Revêtement universel d'un groupe p-divisible (suite)

* $\mathcal{G}$ = groupe p-divisible sur A = p-adique

  B = A-algèbre J-adique avec $p \in J$.

  $$X(\mathcal{G})(B) = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \ / \ x_n \in \mathcal{G}(B) \text{ et } p\, x_{n+1} = x_n \}$$

<u>Rappel:</u> I idéal de B, $I \subset J$

fermé pour la top. J-adique

$$\Rightarrow \boxed{X(\mathcal{G})(B) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G})(B/I)}$$

* Supposons maintenant que $pA = 0$ et A est parfait

<u>Prop:</u> Si $\mathcal{G}$ est connexe alors

$$X(\mathcal{G})(B) \simeq \mathcal{G}(B^\flat)$$

$B^\flat = \varprojlim_{\text{Frob}} B$

<u>dem:</u>

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[d, equal] & \mathcal{G} \arrow[l, "\times p"'] \arrow[d, "V"] & \mathcal{G} \arrow[l, "\times p"'] \arrow[d, "V^2"] & \cdots \arrow[l, "\times p"'] \\
\mathcal{G} & \mathcal{G}^{(p^{-1})} \arrow[l, "F"'] & \mathcal{G}^{(p^{-2})} \arrow[l, "F"'] & \cdots \arrow[l, "\times p"']
\end{tikzcd}
$$

Morphisme de systèmes projectifs.

De plus $\mathcal{G}$ convexe $\Rightarrow$ pour $N \gg 0$ $p^{-1}F^N$ est une isogénie

$\Rightarrow$ isomorphisme $\varprojlim_{\times p} \mathcal{G}(B) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{F} \mathcal{G}^{(p^{-n})}(B) = \mathcal{G}(B^\flat)$ $\square$

Isomorphisme de périodes modulo p

k corps parfait de car. p. $O_L = W(k)$.

$F|k$ valué complet pour $|\,|: F \to \mathbb{R}_+$ non triviale, triviale sur k.

$\mathcal{H}$ = groupe formel p-divisible sur k. $\mathcal{H} \simeq \mathrm{Spf}(k[[X_1,..,X_d]])$

$\tilde{\mathcal{H}}$ = relèvement de $\mathcal{H}$ sur O_L. $\tilde{\mathcal{H}} \simeq \mathrm{Spf}(O_L[[X_1,..,X_d]])$

$\mathcal{H}(O_F) \simeq \mathfrak{m}_F^d$

↑ muni de la topologie définie par $|.|$ = topologie a-adique pour $a \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$

$\mathbb{A}_F = W(O_F)$ est muni de la topologie faible (induite par les $|\,|_\rho$, $\rho \in]0,1[$)
qui est la topologie $([a], p)$-adique pour $a \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

$$\mathbb{A}_F = B_F^\circ = \{ x \in B_F \mid \forall \rho \in]0,1[\quad |x|_\rho \leq 1 \}$$

$$\mathbb{A}_F^{\circ\circ} = B_F^{\circ\circ} = \{ \sum_{n\geq 0} [x_n] p^n \in W(\mathcal{O}_F) \mid \underset{\text{i.e. } x_0 \in \mathfrak{m}_F}{|x_0| < 1} \}$$

puissances tendent vers 0 = éléments topologiquement nilpotents.

Alors, $\left[\widetilde{\mathcal{H}}(\mathbb{A}_F) \simeq (\mathbb{A}_F^{\circ\circ})^d \right]$

En prenant $I = (p) \subset J = ([a], p)$ dans la proposition $X(g)(B) \xrightarrow{\sim} X(g)(B/I)$ on trouve

$$\left[\mathcal{H}(\mathcal{O}_F) = X(\mathcal{H})(\mathcal{O}_F) \xleftarrow{\sim} X(\widetilde{\mathcal{H}})(\mathbb{A}_F) \right]$$

car F parfait $\Rightarrow \mathcal{O}_F = \mathcal{O}_F^b$

$*$ Soit $x \in \widetilde{\mathcal{H}}(\mathbb{A}_F)$ et $f \in \Gamma(\widetilde{\mathcal{H}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{H}}}) \simeq \mathcal{O}_L[[X_1, \dots, X_d]]$

$$f : \widetilde{\mathcal{H}} \to \widehat{\mathbb{A}}^1 = \mathrm{Spf}(\underbrace{\mathcal{O}_L[[T]]}_{\text{topologie } (p,T)\text{-adique}})$$

On peut alors définir $f(x) \in \mathbb{A}_F$

si $x = (x_1, \dots, x_d) \in (\mathbb{A}_F^{\circ\circ})^d$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \underset{\substack{\cap \\ \mathcal{O}_L}}{a_\alpha} X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}$

$f(x) = \sum_\alpha a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ C.V. dans $\mathbb{A}_F$ car $\mathbb{A}_F$ complet pour la topologie faible.

D'où une application d'évaluation en x

$$\Gamma(\tilde{\mathfrak{X}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}})\left[\tfrac{1}{p}\right] \longrightarrow \mathbb{A}_F\left[\tfrac{1}{p}\right] = B_F^{b,+}$$

De plus, si $\rho \in]0,1[$ et $f = \sum_\alpha a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}$

$$|f(x)|_\rho \leq \sup_\alpha |a_\alpha|_\rho \, |x_1|_\rho^{\alpha_1} \cdots |x_d|_\rho^{\alpha_d}$$

$$\leq \sup_\alpha |a_\alpha|_\rho \cdot \|x\|_\rho^{|\alpha|}$$

$|\alpha| = \sum_i \alpha_i$

car $x_i \in \mathbb{A}_F^{\circ\circ}$

si $\|x\|_\rho = \sup_i |x_i|_\rho < 1$

$$= |f|_{\|x\|_\rho}$$

où pour $R \in]0,1[$, $|f|_R$ = norme sup de Gauss de f sur la boule de rayon R relativement à la valeur absolue $\underbrace{|\cdot|_\rho}_{}$ sur L

unique v.a. définissant la top. de L telle que $|p|_\rho = \rho$.

$\Longrightarrow$ L'application d'évaluation $f \mapsto f(x)$

se prolonge en

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\tilde{\mathfrak{X}}^{rig}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}^{rig}}) & \longrightarrow & B_F^+ \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

B_F^+ = Complété de $\mathbb{A}_F\left[\tfrac{1}{p}\right]$ pour $(|\cdot|_\rho)_{\rho \in]0,1[}$

Complété de $\Gamma(\tilde{\mathfrak{X}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}})\left[\tfrac{1}{p}\right]$ pour les normes de Gauss.

$\textcircled{3}$

<u>Prop</u>: Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X(\tilde{\mathcal{H}})(\mathcal{A}_F)$ et $f \in \mathcal{Q}log(\tilde{\mathcal{H}})$.

$\phantom{Prop: Soit (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X(\tilde{\mathcal{H}})(\mathcal{A}_F) et f \in} \cap$

$\phantom{Prop: Soit (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X(\tilde{\mathcal{H}})(\mathcal{A}_F) et} \Gamma(\tilde{\mathcal{H}}^{rig}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{H}}^{rig}})$

Alors, la suite $(p^n f(x_n))_{n\geq 0}$ de B_F^+ converge dans B_F^+.

<u>dem.</u> Soit $\rho \in]0,1[$ fixé. On munit L de $|\cdot|_\rho$.

$\exists C$ tq. $\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|_\infty \leq C$

↑ norme sup d'une fonction rigide analytique sur $\mathring{\mathbb{B}}^d \times \mathring{\mathbb{B}}^d$

$\Rightarrow \|f(px)-pf(x)\|_\infty \leq C$

↑ norme sup d'une fonction rigide analytique sur $\mathring{\mathbb{B}}^d$.

On a alors $|p^{n+1}f(x_{n+1})-p^n f(x_n)|_\rho = \underbrace{|p^n|_\rho}_{\rho^n} \cdot \underbrace{|pf(x_{n+1})-f(x_n)|_\rho}_{\leq \|pf(x)-f(px)\|_\infty \leq C} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

↑ g. estimée précédente utilisée pour démontrer que l'application d'évaluation s'étend à $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{H}}^{rig})$

$\square$

On a donc défini ~~[illegible]~~ une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_L\left(\mathrm{Qlog}(\tilde{\mathcal{H}}), B_F^+\right)$$

De plus, si $f \in \mathrm{Qlog}(\tilde{\mathcal{H}})$ est trivial i.e. $\|f\|_\infty < +\infty$ et $(x_n)_{n\geq 0} \in X(\tilde{\mathcal{H}})(A_F)$

$$|p^n f(x_n)|_p \leq p^{-n} \cdot \|f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n f(x_n) = 0$.

D'où en fait

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_L\Big(\underbrace{\mathrm{Qlog}(\tilde{\mathcal{H}})/\sim}_{\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}}, B_F^+\Big)$$

Th: L'application précédente induit un isomorphisme

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{L,\varphi}\left(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}, B_F^+\right) = \mathrm{Hom}_{L,\varphi}\left(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}, B_F\right)$$

Exemple : * $\mathcal{H} = \widehat{\mathbb{G}}_m$

$\widetilde{\mathcal{H}} = \widehat{\mathbb{G}}_m$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\mathcal{O}_F) = (1+\mathfrak{m}_F, \times) & & \varepsilon \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \\ X(\widetilde{\mathcal{H}}(W(\mathcal{O}_F))) \text{ où } \widetilde{\mathcal{H}}(W(\mathcal{O}_F)) = (1+A_F^{\circ\circ}, \times) & & ([\varepsilon^{p^n}])_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

$\mathrm{Qlog}(\widehat{\mathbb{G}}_m)_{/\sim} = L.\log$ i.e. modulo les quasi-logarithmes triviaux tout quasi-logarithme est un multiple du log.

D'où
$$\left[\begin{array}{ccc} (1+\mathfrak{m}_F, \times) & \xrightarrow{\sim} & (B_F^+)^{\varphi=p} = B_F^{\varphi=p} \\ \varepsilon & \longmapsto & \log([\varepsilon]) \end{array}\right]$$

* En changeant de loi de groupe formel :

Soit $\mathcal{G}_a$ la loi de groupe formel sur $\mathbb{Z}_p$ de logarithme

$$\log_{\mathcal{G}_a} = \sum_{n\geq 0} \frac{T^{p^n}}{p^n}$$

(il existe une telle loi i.e.
$X \underset{\mathcal{G}_a}{+} Y = \log_{\mathcal{G}_a}^{-1}\left(\log_{\mathcal{G}_a}(X) + \log_{\mathcal{G}_a}(Y)\right) \in \mathbb{Z}_p[[X,Y]]$)

On a alors si $E(T) = \exp\left(\sum_{n\geq 0} \frac{T^{p^n}}{p^n}\right)$ = exponentielle de Artin-Hasse

$$= \prod_{\substack{(n,p)=1 \\ n\geq 1}} \left(1-T^n\right)^{\frac{\mu(n)}{n}} \qquad \mu = \text{Möbius}$$

Si $\varepsilon \in (\mathfrak{m}_F, +_{\mathcal{F}})$ alors l'élément $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $x_n \in \mathbb{A}_F^{\circ\circ}$, $[p]_{\mathcal{F}}(x_{n+1}) = x_n$ associé est $x_n = \lim_{b\to+\infty} [p^b]_{\mathcal{F}}\left([\varepsilon^{p^{-b}}]\right)$ car $[p]_{\mathcal{F}} \equiv T^p \bmod p$.

On a alors $\lim_{n\to+\infty} p^n \log_{\mathcal{F}}(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{b\to+\infty} p^n \log_{\mathcal{F}}\left([p^b]_{\mathcal{F}}\left([\varepsilon^{p^{-b-n}}]\right)\right)$

$$= \lim_{\substack{n\to+\infty \\ b\to+\infty}} p^{n+b} \log_{\mathcal{F}}\left([\varepsilon^{p^{-b-n}}]\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} p^n \log_{\mathcal{F}}\left([\varepsilon^{p^{-n}}]\right)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\varepsilon^{p^{-n}}] p^n$$

Donc

$$\left[\begin{tikzcd} (1+\mathfrak{m}_F, \times) \arrow[r, "\log\circ[-]", "\sim"'] & B^{\varphi = p} \\ & \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\varepsilon^{p^{-n}}] p^n \\ (\mathfrak{m}_F, +) \arrow[uu, "\simeq"] \arrow[uur, "\simeq"] & \varepsilon \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}\right]$$

Idem en général : $\forall E$ si $1 \leq d \leq h$

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_F^d & \xrightarrow{\sim} & B_{F,E}^{\varphi^h = \pi^d} \\ (x_0, \ldots, x_{d-1}) & \longmapsto & \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[x_i^{q^{-nh}} \right] \pi^{nd+i} \end{array}\right]$$

loi de groupe formel donnée par $\ker\left(CW_{\mathcal{O}_E} \xrightarrow{F^{h-d} - V_\pi^d} CW_{\mathcal{O}_E}\right)$

+ théorie de Cartier $\Rightarrow$ on peut calculer les quasi-logarithmes d'un relèvement.

Isomorphisme de périodes en inégales caractéristiques

$C|\mathbb{Q}_p$ complet alg. clos $F = C^\flat$ $(E = \mathbb{Q}_p)$

$\theta : B_F \twoheadrightarrow C$

$\mathcal{G}/\mathcal{O}_C$ formel p-divisible.

Il y a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{G}^{rig}[p^\infty] \longrightarrow \mathcal{G}^{rig} \xrightarrow{\log_{\mathcal{G}}} \mathrm{Lie}\,\mathcal{G} \underset{\mathcal{O}_C}{\otimes} \mathbb{G}_a^{rig} \longrightarrow 0$$

qui donne au niveau des C-points

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathcal{G}(\mathcal{O}_C)[p^\infty] & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{O}_C) & \xrightarrow{\log_{\mathcal{G}}} & \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}[\frac{1}{p}] & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow \times p & & \uparrow \times p & & \simeq \uparrow \times p & & \\
0 \to \mathcal{G}(\mathcal{O}_C)[p^\infty] & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{O}_C) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}[\frac{1}{p}] & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow \times p & & \uparrow \times p & & \uparrow \times p & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

en appliquant $\varprojlim_{\times p}$ on obtient

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to V_p(\mathcal{G}) & \longrightarrow & X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) & \xrightarrow{\log} & \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}[\frac{1}{p}] \to 0 \\
& & (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} & \longmapsto & \log(x_0)
\end{array}$$

6

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C) = \mathcal{G}(\mathcal{O}_C^\flat) = \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$$

D'où une suite exacte

$$\left[\, 0 \to V_p(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}\left[\tfrac{1}{p}\right] \to 0 \,\right]$$

Supposons que $\mathcal{H}/\overline{\mathbb{F}}_p$ + quasi-isogénie $\rho : \mathcal{H} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C$

$$(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \rho) \longmapsto \Big(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}, \varphi, \underbrace{\mathrm{Fil}\big(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L C\big)}_{\substack{\simeq\, \omega_{\mathcal{G}}\left[\frac{1}{p}\right] \\ \text{via } \rho}}\Big) \in \varphi\text{-}\mathrm{ModFil}_{C/L}$$

où $L = \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$

$$\left[\;\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}(\mathcal{O}_F) & \xrightarrow[\sim]{\rho} & \mathcal{G}(\mathcal{O}_F) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}\left[\frac{1}{p}\right] \\ \downarrow \simeq & & & & \| \\ \mathrm{Hom}_{L,\varphi}\left(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}, B_F^+\right) & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{Hom}_L\left(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}, C\right) & \to & \mathrm{Fil}(\mathbb{D}(\mathcal{H})_C)^* \end{array}\;\right]$$

$\theta : B_F^+ \twoheadrightarrow C$

Ce diagramme commute.

Corollaire : $(\mathcal{H}, \mathcal{G}, \rho)$ comme précédemment

Il y a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow V_p(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{L,\varphi}(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}, B_F) \xrightarrow{\vartheta} \mathrm{Fil}(\mathbb{D}(\mathcal{H})_C)^* \longrightarrow 0$$

Interprétation en termes de fibrés vectoriels : X_F, $\infty \in |X_F|$, $k(\infty) = C$.

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \overbrace{\bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{\mathrm{Hom}_{L,\varphi}(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}, (B_F, p^{-d}\varphi))}_{\{f : \mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}} \longrightarrow B_F \,/\, f \circ \varphi = p^{-d}\varphi \circ f\}}}$$

$$\begin{cases} H^0(X_F, \mathcal{E}(\mathcal{H})) = \mathrm{Hom}_{L,\varphi}(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}, B_F) \\ \mathcal{E}(\mathcal{H})_\infty \otimes k(\infty) = \mathbb{D}(\mathcal{H})_C. \end{cases}$$

Prop. Il y a une suite exacte

$$0 \to V_p(\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{H}) \longrightarrow i_{\infty *}\left(\mathrm{Fil}\, \mathbb{D}(\mathcal{H})_C\right)^* \longrightarrow 0$$

Qui redonne la suite exacte précédente en appliquant $H^0(X,-)$.

dem:

Se donner un morphisme

$$V_p(\mathcal{G}) \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}(\mathcal{H})$$

est équivalent à se donner une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire

$$V_p(\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{E}(\mathcal{H})) = \mathrm{Hom}_{L,\varphi}(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}, B)$$

$$\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X, \mathcal{E}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, H^0(X, \mathcal{E}))\right)$$

D'où $u : V_p(\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}(\mathcal{H})$.

De la suite exacte $0 \to V_p(\mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{L,\varphi}(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}}, B_F) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Lie}\, \mathcal{G}[\frac{1}{p}] \to 0$

on déduit que le conoyau de $V_p(\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_F \longrightarrow \mathrm{Hom}_{L,\varphi}(\mathbb{D}, B_F) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_F$ est annulé par t.

$\Rightarrow$ iso. $V_p(\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_F[\frac{1}{t}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{L,\varphi}(\mathbb{D}, B_F) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_F[\frac{1}{t}]$

même rang

$\Rightarrow$ iso. $V_p(\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_e \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{L,\varphi}\left(\mathbb{D}(\mathcal{H})_{an}, B[\tfrac{1}{t}]\right)$

où $B_e = B[\tfrac{1}{t}]^{\varphi = Id} = H^0(X_F \setminus \{\infty\}, \mathcal{O}_{X_F})$

$\Rightarrow$ $\boxed{u_{|X \setminus \{\infty\}} \text{ est un isomorphisme.}}$

De plus, $u : \underbrace{V_p(\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X}_{\text{degré } 0} \xrightarrow{\text{iso. en dehors de } \infty} \ker\left(\mathcal{E}(\mathcal{H}) \longrightarrow i_{\infty *}\left(\mathrm{Fil}\, \mathbb{D}(\mathcal{H})_C\right)^*\right)$

$$\text{degré} = \overbrace{\deg \mathcal{E}(\mathcal{H})}^{\dim \mathcal{H}} - \dim \mathrm{Fil}\, \mathbb{D}(\mathcal{H})_C$$
$$= 0$$

$\Rightarrow$ u est un iso. $\square$

Th (Lafaille, Gross-Hopkins) :

$\mathcal{H}$ formel de dimension 1 et hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}}_p \Rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right)$

Alors, pour tout $C|L$, pour tout ~~hyperplan~~ droite $W \subset \mathbb{D}(\mathcal{H})_{\mathbb{Q}} \underset{L}{\otimes} C$ il existe un couple $(\mathcal{G}, \rho)$ avec $\mathcal{G}/\mathcal{O}_C$ et $\rho : \mathcal{H} \underset{\overline{\mathbb{F}}_p}{\otimes} \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \to \mathcal{G} \underset{\mathcal{O}_C}{\otimes} \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C$

tel que la filtration de Hodge associée $\mathrm{Fil}(\mathbb{D}(\mathcal{H})_C) \simeq \omega_{\mathcal{G}}\left[\frac{1}{p}\right]$ soit égale à W.

Corollaire : Soit $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \mathcal{F} \to 0$ une suite exacte.
$$\mathcal{F} \simeq i_{\infty *} b(n)$$

Alors, $\boxed{\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^n}$
$$\mathcal{E} \simeq V_p(\mathcal{G}) \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} \mathcal{O}_X \text{ pour un } \mathcal{G}/\mathcal{O}_C.$$

Le cas dual

Soit $0 \to \mathcal{O}_X^n \to \underset{\text{fibré}}{\mathcal{E}} \to \underset{\simeq i_{\infty *} \underbrace{k(\infty)}_{C}}{\mathcal{F}} \to 0$ une suite exacte.

Par application de $\mathcal{H}om\left(-, \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ on obtient une modification duale

$$0 \to \mathcal{H}om\left(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) \to \mathcal{H}om\left(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}\left(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) \to 0$$

Si $D = \mathrm{End}\left(\mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$ algèbre à division d'invariant $\frac{1}{n}$ il s'agit d'une suite exacte de $D \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} \mathcal{O}_X$-modules

$$0 \to \underset{\substack{\circlearrowright \\ D}}{\mathcal{E}'} \to \underset{\substack{\circlearrowright \\ \text{action diagonale} \\ \text{de } D}}{\mathcal{O}_X\left(\tfrac{1}{n}\right)^n} \to i_{\infty *}\check{\mathcal{F}} \underset{k(\infty)}{\otimes} W \to 0$$

$\check{\mathcal{F}} =$ dual de Pontryagin $\simeq i_{\infty *} k(\infty)$

$W = \underbrace{D \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} C}_{\simeq M_n(C)}$-module simple $\simeq \bigoplus_{i=0}^{n-1} C$ comme C-e.v.

Th (Drinfeld) : $\mathcal{H}$ formel p-divisible de dim. 1 et hauteur n.

$$W \subset \mathbb{D}(\mathcal{H})^n_C \quad \text{un sous } D \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} C\text{-module simple (i.e. de dim. } n \text{ sur } C)$$

vérifiant $W \cap \underbrace{\left(\mathbb{D}(\mathcal{H})^{\varphi=\Pi}_{\mathbb{Q}}\right)^n}_{\simeq \mathbb{Q}_p^n} = (0)$ où Π = uniformisante de D.

Il existe alors $\mathcal{G}/\mathcal{O}_C$ muni d'une action de $\mathcal{O}_D$ et une quasi-isogénie

$$\rho : \mathcal{H}^n \underset{\bar{\mathbb{F}}_p}{\otimes} \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \xrightarrow{Q^D} \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C$$

t.q. W = Filtration de Hodge associée.

~~Il y a moyen de se dévisser au cas où~~

$$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{O}_X\left(\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \mathcal{F} \to 0$$

Il y a moyen de dévisser au cas où . . . . .