1

Cours M2
Jussieu
Printemps 2014
Cours n°4

La dernière fois :

$F|\mathbb{F}_q$ parfait

E non-archi. $\mathcal{O}_E/\pi\mathcal{O}_E = \mathbb{F}_q$

$$\mathbb{A} = \left\{ \sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n \,/\, x_n \in \mathcal{O}_F \right\}$$

On a défini $|Y| = \mathrm{Prim}^{\mathrm{irred}}/\mathbb{A}^\times$

$$\mathrm{Prim} = \text{éléments primitifs} = \left\{ \sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n \in \mathbb{A} \,/\, x_0 \neq 0 \text{ et } \exists d, |x_d| = 1 \right\}$$

degré = plus petit d.

Notation : $y \in |Y|$, $y = (a)$ avec a primitif

Th : F alg. clos, a primitif de degré 1.

Alors $\exists z \in F$, $0 < |z| < 1$ tel que $(a) = ([z] - \pi)$ (factorisation de Weierstrass)

Si $\mathcal{O}_C = \mathbb{A}/(a)$, $C = \mathcal{O}_C\left[\frac{1}{\pi}\right]$, $\theta : \mathbb{A} \to \mathcal{O}_C$ alors :

* $\forall x \in C \quad \exists y \in F \quad x = \theta([y])$ (division de Weierstrass)
* C corps valué complet $|E$ alg. clos pour l'unique valeur absolue $|\cdot|$ telle que $|\theta([y])| = |y|$
* $F \xrightarrow{\sim} C^\flat$

$$y \mapsto \left(\theta\left([y^{q^{-n}}]\right)\right)_{n\geq 0}$$

But maintenant : Falg. clos. Montrer que tout élément primitif irréductible est de degré 1 i.e.

Va primitif $a = \text{unité} \times (\pi - [z_1]) \times \cdots \times (\pi - [z_d])$

$\uparrow$ $A^\times$

Notations : $y \in |Y|^{deg=1}$

$\uparrow$ on ne sait pas encore que $|Y|^{deg=1} = |Y|$

C_y = Corps résiduel associé $= B^b/(a)$ si $y = (a)$

$\partial_y : B^b \twoheadrightarrow C_y$

$|\ |_y$ = valeur absolue sur C_y

* Pour $f \in B^b$, notation abrégée $\begin{cases} f(y) := \partial_y(f) \\ |f(y)| = |\partial_y(f)|_y \end{cases}$.

* On a une fonction $\|\ \| : |Y|^{deg=1} \longrightarrow]0,1[$ (distance à l'origine)

$y \longmapsto |\pi(y)|$

Equivalent de l'énoncé précédent : $\forall f \in A$ primitif de degré >0, f a un zéro dans $|Y|^{deg=1}$ i.e. $\exists y \in |Y|^{deg=1}$ $f(y) = 0$.

Méthode : Par approximations successives

"méthode de Newton" pour construire un zéro.

Pb : Pour construire un zéro par approximations successives on a besoin d'une métrique sur $|Y|^{deg=1}$.

Prop. $y_1, y_2 \in |Y|^{deg=1}$. On pose $d(y_1, y_2) = |\partial_{y_2}(y_1)|$.
(a_1) (a_2)

Alors, d métrique ultramétrique sur $|Y|^{deg=1}$

$\left(d(y_1, y_3) \leq \sup\{deg(y_1, y_2), d(y_2, y_3)\}\right)$

telle que $\forall \rho \in]0,1[$, $\left(|Y_{[\rho,1[}|^{deg=1}, d\right)$ soit complet.

↳ fondamental pour construire un zéro que l'on ne connaît pas à l'avance

Ex. $E = \mathbb{F}_q((T))$ - $|Y| = |\mathbb{D}_F^*| = h_F \mathbb{N}^*$

alors $d(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|$ y_1, y_2.

Rem. On peut vérifier que si $\mathcal{H}(B^b)$ = espace de Berkovich des valuations $\mathbb{C}^\circ$ sur B^b pour $(|\cdot|_\rho)_{\rho \in]0,1[}$

alors la topologie induite par d est la même que celle induite par le plongement $|Y| \hookrightarrow \mathcal{H}(B^b)$

$y \longmapsto |\cdot|_y \circ \sigma_y$

Méthode pour démontrer le théorème :

[$f = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n \in \mathbb{A}$ primitif, $\deg(f) > 0$ dont on veut montrer qu'il possède un zéro dans $|Y|^{\deg = 1}$.

Idée : On connaît à l'avance quelles doivent être les $\|y\|$ où $f(y) = 0$] Contrainte à partir de départ

→ Ce sont les $q^{-\lambda}$ où λ = pente > 0 de Newt(f)

On construit par récurrence une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ de $|Y|^{\deg = 1}$ de la façon suivante : soit λ la plus petite pente non nulle de Newt(f).

Soit $z \in \mathcal{O}_F$ une racine de $\underbrace{\sum_{n \geq 0} x_n T^n}$ de valuation λ

a $\hat{m}$ polygone de Newton que f (dans un corps différent)

* On pose $y_1 = ([z] - \pi)$. Rem : $f(y_1) = \sum_{n \geq 0} [x_n](y_1) \underbrace{\pi(y_1)^n}_{[z](y_1)^n}$

$= \sum_{n \geq 0} [x_n z^n](y_1) \equiv 0 \bmod \pi \ldots$

~~On pose alors y_{k+1}~~

* Si $y_n = (\xi)$ alors on peut développer f en série entière au voisinage de ξ :

$f = \sum_{b \geq 0} [x_b] \xi^b$ (car mod ξ tout élément est un Teichmüller)

On pose alors $y_{n+1} = \left([b]_- \pi\right)$ où b = racine de plus grande valuation de $\sum_{b \geq 0} w_b T^b$.

Alors, $\forall n \quad |y_n| = q^{-\lambda}$ et $(y_n)_n$ de Cauchy dans $|Y|^{deg=1}$

et $\lim_{n \to \infty} |f(y_n)| = 0$

$\Rightarrow$ résultat : si $y = \lim_{+\infty} y_n$, $f(y) = 0$ □

Extension à B_I : Si $y \mapsto |Y_y|$ et $\rho = |y|$

alors $\forall f \in B^b \quad |f(y)| \leq |f|_\rho$

$\rightarrow$ si $f = \sum_{n \gg -\infty} [k_n] \pi^n$ alors $f(y) = \sum_{n \gg -\infty} \vartheta_y([k_n])\, \pi(y)^n$ $\quad (\pi(y) = u)$.

$\Rightarrow |f(y)| \leq \sup_n \underbrace{|\vartheta_y([k_n])|}_{|k_n|} \rho^n = |f|_\rho$ □

$\Rightarrow \vartheta_y$ s'étend par continuité en $\vartheta_y : B_I \to C_y$ dès que $|y| \in I$.

Prop : $\ker\left(\vartheta_y : B_I \to C_y\right) = B_I . a$ si $y = (a)$.

dém. $C_y = B^b / B^b_a \Rightarrow C_y = B_I / \overline{B^b . a} \Rightarrow \overline{B^b_a} = \ker\left(\vartheta_y : B_I \to C_y\right)$.

Réciproquement si $f_n a \to g \in B_I$, $f_n \in B^b$,

$|f_{n+1} - f_n|_\rho = |a|_\rho^{-1} \cdot |f_{n+1} a - f_n a|_\rho \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} h \in B_I$ tel que $g = a h$. $\square$

Rem: Idem pour B^+_ρ, B^+ : $\ker(\theta_y : B^+ \to C_y) = B^+ a$

Ainsi, $B^+_{cris,\rho} = B^+_{cris}(\mathcal{O}_{C_y}) \xrightarrow{\theta_y} C_y$ a un noyau très compliqué.
$\rho = \|y\|$ qui s'exprime en termes de puissances divisées.

Mais il devient principal sur B^+ !!

Def: $y \in |Y|$
$y = (a)$

$B^+_{dR,y}$ = A.V.D. corps résiduel C_y, a = uniformisante
= Complété a-adique de B^b
= Complété a-adique de B_I si $\|y\| \in I$
= "$\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$"

$\mathrm{ord}_y : B^+_{dR,y} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ valuation normalisée

Th: $\forall I \subset]0,1[$ $\forall f \in B_I$ non nul
$\{\text{pentes de } \mathrm{Newt}_I(f)\} = \{-\log_q \|y\|, f(y) = 0\}$
avec multiplicité $\mathrm{ord}_y f$.

$\to$ il suffit de montrer que $\forall f \in B_I$, $\forall \lambda$ pente de $\mathrm{Newt}_I(f)$
$\exists y$, $\|y\| = q^{-\lambda}$ et $f(y) = 0$.

Principe de la preuve : approximations successives en utilisant encore la métrique

$\Rightarrow$ on connaît le résultat pour les éléments primitifs

$\Rightarrow$ On connaît le résultat pour les $\sum_{n>>-\infty} [k_n]\pi^n \in B^b$ vérifiant $k_n = 0$ pour $n \gg 0$.
$\quad\quad\quad

Diviseurs et fonctions holomorphes $I \subset]0,1[$.

$$\mathrm{Div}\left(Y_I\right) = \left\{ D = \sum_{y \in |Y_I|} m(y)[y] \;\middle/\; \forall J \subset I \text{ compact } \mathrm{Supp}(D) \cap |Y_J| \text{ fini} \right\}$$

$$\bigcup \mathrm{Div}^+\left(Y_I\right)$$

$f \in \mathcal{B}_{I,]0,1[}$ $\quad \mathrm{div}(f) = \sum_{y \in |Y_I|} \mathrm{ord}_y(f)[y]$.

Th. $\mathcal{B}_{I,]0,1[} / \mathcal{B}_I^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^+\left(Y_I\right)$

est injective. De plus $\mathrm{div}(f) \geq \mathrm{div}(g) \Leftrightarrow f \in \mathcal{B}_I g$.

On écrit $\mathcal{B}_I = \varprojlim_{J \text{ compact} \subset I} \mathcal{B}_J$ + $\mathcal{B}_J$ principal.

Produits de Weierstrass :

* $\rho \in]0,1[\Rightarrow$ tout $D \in \mathrm{Div}^+\left(Y_{]0,\rho]}\right)$ est principal.

$\rightsquigarrow D = \sum_{i \geq 0} [y_i]$ $\quad y_i = [z_i] - \pi$, $\lim_{i \to +\infty} |y_i| = 0$ i.e. $\lim_{+\infty} z_i = 0$.

$f = \prod_{i \geq 0} \left(1 - \frac{[z_i]}{\pi}\right) \in \mathcal{B}^+$ vérifie $\mathrm{div}(f) = D$.

* Nous faut à prouver pour $\mathrm{Div}^+\left(Y_{[\rho,1[}\right)$

Paramétrisation de $|Y|$ F alg. clos.

Si $E = \overline{\mathbb{F}_q}((\pi))$ $\Rightarrow$ $|Y| = |\mathbb{D}_F^\times| = \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ $\rightarrow$ paramétrisation claire

On a vu que $\forall y \in |Y|$ $\exists z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ $y = |[z]_{-\pi}|$

Mais z n'est pas unique !

$\mathfrak{m}_F \setminus \{0\} \twoheadrightarrow |Y|$ Mais on ne connaît pas les fibres

* Solution : $E = \mathbb{Q}_p$. $\widehat{\mathbb{G}_m}(G_F) = (1+\mathfrak{m}_F, \times) = \mathbb{Q}_p$-espace vectoriel

En effet, c'est un $\mathbb{Z}_p$-module via $\forall a \in \mathbb{Z}_p$ $\forall \varepsilon \in 1+\mathfrak{m}_F$

$$a \cdot \varepsilon = a \cdot (1 + (\varepsilon - 1))$$
$$= \sum_{b \geq 0} \binom{a}{b} (\varepsilon - 1)^b$$

et $p \cdot \varepsilon = \varepsilon^p \Longrightarrow$ p inversible $\Rightarrow$ $(1+\mathfrak{m}_F, \times) = \mathbb{Q}_p$-e.v.

$\uparrow$ F parfait

Def : $\varepsilon \in 1+\mathfrak{m}_F \setminus \{1\}$ $\varepsilon \neq 1$ $\qquad u_\varepsilon = \dfrac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon^{1/q}]-1} = 1 + [\varepsilon^{1/q}] + \cdots + [\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}] \in \mathbb{A}$

Lemme. u_ε est primitif de degré 1

$\rightarrow$ $u_\varepsilon \bmod \pi = 1 + \varepsilon^{1/q} + \cdots + \varepsilon^{\frac{q-1}{q}} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^{1/q} - 1} \neq 0$ ($\varepsilon \neq 1$).

$u_\varepsilon \bmod W(\mathfrak{m}_F) \in W(k_F)$

$\| $

$1 + [1] + \dots + [1] = p \qquad$ car $\varepsilon \longmapsto 1 \in W(k_F)$ $\square$

Pour $\varepsilon \in 1+\mathfrak{m}_F \setminus \{1\}$ on pose $C_\varepsilon = C_{\mathbb{Q}_{p^d}}$

$\varepsilon \in F = C_\varepsilon^\flat$

$\|$

$\left(\varepsilon^{(n)}\right)_{n\geq 0} = \left(\partial_\varepsilon\left(\left[\varepsilon^{1/p^n}\right]\right)\right)_{n\geq 0} \qquad \varepsilon^{(n+1)} \in C_\varepsilon$

$\left(\varepsilon^{(n+1)}\right)^p = \varepsilon^{(n)}.$

Mais $1 + \varepsilon^{(1)} + \dots + \left(\varepsilon^{(1)}\right)^{p-1} = \partial_\varepsilon\left(1 + [\varepsilon^{1/p}] + \dots + \left[\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\right]\right) = 0.$

$\Rightarrow \varepsilon^{(1)} \in \mu_p(C_\varepsilon)$

De plus, $\mathcal{O}_{C_\varepsilon}/p\mathcal{O}_{C_\varepsilon} = \mathcal{O}_F/\underbrace{u_\varepsilon \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon^{1/p}-1}}$ avec $|\overline{u_\varepsilon}| = |\varepsilon - 1|^{1-\frac{1}{p}}$

or $\varepsilon^{(1)} + 1 \bmod p \equiv \varepsilon^{1/p} - 1 \bmod \overline{u_\varepsilon}$

$|\varepsilon^{1/p} - 1| = |\varepsilon - 1|^{\frac{1}{p}} < |\overline{u_\varepsilon}|$

$\Rightarrow \varepsilon^{(1)} - 1 \neq 0$ i.e. $\varepsilon^{(1)} \neq 1$

Racine "primitive p-ième de l'unité dans C_ε".

$\Rightarrow \left(\varepsilon^{(n)}\right)_{n\geq 0} =$ base de $\underbrace{\mathbb{Z}_p(1)(C_\varepsilon)}_{T_p(\widehat{\mathbb{G}_m})\text{ sur }C_\varepsilon}$.

Dans l'autre sens, si $y \in |Y|$ C_y alg. clos

On choisit $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n \geq 0}$ une base de $\mathbb{Z}_p(1)(C_y)$

$\varepsilon \in C_y^\flat = F$ $\quad \varepsilon \in 1 + \mathfrak{m}_F \setminus \{1\}$ et $u_\varepsilon \in \ker(\theta_y : A \to C_y)$.

<u>Prop:</u> L'application $(1+\mathfrak{m}_F)\setminus\{1\} \longrightarrow |Y|$

$$\varepsilon \longmapsto (u_\varepsilon)$$

induit une bijection $(1+\mathfrak{m}_F)\setminus\{1\}/\mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\sim} |Y|$

i.e. si $V = \mathbb{Q}_p$-espace de Banach $\widehat{\mathbb{G}}_m(\mathcal{O}_F)$

$$|Y| \simeq V \setminus \{0\}/\mathbb{Z}_p^\times$$

<u>Morale:</u> tout élément de $\widehat{\mathbb{G}}_m(\mathcal{O}_F)$ peut être vu comme un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ dans un C_y, $y \in |Y|$.

<u>Rem:</u> $|Y| \circlearrowleft \varphi$ bijective où $\|\varphi(y)\| = \|y\|^q$.

Ici $(E = \mathbb{Q}_p)$ $\quad \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}$ car $\widehat{\mathbb{G}}_m(\mathcal{O}_F) \circlearrowleft \mathfrak{p} = \mathrm{Frob}_p$.

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\}/\mathbb{Q}_p^\times$$

* Si E quelconque : Idem avec des Lubin-Tate.

Rem: * On est parti de F mais $|Y_F|$

* Si on part de $C|E$ alg. clos complet et que l'on pose $F = C^\flat$

alors $y = \ker(\theta_C : A_F \to \mathcal{O}_C) \in |Y_F|$ et $B^+_{dR}(C) = B^+_{dR,y}$

Donc si on part d'une donnée $B^+_{cris}(\mathcal{O}_C) = B^+_{cris,\frac{1}{p}}$ si $E = \mathbb{Q}_p$.

de caractéristique 0 (comme l'occurence) comme en théorie de Hodge p-adique usuelle alors on obtient un espace pointé $(|Y_F|, y)$.

Le Cas F quelconque (pas utilisé dans la suite).

Corps perfectoïdes :

Def: $K|E$ valué complet est perfectoïde si il n'est pas de valuation discrète et $Frob_q : \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ est surjectif.

Rem: Si $A = \mathcal{O}_E$-alg. π-adique, $Frob_{A/\pi A}$ surjectif

$\Leftrightarrow$

$\theta_A : W_{\mathcal{O}_E}(A^\flat) \longrightarrow A$ surjectif.

Car $\theta_A \bmod \pi : A^\flat \longrightarrow A/\pi A$

$(A/\pi A)^\flat = \varprojlim_{Frob_q} A/\pi A$ / projection sur la première composante.

Lemme : $K|E$ perfectoïde, $|\cdot|$ = v.a. de K. Alors $|K^\flat| = |K|$.

Dém : K pas de valuation discrète $\Rightarrow \exists \varepsilon \in K$, $|\pi| < |\varepsilon| < 1$.

Alors, $\varepsilon \bmod \pi \in \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ Frobq surjectif

$\Rightarrow \exists \lambda \in (\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K)^\flat$, $\varepsilon = \lambda^{(0)}$

$\| \mathcal{O}_K^\flat$

$\exists \mu \in \mathcal{O}_K^\flat$, $\varepsilon \equiv \mu^{(0)} \bmod \pi$

Mais puisque $|\pi| < |\varepsilon| < 1 \Rightarrow |\mu^{(0)}| = |\varepsilon|$.

$\| |\mu|$

On a donc trouvé $\mu \in \mathcal{O}_K^\flat$ tel que $|\pi| < |\mu| < 1$.

Plus généralement, si $x \in K^\times$, $|x| \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists b \in \mathbb{Z}$ $|\mu| \leq |\mu|^b |x| \leq 1$ car $|\mu| < 1$

Alors $\underbrace{(\mu^{(0)})^b x}_{\in \mathcal{O}_K} \bmod \pi \in \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$

$\Rightarrow$ $\exists z \in \mathcal{O}_K^\flat$ tel que $z^{(0)} \equiv (\mu^{(0)})^b x \bmod \pi$

↑ même raisonnement que précédemment

et alors $|z| = |z^{(0)}| = |(\mu^{(0)})^b x| = |\mu|^b |x|$ car $|(\mu^{(0)})^b x| > |\pi|$.

$\Rightarrow |x| = |z \underbrace{\mu^{-b}}_{\in K^\flat}|$ □

Prop : K perfectoïde. $\theta : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_K^\flat) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_K$

Alors, $\ker\theta$ est engendré par un élément primitif de degré 1.

dem. Soit $x \in \mathcal{O}_K^\flat$ tel que $|x| = |\pi| \Rightarrow \theta([x]) \in \pi\mathcal{O}_K$.

Alors θ surjectif $\Rightarrow \theta([x]) = \pi\theta(a)$, $a \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_K^\flat)$

$\Rightarrow \xi = [x] - a\pi \in \ker\theta$.

On vérifie que $|x| = |\pi| \Rightarrow \xi$ primitif de degré 1 et si $\xi = \sum_{k\geq 0} [\xi_k]\pi^k$

alors $|\xi_0| = |x| \Rightarrow \ker\theta = (\xi)$ □

On a la réciproque suivante.

Th : $y = (a) \in |Y_F|$ (primitif irréductible). $K_y = B^b/B^b_a$. $\theta_y : B^b \twoheadrightarrow K_y$

Alors : * $K_y|E$ est perfectoïde pour une v.a. telle que

$$|\theta_y([z])| = |z|$$

* L'application $F \xrightarrow{\text{can}} K_y^b$ est une extension

$$z \longmapsto (\theta_y([z^{q^{-n}}]))_{n\geq 0}$$

de degré fini $\boxed{[K_y^b : F] = \deg y}$

Posons pour $d \geq 1$, $X_d = \{(K,\iota) \,/\, K|E$ perfectoïde, $\iota : F \overset{\text{isométrique}}{\hookrightarrow} K^\flat$ tq via ι, $[K^\flat : F] = d\} / \sim$

Alors $|Y_F|^{\deg = d} \xrightarrow{\sim} X_d$

$$y \longmapsto [(K_y, \mathrm{Can}_y)]$$

Lorsque $d = 1$ l'inverse de $|Y_F| \xrightarrow{\sim} |X_1| = \{(K,\iota) \,/\, F \overset{\iota}{\xrightarrow{\sim}} K^\flat\} / \sim$

est donné par $(K,\iota) \longmapsto \ker\left(A_F \overset{\iota}{\xrightarrow{\sim}} A_{K^\flat} \xrightarrow{\partial_K} \mathcal{O}_K\right) \in |Y_F|$

Car on a démontré que c'est engendré par un élément primitif de degré 1.

La preuve est par descente galoisienne de $\hat{\bar{F}}$ à F en utilisant les résultats précédents sur $|Y_{\hat{\bar{F}}}|$. + méthode de Sen-Tate pour montrer des annulations de la Coho. Galoisienne continue de $\mathrm{Gal}(\bar{F}|F)$

On démontre en fait:

$G_F = Gal(\overline{F}|F)$

Th. $|Y_{\hat{\overline{F}}}| \circlearrowleft G_F$ $\quad |Y_{\hat{\overline{F}}}|^{G_F\text{-fin}} = \{y \mid \#(G_F \cdot y) < +\infty\}$

Il y a alors une application surjective G_F-invariante

$$\beta : |Y_{\hat{\overline{F}}}|^{G_F\text{-fini}} \twoheadrightarrow |Y_F|$$

induisant $|Y_{\hat{\overline{F}}}|^{G_F\text{-fin}}/G_F \xrightarrow{\sim} |Y_F|$ i.e. fibres de β = orbites sous galois

telle que si $y = \beta(z)$ alors $C_z | K_y$ et $C_z = \hat{\overline{K_y}}$.

(C_z : alg. clos, K_y : perfectoïde)

De plus $\deg(y) = \#(G_F \cdot z)$.

et $Gal(C_z|K_y) \xrightarrow{\sim} Aut(C_z^b | K_y^b) = Gal(\overline{F}|K_y^b)$ ← théorème de pureté.

(Aut : Aut t°, $C_z^b = \hat{\overline{F}}$)

$\Rightarrow$ donne une preuve différente du théorème de pureté de Scholze pour les corps perfectoïdes : K perfectoïde $\Rightarrow Gal(\overline{K}|K) \xrightarrow{\sim} Aut(\hat{\overline{K}}^b | K^b)$.

i.e. $(-)^b$: K-alg. étales finies $\xrightarrow{\sim}$ K^b-algèbres étales finies.

Rem : contrairement au cas F alg. clos en général $y \in |Y_F|$ de degré 1 n'est pas de la forme $([a]-\pi)$. C'est vrai ssi $\exists \underline{\pi} \in K_y^b$, $\underline{\pi}^{(a)} = \pi$.

Tous les théorèmes précédents sur les B_I restent vrais. (B_I principal...) pour Fqcq.