{rig},0}$$

(b : fct. bornées)

$\mathcal{G}^{rig}$ = K-espace rigide en groupes.

et

$$\mathrm{Qlog}(\mathcal{G}) = \left\{ f : \underbrace{\mathcal{G}^{\mathrm{rig}} \longrightarrow \mathbb{G}_a^{\mathrm{rig}}}_{\substack{\text{morphisme de} \\ K\text{-espaces rigides}}} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(0)=0 \text{ et} \\ \underbrace{\| f(x+y) - f(x) - f(y) \|}_{\substack{\text{fonction rigide analytique} \\ \text{sur } \mathcal{G}^{\mathrm{rig}} \times \mathcal{G}^{\mathrm{rig}}}}{}_\infty < +\infty \end{array} \right\}$$

$=$ quasi-morphismes de groupes rigides analytiques $\mathcal{G}^{\mathrm{rig}} \to \mathbb{G}_a^{\mathrm{rig}}$.

$$\mathrm{Qlog}(\mathcal{G})/\sim \; = \mathrm{Qlog}(\mathcal{G}) \Big/ \left\{ f : \mathcal{G}^{\mathrm{rig}} \to \mathbb{G}_a^{\mathrm{rig}} \;\middle|\; f(0)=0 \text{ et } \|f\|_\infty < +\infty \right\}$$

<u>Filtration de Hodge :</u>

$$\underbrace{\omega_{\mathcal{G}}\left[\tfrac{1}{p}\right]}_{\text{espace des logarithmes} = \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathcal{G}^{\mathrm{rig}},\, \mathbb{G}_a^{\mathrm{rig}})} \subset \mathrm{Qlog}(\mathcal{G})/\sim$$

Structure de $\mathcal{G}^{\text{rig}}$:

$\mathcal{G}/\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ ⇝ groupe p-divisible sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ ⇝ fibre générique $=$ K-groupe p-divisible étale

$$\mathcal{G}^{\text{rig}} \xrightarrow[\text{étale fini}]{\times p} \mathcal{G}^{\text{rig}}$$

$\forall x \in \mathcal{G}^{\text{rig}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n x = 0$.

$$\| $$

$$\underbrace{\mathcal{G}^{\text{rig}}[p^\infty]}_{\substack{\text{groupe rigide analytique}\\ \text{étale de dimension } 0}} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{G}^{\text{rig}}[p^n]$$

$\|$

forme tordue de $T_p(\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$

tordue par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ sur $T_p(\mathcal{G})$.

Il y a alors une suite exacte de faisceaux étales

$$0 \to \mathcal{G}^{\text{rig}}[p^\infty] \longrightarrow \mathcal{G}^{\text{rig}} \xrightarrow{\log_{\mathcal{G}}} \mathrm{Lie}\,\mathcal{G} \otimes \mathbb{G}_a^{\text{rig}} \longrightarrow 0$$

revêtement étale trivial au voisinage de 0.

$\forall \rho \in]0,1[$, si $\mathcal{G}^{\text{rig}}_\rho = \{(x_1,\dots,x_d) \in \mathring{\mathbb{B}}^d \,/\, \forall i,\ |x_i| \leq \rho\}$

alors $\mathcal{G}^{\text{rig}}_\rho$ = sous-groupe affinoïde de $\mathcal{G}^{\text{rig}}$,

$$\mathcal{G}^{\text{rig}} = \bigcup_{\rho\in]0,1[} \mathcal{G}^{\text{rig}}_\rho = \bigcup_{n\geq 1} p^{-n}\mathcal{G}^{\text{rig}}_{\rho_0}$$ pour n'importe quel $\rho_0 \in]0,1[$.

et $$\log_{|\mathcal{G}^{\text{rig}}_\rho} : \mathcal{G}^{\text{rig}}_\rho \longrightarrow \underbrace{\log(\mathcal{G}^{\text{rig}}_\rho)}_{\text{s.-gp. affinoïde}} \subset \operatorname{Lie}\mathcal{G} \otimes \mathbb{G}_a^{\text{rig}}$$

étale fini galoisien de groupe $\underbrace{\mathcal{G}^{\text{rig}}_\rho \cap \mathcal{G}^{\text{rig}}[p^\infty]}_{\text{groupe étale fini}}$.

Nature cristalline des quasi-logarithmes

k corps parfait de caractéristique p. $\mathcal{O}_L = W(k)$, $L = W(k)_{\mathbb{Q}}$ $\circlearrowleft \sigma$ Frobenius.

$\mathcal{H}$ = groupe p-divisible connexe sur k

$\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}$ = module de Dieudonné rationnel contravariant de $\mathcal{H}$

= k-isocristal $\in \varphi\text{-Mod}_L = \text{Isoc}_k$.

$$k = \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L \hookrightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

Supposons que $K|L$ et il existe une quasi-isogénie

$$\rho : \mathcal{H} \otimes_k \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

On a alors :

Th : ρ induit un isomorphisme canonique

$$\rho_* : \mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Qlog}(\mathcal{G})/\sim$$

Rem : En particulier, $\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Qlog}(\widetilde{\mathcal{H}})/\sim$ canoniquement pour n'importe quel relèvement $\widetilde{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ sur $W(k) = \mathcal{O}_L$.

Donc, $(\mathcal{H}, \mathcal{G}, \rho) \longmapsto \Big(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}},\ \underbrace{\mathrm{Fil}\big(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K\big)}_{\substack{\text{filtration de Hodge de} \\ \mathrm{Qlog}(\mathcal{G})/\sim \text{ donnée par} \\ \text{les logarithmes}}}\Big) \in \varphi\text{-ModFil}_{K/L}.$$

Revêtement universel d'un groupe p-divisible

A = anneau p-adique.

$\mathcal{G}$ = groupe p-divisible sur $\mathrm{Spf}(A)$.

Si B = A-algèbre J-adique où $p \in J$ on pose

$$\boxed{X(\mathcal{G})(B) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,/\, x_n \in \mathcal{G}(B) \text{ et } p\, x_{n+1} = x_n \right\}}$$

<u>Prop</u>: Si I est un idéal de B tel que $I \subset J$ et I est fermé pour la topologie J-adique ($\Rightarrow B/I$ est J/I-adique) alors

$$\boxed{X(\mathcal{G})(B) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G})(B/I)}$$

<u>dem</u>: $\begin{cases} \mathcal{G}(B) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{G}(B/J^n) \\ \mathcal{G}(B/I) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{G}(B/I+J^n) \end{cases}$

$\Rightarrow$ on peut supposer, quitte à remplacer B par B/J^n et I par $I+J^n/J^n$ que B est annulé par une puissance de p et I est nilpotent.

Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $I^l = 0$ et $p^l B = 0$. $\mathcal{G}(B) \to \mathcal{G}(B/I)$ se dévisse en

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(B/I^l) \arrow[r] \arrow[rrrr, bend right] & \mathcal{G}(B/I^{l-1}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{G}(B/I^2) \arrow[r] & \mathcal{G}(B/I)
\end{tikzcd}$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ker\left(\mathcal{G}(B/I^{n+1}) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I^n)\right)$ est annulé par p^l car $\underbrace{\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}}_{B\text{-module}}$ est annulé par p^l et I^n/I^{n+1} est de carré nul.

$\Rightarrow \left[\ker\left(\mathcal{G}(B) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I)\right) \text{ est annulé par } p^{l^2}.\right]$

* De cela on déduit que $X(\mathcal{G})(B) \longrightarrow X(\mathcal{G})(B/I)$ est injectif

Car si $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(B)$ avec $x_n \equiv 0 \bmod I$

alors $x_n = p^{l^2} x_{n+l^2} = 0$.

* Pour la surjectivité : $\mathcal{G}$ groupe p-divisible $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ formellement lisse

$\Rightarrow \mathcal{G}(B) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(B/I)$ est surjectif.

~~On en déduit~~

Soit alors $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(B/I)$ et $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widehat{x_n} \in \mathcal{G}(B)$

relevant x_n. $\forall n$, la suite $\left(p^b \widehat{x_{n+b}}\right)_{b\geq 0}$ est constante pour $b>>0$.

En effet, $p^{b+1}\widehat{x_{n+b+1}} - p^b\widehat{x_{n+b}} = p^b\left(\underbrace{p\widehat{x_{n+b+1}} - \widehat{x_{n+b}}}_{\in \ker\left(\mathcal{G}(B)\to\mathcal{G}(B/I)\right)}\right)$

$= 0$ si $b \geq l^2$.

On vérifie alors que

$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto \left(\lim_{b\to+\infty} p^b\widehat{x_{n+b}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

définit un inverse de $X(\mathcal{G})(B) \to X(\mathcal{G})(B/I)$ $\square$

A= k Corps parfait

$\mathcal{G}/k$ groupe formel p-divisible.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[d, equal] & \mathcal{G} \arrow[l, "\times p"'] \arrow[d, "V"] & \mathcal{G} \arrow[l, "\times p"'] \arrow[d, "V^2"] & \cdots \arrow[l, "\times p"'] \\
\mathcal{G} & \mathcal{G}^{(1/p)} \arrow[l, "F"'] & \mathcal{G}^{(1/p^2)} \arrow[l, "F"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Morphisme de systèmes projectifs. De plus, $\mathcal{G}$ connexe $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ $p^{-1}F^N$ est une isogénie $\Rightarrow$ iso. $\forall B =$ k-algèbre adique

$$X(\mathcal{G})(B) \xrightarrow{\ \sim\ } \varprojlim_{F} \mathcal{G}^{(p^{-n})}(B) = \mathcal{G}\big(\underbrace{B^\flat}_{\varprojlim_{\text{Frob}} B}\big)$$

$\varprojlim_{\text{Frob}} B$ muni de la topologie limite projective.

<u>Application:</u> F valué complet parfait de car. p.

$k \subset O_F$ sous-corps parfait. $\mathcal{H}$ = groupe p-divisible formel sur k.

topologie de la valuation de F.

$$\text{Alors, } \mathcal{H}(O_F) = X(\mathcal{H})(O_F) = X(\mathcal{H})\big(W(O_F)\big) \simeq \big(\underbrace{W(O_F)^{00}}_{\{x \in W(O_F) \,/\, x \bmod p \in \mathfrak{m}_F\}}\big)^d$$

$W(O_F)$ muni de la topologie $([a],p)$-adique, $a \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.