Cours M2 - Jussieu sur la Courbe
Printemps 2014
Cours n°5

Le cas F parfait quelconque (Cf. utilisé dans la suite)

Corps perfectoïde:

$E|\mathbb{Q}_p$ de degré fini

Def: $K|E$ valué complet est perfectoïde s'il n'est pas de valuation discrète et $\mathrm{Frob}_q : \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ est surjectif.

Rem: * Si $A = \mathcal{O}_E$-algèbre π-adique $\mathrm{Frob}_{A/\pi A}$ surjectif

$$\Updownarrow$$

$$\theta_A : W_{\mathcal{O}_E}(A/\pi A) \longrightarrow A \text{ est surjectif}$$

Car $\theta_A \bmod \pi$:

$$\begin{array}{ccc} A^\flat & \longrightarrow & A/\pi A \\ \| & & \uparrow \\ (A/\pi A)^\flat & & \\ \| & & \\ \varprojlim_{\mathrm{Frob}_q} A/\pi A & & \end{array}$$

~~première~~ projection sur la première composante

* Donc K perfectoïde $\Leftrightarrow$ pas de valuation discrète et $\theta_{\mathcal{O}_K}$ surjectif.

Rappel: On munit $K^\flat$ de la valeur absolue $|(x^{(n)})_{n\geq 0}| = |x^{(0)}|$.

Lemme : $K|E$ perfectoïde $|\ | =$ v.a de K. Alors $|K^\flat| = |K|$.

dem : K pas de valuation discrète $\Rightarrow \exists \varepsilon \in K$, $|\pi| < |\varepsilon| < 1$.

Alors $\varepsilon \bmod \pi \in \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \circlearrowleft \mathrm{Frob}_q$ surjectif

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \underset{\substack{\| \\ }}{(\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K)^\flat}, \quad \varepsilon = \lambda^{(0)}$$

$$\exists \mu \in \mathcal{O}_K^\flat \qquad \varepsilon \equiv \mu^{(0)} \bmod \pi$$

Mais puisque $|\pi| < |\varepsilon| \leq 1 \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ |\mu|}}{|\mu^{(0)}|} = |\varepsilon|$

On a donc trouvé $\mu \in \mathcal{O}_K^\flat$ tel que $|\pi| < |\mu| < 1$.

Maintenant, si $x \in K^\times$, $|x| \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists b \in \mathbb{Z}$ $|\mu| \leq |\mu|^b |x| \leq 1$ (car $0 < |\mu| < 1$).

Alors, $(\mu^{(0)})^b x \in \mathcal{O}_K$ et $(\mu^{(0)})^b x \bmod \pi \in \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$

$\| \leftarrow$ m̂ raisonnement que précédemment

$z^{(0)} \bmod \pi$ où $z \in \mathcal{O}_K^\flat$.

et alors $|z| = |z^{(0)}| = |(\mu^{(0)})^b x| = |\mu|^b |x|$ car $|(\mu^{(0)})^b x| > |\pi|$

$$\Rightarrow |x| = |\underbrace{z\mu^{-b}}_{\in K^\flat}| \qquad \square$$

Prop: K perfectoïde, $\theta : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_K^b) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_K$.
Alors $\ker\theta$ est engendré par un élément primitif de degré 1.

dem: Soit $x \in \mathcal{O}_K^b$ tel que $|x| = |\pi| \Rightarrow \theta([x]) \in \pi\mathcal{O}_K$.
Alors, θ surjectif $\Rightarrow \theta([x]) = \pi\theta(a)$ avec $a \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_K^b)$

$$\Rightarrow \xi = [x] - \pi a \in \ker\theta.$$

On vérifie que $|x| = |\pi| \Rightarrow \xi$ primitif de degré 1 et si $\xi = \sum_{k \geq 0} [\xi_k]\pi^k$

alors $|\xi_0| = |\pi| \Rightarrow \ker\theta = (\xi)$. $\square$

On a la réciproque suivante.

Th: $y = (a) \in \underbrace{|Y_F|}_{\mathrm{Prim}_F^{\mathrm{irred}} / A_F^\times}$. $K_y = B^b / B^b a$. $\theta_y : B^b \twoheadrightarrow K_y$. Alors :

* $K_y | E$ est un corps perfectoïde pour une v.a. telle que
$$|\theta_y([z])| = |z|$$

* L'application $F \xhookrightarrow{\text{Cang}} K_y^b$ est une extension
$$z \longmapsto (\theta_y([z q^{-n}]))_{n \geq 0}$$
de degré fini $\boxed{[K_y^b : F] = \deg y}$

Posons pour $d \geq 1$, $X_d = \{(K, \iota) \mid K|E$ perfectoïde, $\iota : F \hookrightarrow K^\flat$ tq. $[K^\flat : F] = d\}/\sim$

Alors $|Y_F|^{\deg = d} \xrightarrow{\sim} X_d$

$$y \longmapsto [(K_y, \mathrm{can}_y)]$$

Lorsque $d = 1$ l'inverse de $|Y_F| \xrightarrow{\sim} |X_1| = \{(K, \iota) \mid F \xrightarrow{\sim} K^\flat\}/\sim$

est donné par $(K, \iota) \longmapsto \ker\left(A_F \xrightarrow[\sim]{\iota} A_{K^\flat} \xrightarrow{\theta_K} \mathcal{O}_K\right) \in |Y_F|$

Car on a démontré que c'est engendré par un élément primitif de degré 1.

Preuve : par descente galoisienne de $\widehat{\overline{F}}$ à F en utilisant les résultats précédents sur $|Y_{\widehat{\overline{F}}}|$ + méthode de Sen-Tate pour montrer l'annulation de la Coho. Galoisienne $\mathcal{C}^0$ de $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$.

à cause de la complétion : $\widehat{\overline{F}}$ et non $\overline{F}$,

On démontre en fait :

$G_F = \mathrm{Gal}(\bar{F}|F)$

Th: $|Y_{\hat{\bar{F}}}| \circlearrowleft G_F$ $\quad |Y_{\hat{\bar{F}}}|^{G_F\text{-fini}} = \{y \mid \#(G_F \cdot y) < +\infty\}$

Il y a alors une application surjective G_F-invariante

$$\beta : |Y_{\hat{\bar{F}}}|^{G_F\text{-fini}} \twoheadrightarrow |Y_F|$$

induisant $|Y_{\hat{\bar{F}}}|^{G_F\text{-fini}}/G_F \xrightarrow{\sim} |Y_F|$ i.e. fibres de β = G_F-orbites.

telle que si $y = \beta(z)$ alors $C_z | K_y$ et $C_z = \hat{\bar{K_y}}$.

alg. clos $\quad$ perfectoïde

De plus $\deg(y) = \#(G_F \cdot z) = \#\beta^{-1}(y)$.

et $\mathrm{Gal}(C_z|K_y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\text{cont}}(C_z^\flat|K_y^\flat) = \mathrm{Gal}(\bar{F}|K_y^\flat)$ $\rightarrow$ théo. de pureté.

$\Rightarrow$ donne une preuve différente du théo. de pureté de Scholze pour les corps perfectoïdes : K perfectoïdes $\Rightarrow$ $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\hat{\bar{K}}^\flat|K^\flat)$.

i.e. $[(-)^\flat : K\text{-alg. étales finies} \xrightarrow{\sim} K^\flat\text{-alg. étales finies}]$

<u>Rem:</u> Contrairement au cas F alg. clos en général $y \in |Y_F|$ de degré 1 n'est pas de la forme $([a]-\pi)$. C'est vrai ssi $\exists\, \underline{\pi} \in K_y^\flat$ tq. $\underline{\pi}^{(0)} = \pi$.

$\circledast$ Tous les théorèmes précédents sur les B_I restent vrais (B_I principal...) pour F parfait.

La Courbe : F algébriquement clos.

Motivation : On n'a pas défini l'espace Y (existe en fait comme E-espace adique)

mais on a défini $|Y|$ = "points classiques de Y"

$$|Y| \circlearrowleft \varphi \qquad \varphi\Big(\sum_n \underset{\substack{\uparrow \\ B^b}}{[x_n]}\pi^n\Big) = \sum_n [x_n^q]\pi^n$$

$\|\cdot\| : |Y| \to]0,1[$ distance à l'origine $\|\varphi(y)\| = \|y\|^q$

$y \mapsto |\pi(y)|$

$B := B_{]0,1[} \circlearrowleft \varphi$ bijectif "$B_I = H^0(Y_I, \mathcal{O}_Y)$"

"$= H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$" si $Y \subset]0,1[$

Supposons que l'on veuille classifier les $\underbrace{\varphi\text{-Modules sur } B}$

(M, φ)

M : B-module projectif de type fini

φ : iso. $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M$ semi-linéaire

$(M, \varphi) \longmapsto$ "fibré φ-équivariant sur Y"

En effet, $\forall I$ compact $M_I := M \otimes_B B_I = B_I$-module libre de rang fini

$\uparrow$ principal

$\underbrace{\left(M_I\right)_{\substack{I \subset]0,1[\\ \text{compact}}}}_{\text{fibré } \varphi\text{-équivariant sur } Y.}$ $\exists \varphi : M_I \xrightarrow{\sim} M_{\varphi(I)}$ où $\varphi(\rho) = \rho^q$

Rem: En fait "Y est de Stein": si $I \subset I'$ alors $B_{I'} \to B_I$ a une image dense

et on doit avoir φ-Modules$/_B \simeq$ fibrés vectoriels$/_Y$ φ-équivariants

$H^0(Y, \mathcal{E}) \longleftarrow \mathcal{E}$

Mais fibrés vectoriels φ-équivariants$/_Y \simeq$ fibrés sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$

Qu'est-ce-que $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$?

Facile de classifier les φ-modules de rang 1 sur B :

paramétrés par un entier $n \in \mathbb{Z}$ $\quad n \longmapsto (M_n, \varphi)$

où $M_n = B \cdot e$ et $\varphi(e) = \pi^n e$.

Donc $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$

$\qquad n \longmapsto \mathcal{L}^{\otimes n}$

où $\mathcal{L}$ = fibré en droites tel que $\mathbb{V}(\mathcal{L}) = (Y \times \mathbb{A}^1)/\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \ni 1$: φ sur Y, $\times \pi^{-1}$ sur $\mathbb{A}^1$

Donc, $\forall d \in \mathbb{Z}$ $\quad H^0(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}^{\otimes d}) = B^{\varphi = \pi^d}$.

Or il apparaît dans les travaux de Kedlaya et Hartl-Pink que si M = φ-module sur l'anneau de Robba alors $M^{\varphi = \pi^d} \neq 0$ pour $d \gg 0$

(En fait il s'agit de la première étape dans la preuve de leur théo. de classification)

$\rightsquigarrow$ donc "$\mathcal{L}$ est ample" $\qquad$ Car si $(M, \varphi) \leftrightarrow \mathcal{E}$ sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$

$$M^{\varphi = \pi^d} = H^0(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes d}).$$

[On va donc décréter que $\mathcal{L}$ est ample, poser $P = \bigoplus_{d \geq 0} B^{\varphi = \pi^d}$

et regarder $\mathrm{Proj}(P)$!!]

L'algèbre graduée P : F alg. clos.

$B = B_{]0,1[}$ $\supset$ φ bijectif

$B^{\varphi=\pi^d} := \{x \in B \,/\, \varphi(x) = \pi^d x\}$

Prop : (1) $B^{\varphi=\pi^d} = 0$ si $d<0$

(2) $B^{\varphi=Id} = E$

(3) $B^{\varphi=\pi^d} = (B^+)^{\varphi=\pi^d}$

$\to$ si $\varphi(x) = \pi^d x \implies \underbrace{\mathrm{Newt}(\varphi(x))} = \underbrace{\mathrm{Newt}(\pi^d x)}$

s'expriment en termes de $\mathrm{Newt}(x)$

$\implies \mathrm{Newt}(x)$ satisfait une éq. fonctionnelle

$\implies x$ satisfait à certaines contraintes. □

↑ par exemple $B^+ = \{x \in B \,/\, \mathrm{Newt}(x) \geq 0\}$

Ex : si $\varphi(x) = x$, λ = pente de $\mathrm{Newt}(x)$ alors $q\lambda = \lambda \implies \lambda = 0$.

$\implies$ la seule pente ~~non nulle~~ de $\mathrm{Newt}(x)$ est zéro. $\implies x \in B^b$

$\implies x \in (B^b)^{\varphi=Id} = E$ □

Déf: $P = \bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{B^{\varphi = \pi^d}}_{P_d}$ comme E-algèbre graduée.

P_d éléments homogènes de degré d.

$$P_0 = E$$

$$P = \bigoplus_{d \geq 0} \left(B^+\right)^{\varphi = \pi^d}.$$

Théorème: L'algèbre P est graduée factorielle d'éléments irréductibles les éléments non nuls de degré 1.

i.e. le monoïde abélien $\bigcup_{d \geq 0} P_d \setminus \{0\} / E^\times$ est libre sur $P_1 \setminus \{0\} / E^\times$.

Démonstration: Rappelons qu'on a défini

$$\mathrm{Div}^+(Y) = \Big\{ D = \sum_{y \in |Y|} \underset{\mathbb{N}}{\underset{\cap}{m(y)}} [y] \ / \ \forall I \subset]0,1[\text{ compact}, \ \mathrm{supp}(D) \cap |Y_I| \text{ fini} \Big\}$$

$$\circlearrowleft \varphi$$

$$\varphi\Big(\sum_y m(y)[y]\Big) = \sum_y m(y)\,[\varphi(y)].$$

$$\mathrm{div} : B \setminus \{0\} / B^\times \longrightarrow \mathrm{Div}^+(Y) \qquad \text{où } \mathrm{ord}_y : B^+_{dR,y} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

$$f \longmapsto \sum_{y \in |Y|} \mathrm{ord}_y(f)\,[y]$$

Déf : $\mathrm{Div}^+(Y/\!/\varphi^{\mathbb{Z}}) = \mathrm{Div}^+(Y)^{\varphi = Id}$

$= \{ D \in \mathrm{Div}^+(Y) \mid \varphi^* D = D \}$

* $\mathrm{Div}^+(Y/\!/\varphi^{\mathbb{Z}})$ est un monoïde abélien libre sur $|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}$

via $\begin{cases} |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathrm{Div}^+(Y/\!/\varphi^{\mathbb{Z}}) \\ y \bmod \varphi^{\mathbb{Z}} \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\varphi^n(y)] \end{cases}$

~~Att~~ * Remarquons que si $f \in B^{\varphi = \pi^d} \setminus \{0\}$ alors

$$\varphi(f) = \pi^d f \Rightarrow \underset{\underset{\varphi^* \mathrm{div}(f)}{\parallel}}{\mathrm{div}(\varphi(f))} = \underbrace{\mathrm{div}(\pi^d)}_{0 \text{ car } \pi \in B^\times} + \mathrm{div}(f)$$

$\Rightarrow \mathrm{div}(f) \in \mathrm{Div}^+(Y/\!/\varphi^{\mathbb{Z}})$.

* Le théorème résulte donc du théorème suivant

Th : Le morphisme de monoïdes

$$\bigcup_{d\geq 0} P_d \setminus \{0\} / E^\times \xrightarrow{\ div\ } \mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}) \leftarrow \text{libre}$$

est un isomorphisme.

dém :

Injectivité : On utilise que $B \setminus \{0\} / B^\times \xhookrightarrow{\ div\ } \mathrm{Div}^+(Y)$

Si $f \in P_d \setminus \{0\}$, $g \in P_{d'} \setminus \{0\}$ satisfont $div(f) = div(g)$

alors $f = ug$ où $u \in B^\times = (B^b)^\times$

$\uparrow$ Considérations sur les polygones de Newton

$$B^b = B_{[0,1]} = \{ f \in \underset{\underset{B_{]0,1[}}{\shortparallel}}{B} \mid \exists b \in \mathbb{Z}, \pi^b f \text{ bornée} \}$$

Mais alors $\left.\begin{array}{l} \varphi(f) = \pi^d f \\ \varphi(g) = \pi^{d'} g \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(u) = \pi^{d-d'} u$

Or, $(B^b)^{\varphi = \pi^{d-d'}} = \begin{cases} 0 \text{ si } d \neq d' \\ E \text{ si } d = d' \end{cases} \Rightarrow d = d'$ et $u \in E^\times$.

$$B^b = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n \,\middle|\, x_n \in F, \sup_n |x_n| < +\infty \right\} = \text{évident}$$

7

Surjectivité:

Utilise des produits de Weierstrass pour construire des diviseurs φ-invariants sur Y.

* Problème: Si $D \in \mathrm{Div}^+(Y)$ on ne sait pas si D est principal en général. Ceci-dit, si $\mathrm{Supp}(D) \subset |Y_{]0,\rho]}|$ pour un $\rho \in]0,1[$ c'est le cas car on peut former un produit de Weierstrass :

Si $D = \sum_{n \geq 0} [y_n]$ avec $y_n = (\pi - [a_n])$ $\quad 0 < |a_n| < 1$, $\lim_{+\infty} a_n = 0$

alors $\prod_{n\geq 0} \left(1 - \frac{[a_n]}{\pi}\right)$ C.V. dans B et a pour diviseur D.

$\Rightarrow$ le problème se situe au voisinage de $\rho = 1$

i.e. si $\mathrm{Supp}(D) \subset |Y_{[\rho,1[}|$.

* Dans notre situation $y \in |Y|$ $\quad y = (\pi - [z])$ où $z \in F$, $0 < |z| < 1$

On veut construire $f \in B^{\varphi=\pi} \setminus \{0\}$ tq. $\mathrm{div}(f) = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} [\varphi^n(y)]}_{D}$

On coupe le diviseur en deux :

$$D = \underbrace{\sum_{n\geq 0} [\varphi^n(y)]}_{} + \overbrace{\sum_{n<0} [\varphi^n(y)]}^{\text{support dans } |Y_{[\rho,1[}|}$$

si $\rho = \|y\| = |z|$ a son support dans $|Y_{]0,\rho]}|$ car $\|\varphi^n(y)\| = \rho^{q^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$a = \pi - [z]$ primitif de degré 1.

Posons $\Pi^+(a) = \prod_{n\geq 0} \left(1 - \frac{[z^{q^n}]}{\pi}\right) \in B$ produit convergent

$$= \prod_{n\geq 0} \left(\frac{\varphi^n(a)}{\pi}\right)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\Pi^+(a)) = \sum_{n\geq 0} [\varphi^n(y)] \\ \varphi(\Pi^+(a)) \cdot \frac{a}{\pi} = \Pi^+(a) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ on aimerait définir "$\Pi^-(a) = \prod_{n<0} \varphi^n(a)$"

qui aurait pour diviseur $\sum_{n<0} [\varphi^n(y)]$

et vérifierait $\varphi(\Pi^-(a)) = a\,\Pi^-(a)$

$\Longrightarrow$ si $\Pi(a) = \Pi^+(a)\,\Pi^-(a)$ alors $\varphi(\Pi(a)) = \pi\,\Pi(a)$

et aurait le bon diviseur

<u>Problème</u>: "$\prod_{n<0} \varphi^n(a)$" n'est pas convergeant.

<u>Comment le construire?</u> On sait que s'il existe alors

$$\mathcal{N}ewt\left(\prod_{n<0} \varphi^n(a)\right) = \begin{cases} +\infty \text{ sur }]-\infty, 0[\\ \\ \text{a pour pente } \dfrac{v(z)}{q^{n+1}} \text{ sur } [n, n+1] \text{ si } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ on doit avoir "$\prod_{n<0} \varphi^n(a)$" $\in B^b$.

$a \in A = W_{O_E}(O_F)$ $\qquad a = \pi - [z]$.

On aimerait définir $\prod_{n<0} (\pi - [z^{q^n}])$ par approximations successives:

$$\text{"} \prod_{n<0} \varphi^n(a) \bmod \pi = z^{\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^n} + \dots} = z^{\sum_{n<0} q^n} = z^{\frac{1}{q-1}} \text{" ne C.V. pas.}$$

$A/_{\pi A} = O_F$ $\qquad$ mais modulo π on peut définir $\prod_{n<0} \varphi^n(a)$ comme $\sqrt{\text{une}}$ solution

de l'équation de Kümmer $X^{q-1} - z$.

Supposons maintenant défini $\prod_{n<0} \varphi^n(a) \bmod \pi^h$, $h \geq 1$.

$$\left(1+\pi^{b}A \,/\, 1+\pi^{b+1}A\right)^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_a$$

$$1+\pi^{b}[x] \longmapsto x$$

" $\prod_{n<0} \varphi^{n}\left(1+\pi^{b}[x]\right) \bmod 1+\pi^{b+1}A$ "

devrait correspondre via la bijection précédente à

" $\sum_{n<0} \varphi^{n}(x) = x^{\frac{1}{q}} + x^{\frac{1}{q^2}} + \dots + x^{\frac{1}{q^n}} + \dots$ " ne C.V. pas.

Mais remarquons que $\left(\sum_{n<0} x^{q^n}\right)^{q} = \sum_{n<0} x^{q^n} + x$

$\Rightarrow$ on peut le définir comme solution de l'équation d'Artin-Schreier

$$X^{q} - X - x.$$

<u>Prop</u>: À un $E^{\times}_{-}$ multiple près il existe une unique solution dans $B^{b}_{,\varphi q}$ de l'équation fonctionnelle $\varphi(x) = ax$.] utilisé Fargues-F...

$\rightarrow$ résolution par approximations successives : Kümmer puis Artin-Schreier.

$\rightarrow$ on pose $\Pi^{-}(a)$ une telle solution (bien définie à un $E^{\times}_{-}$ multiple près)

et $\Pi(a) = \Pi^{+}(a) \cdot \Pi^{-}(a)$ $\square$