1

Cours n°3
M2 Jussieu
Printemps 2014
Courbe

Rappels :

* E valuation discrète $\mathcal{O}_E/\pi\mathcal{O}_E = \mathbb{F}_q$.
$F|\mathbb{F}_q$ parfait complet $|\cdot| : F \to \mathbb{R}_+$.

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \,/\, x_n \in F \right\}$$ (fonctions méromorphes formelles)

$$\cup$$

$$B^b = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \,/\, \sup_n |x_n| < +\infty \right\} \supset A = \left\{ \sum_{n \geq 0} [x_n]\pi^n \,/\, x_n \in \mathcal{O}_F \right\}$$

* Pour $\rho \in]0,1]$, $x \in B^b$, $|x|_\rho = \sup_n |x_n|\rho^n$

$$|x|_0 = q^{-v_\pi(x)}$$

* $I \subset [0,1]$ intervalle. B_I = Complété de B^b pour $(|\cdot|_\rho)_{\rho \in I}$.

= alg. de Fréchet = alg. de Banach si I compact.

$$B := B_{]0,1[}$$

* Pour $x \in B_I$ on peut définir $\mathrm{Newt}_I(x)$ = polygone à pentes dans $-\log_q(I \setminus \{0\})$.

Satisfait : - $\mathrm{Newt}_I(xy) = \mathrm{Newt}_I(x) * \mathrm{Newt}_I(y)$

- si $x \in B^b$, $\mathrm{Newt}(x)$ = Enveloppe convexe décroissante des $(n, v(x_n))_{n \in \mathbb{Z}}$

alors $\mathrm{Newt}_I(x)$ = on ne garde que les pentes λ tq. $q^{-\lambda} \in I$

- Si $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ alors pour tout $J \subset I \setminus \{0\}$ compact

$$\exists N,\ n \geq N \Rightarrow \mathrm{Newt}_J(x_n) = \mathrm{Newt}_J(x).$$

$$* \ B^{b,+} = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in B^b \ \middle|\ |x_n| \leq 1 \right\}$$

$\rho \in]0,1[$ $\quad B^+_\rho$ = Complété de $B^{b,+}$ pour $|\cdot|_\rho$

$\bigcap$ $\quad$ = " $\quad$ " $(|\cdot|_{\rho'})_{\rho' \in [\rho,1]}$

$B_{[\rho,1]}$

$$B^+ = \bigcap_{\rho>0} B^+_\rho = \bigcap_{n\geq 0} \varphi^n\left(B^+_\rho\right) \subset B_{]0,1]}$$

<u>Les théorèmes principaux :</u>

$*$ Si $J \subset I \subset [0,1]$ alors $B_I \subset B_J$

$*$ Si $0 \in I$ $\quad B_I \subset B_{\{0\}} = \mathcal{E}$

$$\left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in \mathcal{E} \ \middle|\ \forall \rho \in I \ \lim_{n\to+\infty} |x_n|\rho^n = 0 \right\}$$

$0 \in I$ $\Leftrightarrow$ méromorphe en 0

$*$ Si $0 \in \bar{I}$ alors

$$B_{I\cup\{0\}} = \left\{ f \in B_I \ \middle|\ \exists n \ \pi^n f \text{ bornée au voisinage de } 0 \right\}$$

i.e. $\lim_{\rho \to 0} |\pi^n f|_\rho < +\infty$

$\Leftrightarrow$

$$\exists A \quad \mathrm{Newt}_I(f)|_{]-\infty,A]} \equiv +\infty$$

* Si $1 \in I$

$$B_{I\cup\{1\}} = \left\{ f \in B_I \;/\; \lim_{\substack{\rho \to 1 \\ <}} |f|_\rho < +\infty \right\}$$

i.e. $\mathcal{N}ewt_I(f)$ borné inférieurement

* $B^+ = \{ f \in B \;/\; \mathcal{N}ewt(f) \geq 0 \}$

* Inversibles: $I \subset [0,1[$, $B_I^\times = \{ f \in B_I \;/\; \mathcal{N}ewt_I(f) = \phi \}$

(un sens est évident car si $fg = 1 \Rightarrow \mathcal{N}ewt_I(f) * \mathcal{N}ewt_I(g) = \mathcal{N}ewt_I(1) = \phi$)

L'ensemble $|Y|$:

* Si $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ B_I = fct. holo. de la variable π à coeff. dans F

* sur la couronne définie par $I \setminus \{0,1\}^+$

tq.: - méromorphe en 0 si $0 \in I$

- bornée au voisinage de $\rho = 1$ si $1 \in I$.

$I \subset]0,1[$. $\mathbb{D}_{F,I}$ = la couronne rigide analytique$/F$ associée.

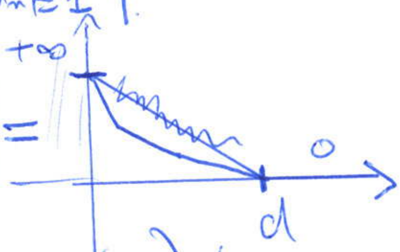
$f \in B_I$, $y \in \underbrace{|\mathbb{D}_{F,I}|}_{\text{points de Tate de } \mathbb{D}_{F,I}}$ $[k(y) : F] < +\infty$

On peut alors définir $f(y) \in k(y)$ et $|f(y)| \in \mathbb{R}_+$.

Si $E|\mathbb{Q}_p$ et $f \in B_I$ .... ~~sur quoi faut~~ en quoi peut-on évaluer f ?

Def: $x = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n \in \mathbb{A}$ est primitif si $x_0 \neq 0$ et $\exists n$, $|x_n| = 1$.

On pose alors $\deg(x) = \inf\{n \mid |x_n| = 1\}$.

x primitif de degré d $\iff$ $\mathrm{Newt}(x) =$ 

$\iff$ $x \bmod \pi \neq 0$ et $\underbrace{x \bmod W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)}_{\text{via } W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \twoheadrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(k_F)} \neq 0$

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = \mathbb{A}$$

$$\deg(x) = v_\pi\left(x \bmod W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)\right)$$

Ex: $a \in F$, $0 < |a| < 1$, $[a] - \pi$ est primitif de degré 1.

$$\begin{cases} \mathrm{Prim}_0 = \mathbb{A}^\times \\ \mathrm{Prim}_d \cdot \mathrm{Prim}_{d'} \subset \mathrm{Prim}_{d+d'} \end{cases}$$

Def: x primitif est irréductible si $\deg(x) > 0$ et x n'est pas le produit de deux éléments primitifs de degré > 0.

Déf. $|Y| = \mathrm{Prim}^{\mathrm{irred}}/A^\times \subset \{$Idéaux principaux non nuls de $A\}$.

Notation. $y = (a)$, a primitif.

Ex. $E = \mathbb{F}_q((\pi))$. $\forall a \in \mathrm{Prim}$ $\exists! P \in \mathcal{O}_F[\pi]$ polynôme ~~irréductible~~ unitaire satisfaisant $0 < |P(0)| < 1$ (Weierstraß)

$\exists! u \in A^\times$ tq. $a = P.u$.

a irréductible $\Leftrightarrow$ P irréductible.

$$\{P \in \mathcal{O}_F[T] \text{ unitaire irréductible}, 0 < |P(0)| < 1\} \simeq |\mathbb{D}_F^*|.$$

$*$ $\|\cdot\| : |Y| \to]0,1[$ distance à l'origine.

$y = (a) \mapsto |a_0|^{1/\deg y}$

$I \subset]0,1[$. $|Y_I| = \{y \in |Y|, \|y\| \in I\}$

But: expliquer les deux théorèmes suivants

Th: F alg. clos.

(1) Tout élément primitif irréductible est de degré 1.

Plus précisément : $\forall x$ primitif de degré d $\exists$ factorisation de Weierstrass $x = u \prod_{i=1}^{d} (\pi - [a_i])$ $\quad 0<|a_i|<1$, $u \in A^\times$

⚠ : Contrairement au cas $E = \mathbb{F}_q((t))$, les a_i ne sont pas uniques. On peut avoir $(\pi - [a]) = (\pi - [b])$ avec $a \neq b$.

(2) Si $y = (a) \in |Y|$ et donc $\deg y = 1$, $C_y = B^b / B^b a$

$\mathcal{O}_{C_y} = A/(a)$

Alors C_y est un corps valué complet alg. clos extension de E d'anneau des entiers $\mathcal{O}_{C_y}$

De plus : si $\theta_y : B^b \to C_y$ est l'application quotient

$\forall x \in C_y \ \exists z \in F$, $x = \theta_y([z])$ et pour un tel z, $|x| = |z|$.

$\to$ division de Weierstrass dans A : si $y = (\pi - [b])$

alors $\forall f \in A \ \exists g \in A \ \exists z \in \mathcal{O}_F$ $\quad f = (\pi - [b]) g + [z]$

⚠ : z pas unique.

Basculement (Fontaine)

Déf : A = $\mathcal{O}_E$-algèbre π-adique (π-adiquement séparée complète)

On pose $A^\flat = \left\{ (x^{(n)})_{n \geq 0} \;\middle|\; x^{(n)} \in A,\ (x^{(n+1)})^q = x^{(n)} \right\}$

$(-)^\flat : \mathcal{O}_E\text{-alg. } \pi\text{-adiques} \longrightarrow \mathcal{E}ns$

Ex : Si $\pi A = 0$ i.e. A = $\mathbb{F}_q$-algèbre alors $A^\flat = \varprojlim_{\mathrm{Frob}_q} A$.

Prop : I idéal de A fermé pour la top. π-adique. Si A est $I+(\pi)$-adique alors

$$A^\flat \xrightarrow{\sim} (A/I)^\flat$$

d'inverse $(x^{(n)})_{n\geq 0} \longmapsto \left(\lim_{k \to +\infty} \left(\widehat{x^{(n+k)}}\right)^{q^k} \right)_{n \geq 0}$

où $\underset{\underset{A}{\cap}}{\widehat{x^{(n+k)}}}$ = relèvement quelconque de $x^{(n+k)} \in A/I$

et la limite est pour la topologie $I+(\pi)$-adique.

Cor : Factorisation canonique

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_E\text{-alg. } \pi\text{-adiques} \arrow[r, "(-)^\flat"] \arrow[dr] & \mathcal{E}ns \\ & \mathbb{F}_q\text{-alg. parfaites} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

via $A^\flat \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathrm{Frob}_q} A/\pi A$.

(3) L'application

$$F \xrightarrow{\iota_y} C_y^b \quad \text{est un isomorphisme}$$

$$z \mapsto \left(\theta_y([z^{p^{-n}}]) \right)_{n \geq 0}$$

(4) L'application

$$|Y| \longrightarrow \left\{ (C, \iota) \,/\, \begin{array}{l} C|E \text{ alg. clos valué complet} \\ \iota : F \xrightarrow{\sim} C^b \end{array} \right\} / \sim$$

$$y \longmapsto [(C_y, \iota_y)]$$

est une bijection.

(5) Si $y \in |Y_I|$ alors θ_y s'étend par continuité en

$\theta_y : B_I \to C_y$ de noyau B_I a

De plus, si $B^+_{dR,y}$ = Complété a-adique de B^b

= anneau de valuation discrète

$\mathrm{ord}_y : B^+_{dR,y} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ valuation normalisée

Alors, $\forall \lambda \in]0, +\infty[$ tq. $q^{-\lambda} \in I$ la multiplicité de λ dans $\mathrm{Newt}_I(f)$

est $\mathrm{ord}_y(f)$.

(6) Si I est compact B_I est principal. $\mathrm{Spm}(B_I) \simeq |Y_I|$.

Pour cette structure d'algèbre

$$(x+y)^{(n)} = \lim_{b\to+\infty} \left(x^{(n+b)} + y^{(n+b)}\right)^{q^b}$$

$$(xy)^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}.$$

Ex : * $A = \mathbb{F}_q$-alg. parfaite. $A \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(A)^\flat$. $I=(\pi)$.

$$a \mapsto \left([a^{q^{-n}}]\right)_{n\geq 0}$$

* A $\mathbb{F}_q$-alg. parfaite $I \subset W_{\mathcal{O}_E}(A)$ tq. I π-adiquement fermé et $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est $I+(\pi)$-adique. Alors si $\theta : W_{\mathcal{O}_E}(A) \to W_{\mathcal{O}_E}(A)/I$

$$A \xrightarrow{\sim} \left(W_{\mathcal{O}_E}(A)/I\right)^\flat$$

$$a \mapsto \left(\theta\left([a^{q^{-n}}]\right)\right)_{n\geq 0}$$

$\mathcal{O}_E$-vecteurs de Witt : $\forall n \geq 0$ posons $W_n = \sum_{b=0}^{n} \pi^b X_b^{q^{n-b}} \in \mathcal{O}_E[X_0,\dots,X_n]$

Alors il existe une unique factorisation du foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_E\text{-alg.} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathrm{Ens} \\ A & \longmapsto & A^{\mathbb{N}} \end{array}$$

en un foncteur $W_{\mathcal{O}_E}(-)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_E\text{-alg.} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "W_{\mathcal{O}_E}(-)"'] & \mathrm{Ens} \\ & \mathcal{O}_E\text{-alg} \arrow[u, "\mathrm{can}"'] \end{tikzcd}$$

$W_{\mathcal{O}_E}(A) = \{[a_0,\dots,a_n,\dots] \mid a_i \in A\}$

tq. $\forall n \geq 0$, $W_{\mathcal{O}_E}(-) \xrightarrow{w_n} (-)$ soit un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres.

$$[a_i]_{i\geq 0} \longmapsto w_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

On note $[a] = [a, 0, \ldots, 0, \ldots] \in W_{\mathcal{O}_E}(A)$

Si A est parfait $W_{\mathcal{O}_E}(A) = \left\{ \sum_{n\geq 0} [a_n]\pi^n \,/\, a_n \in A \right\}$

$$\sum_{n\geq 0} [a_n]\pi^n = [a_0, a_1^q, \ldots, a_n^{q^n}, \ldots]$$

L'application ϑ de Fontaine

A = $\mathcal{O}_E$-alg. π-adique, $n \geq 1$

$$\vartheta_n : W_{\mathcal{O}_E}(A/\pi A) \longrightarrow A/\pi^n A$$

$$x \longmapsto w_{n-1}(\hat{x})$$

où si $x \in W_{\mathcal{O}_E}(A/\pi A)$, $\hat{x} \in W_{\mathcal{O}_E}(A/\pi^n A)$ est un relèvement quelconque de x.

Bien défini car si $x', x'' \in W_{\mathcal{O}_E}(A/\pi^n A)$ relèvent x alors

$$x' - x'' = [t_i]_{i\geq 0} \text{ avec } t_i \in \pi A/\pi^n A.$$

Mais alors $w_{n-1}(x') - w_{n-1}(x'') = w_{n-1}(x' - x'')$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \pi^i t_i^{q^{n-1-i}} = 0$$

Car $t_i \in \pi A/\pi^n A \Rightarrow t_i^{q^{n-1-i}} \in \pi^{n-i} A/\pi A$.

Le Cas d'un Corps valué

$K|E$ Corps valué Complet pour $|\cdot|: K \to \mathbb{R}_+$.

$\mathcal{O}_K^\flat$ muni de $|\cdot|$ définie par $|(x^{(n)})_n| = |x^{(0)}|$.

$|\cdot|$ est une valeur absolue non-archimédienne.

2 Cas. * Soit $|\cdot|$ sur $\mathcal{O}_K^\flat$ est une v.a. triviale i.e. $\forall x \in \mathcal{O}_K^\flat \setminus \{0\}$, $|x| = 1$

Alors $\mathcal{O}_K^\flat \xrightarrow{\sim} k_K = \bigcap_{n\geq 0} k_K^{q^n}$ = plus grand sous-Corps parfait du Corps résiduel de K

* Soit $|\cdot|$ sur $\mathcal{O}_K^\flat$ n'est pas trivial et alors

$\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_K^\flat)$ s'identifie à $K^\flat := \left\{ (x^{(n)})_{n\geq 0} \;\middle|\; x^{(n)} \in K \text{ et } (x^{(n+1)})^q = x^{(n)} \right\}$

et $(K^\flat, |\cdot|)$ = Corps valué Complet parfait de car. p.

Lorsque n varie

$$\begin{tikzcd} W_{\mathcal{O}_E}(A/\pi A) \arrow[r, "\theta_n"] & A/\pi^n A \\ W_{\mathcal{O}_E}(A/\pi A) \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\theta_{n+1}"] & A/\pi^{n+1} A \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

D'où
$$\begin{tikzcd} \theta : \varprojlim_F W_{\mathcal{O}_E}(A/\pi A) \arrow[r] & \varprojlim_n A/\pi^n A = A \\ W_{\mathcal{O}_E}(\underbrace{\varprojlim_F A/\pi A}_{A^\flat}) \arrow[u, equal] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\theta : W_{\mathcal{O}_E}(A^\flat) \to A.$$

Th: Les deux foncteurs

$$\mathcal{O}_E\text{-alg. } \pi\text{-adiques} \underset{W_{\mathcal{O}_E}(-)}{\overset{(-)^\flat}{\rightleftarrows}} \mathbb{F}_q\text{-alg. parfaites}$$

sont adjoints l'un de l'autre et les applications d'adjonction sont

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Id} & \longrightarrow & (-)^\flat \circ W_{\mathcal{O}_E}(-) \\ x & \longmapsto & \left([x^{q^{-n}}]\right)_{n\geq 0} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \theta : W_{\mathcal{O}_E} \circ (-)^\flat \longrightarrow \mathrm{Id} \right.$$

Étude des éléments primitifs

$a = \sum_{i\geq 0} [a_i]\pi^i$ primitif de degré 1.

$0 < |a_0| < 1$

$|a_1| = 1$

$D = A/(a)$. → Anneau I-adique et $J \subset I$ de type fini $\Rightarrow R$ est J-adique

* A est a-adique et (a,π)-adique car $(a,\pi) = ([a_0],\pi)$ et la topologie $([a_0],\pi)$-adique est la topologie faible.

$\Longrightarrow$ si $\vartheta : A \to D$ alors $\mathcal{O}_F \xrightarrow{\sim} D^\flat$

↑ Prop. précédente $\quad x \mapsto \left(\vartheta\left([x^{q^{-n}}]\right)\right)_{n\geq 0}$

et via cette identification $\vartheta =$ le ϑ de Fontaine

* On vérifie facilement que D est sans π-torsion

$\Longrightarrow D$ π-adique sans π-torsion.

* **Prop** : $\forall n \in \mathbb{N}$ tout $x \in D$ possède une racine n-ième dans D.

$(n,p) = 1$: "facile"

$n = p$: difficile → Calculs sur les vecteurs de Witt de longueur 2.

Prop. : (1) $A = \mathcal{O}_E$-alg. π-adique telle que $\mathrm{Frob}_{A/\pi A}$ soit surjectif.
Alors $\theta_A : W_{\mathcal{O}_E}(A^\flat) \to A$ est surjectif

(2) Si $A = \mathcal{O}_K$ avec K alg. clos et $x = \sum_{n \geq 0} [x_n]\pi^n \in \ker\theta$

Alors, $\ker\theta = (x) \iff |x_0| = |x_0^{(0)}| = \pi$

$\to$ (1) A et $W_{\mathcal{O}_E}(A^\flat)$ π-adiques $\Rightarrow$ [θ_A surjectif ssi ($\theta_A \bmod \pi$) surjectif]

Mais $\theta_A \bmod \pi : A^\flat \to A/\pi A \Rightarrow$ O.K.

$$A^\flat = \varprojlim_{\mathrm{Frob}_q} A/\pi A \xrightarrow{\text{proj.}} A/\pi A$$

(2) * Si $x \in \ker\theta$ et $|x_0| = |\pi|$ alors $\forall y \in \ker\theta$, $\theta(y) = y_0^{(0)} + \pi(-)$.

$$\Rightarrow |y_0^{(0)}| \leq |\pi| \Rightarrow |y_0| \leq |x_0|$$

$\Rightarrow y_0 \in \mathcal{O}_K^\flat x_0$

$\Rightarrow y \in (x) + \pi \ker\theta$

Donc $\ker\theta = (x) + \pi\ker\theta$

$\Rightarrow \ker\theta = (x)$ par Nakayama π-adique.

* Dans l'autre sens, si $\varpi \in \mathcal{O}_K^\flat$ vérifie $\varpi^{(0)} = \pi$ alors $\ker\theta = (\pi - [\varpi])$ d'après ce qu'on a vu avant. ~~Donc~~ Si $([\varpi] - \pi) = (x) \Rightarrow (\varpi) = (x_0)$

$$\Rightarrow \underset{|\pi|}{|\varpi|} = |x_0| \qquad \square$$

Car se ramène au cas $E = \mathbb{Q}_p$ et tout élément de $1+p^2A$ possède une racine p-ième si $p \neq 2$

Corollaire : * $\forall x \in D \quad \exists z \in \mathcal{O}_F, \quad x = \theta([z])$.

* Il existe $z \in \mathcal{O}_F$ tel que $(a) = ([z] - \pi)$ i.e. on peut supposer que $a = [a_0] - \pi$.

$\rightarrow$ si $x \in D$ d'après la prop. précédente on peut supposer que $x = y^{(0)}$ avec $y \in D^\flat = \mathcal{O}_F$

$\rightarrow$ si $\underline{\pi} \in D^\flat$ est tel que $\underline{\pi}^{(0)} = \pi$ alors $\ker\theta = ([\underline{\pi}] - \pi)$. $\square$

$\Rightarrow$ $a = \underset{\underset{A^\times}{\cap}}{u} \cdot ([z] - \pi)$ factorisation de Weierstrass

Division de Weierstrass : $f \in A \qquad f = ba + [z]$.

* En utilisant que tout $x \in D$ est de la forme $x = \theta([z])$ on vérifie que l'application $x \longmapsto |z|$ si $x = \theta([z])$ est bien définie et de plus est une valeur absolue sur D.

On vérifie également que $(D[\frac{1}{\pi}], |\cdot|) =$ Corps valué complet ~~de corps résiduel~~ d'anneau de valuation D.

Reste à montrer que D est alg. clos.

Pour cela, on montre :

Prop : D contient $\bigcup_n \mathbb{Q}_q(\zeta_n)$

Prop : $L|K$ extension de corps valués complets galoisienne de degré fini.
Si $b_L = b_K$ alors $\mathrm{Gal}(L|K)$ est résoluble.

$\Rightarrow$ le résultat par la théorie de Kummer.