①

Cours M2
Jussieu
Sur la Courbe
Printemps 2014

6ème Cours

Rappels de la dernière fois

On a défini une E-algèbre graduée

$$P = \bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{B^{\varphi = \pi^d}}_{P_d} = \bigoplus_{d \geq 0} (B^+)^{\varphi = \pi^d}$$

$P_0 = E$

Th: F alg. clos. P est graduée factorielle d'éléments irréductibles de degré 1 i.e. le monoïde abélien

$$\bigcup_{d \geq 0} P_d \setminus \{0\} / E^\times \quad \text{est libre sur} \quad P_1 \setminus \{0\} / E^\times$$

En particulier $\forall x \in P_d$, $d > 0$, $\exists t_1, \dots, t_d \in P_1$ tq. $x = t_1 \dots t_d$.

Preuve: On construit un morphisme de monoïdes

$$\bigcup_{d\geq 0} P_d\setminus\{0\}/E^\times \xrightarrow{\ \mathrm{div}\ } \underbrace{\mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})}_{\text{abélien libre sur } |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}} := \mathrm{Div}^+(Y)^{\varphi=\mathrm{Id}}$$

$$|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$$

$$y \bmod \varphi^{\mathbb{Z}} \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\varphi^n(y)]$$

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{y\in|Y|} \mathrm{ord}_y(f)[y]$$

$$\mathrm{ord}_y : B^+_{dR,y} \longrightarrow \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$$

C'est un isomorphisme : Injectivité général, aucun rapport avec F alg. cl.

Surjectivité : <u>Produits de Weierstrass</u>

$$y = (\underbrace{\pi - [z]}_{a}) \qquad 0 < |z| < 1$$

On cherche $f \in P_1\setminus\{0\}$ tel que $\mathrm{div}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\varphi^n(y)]$

$$\Pi^+(a) = \prod_{n\geq 0} \frac{\varphi^n(a)}{\pi} = \prod_{n\geq 0}\left(1 - \frac{[z^{q^n}]}{\pi}\right)$$

$$\mathrm{div}(\Pi^+(a)) = \sum_{n\geq 0} [\varphi^n(y)]$$

$\Pi^-(a) =$ "$\prod_{n<0} \varphi^n(a)$" $\in B^b$ défini à un $E^\times$-multiple près

Comme l'unique solution non nulle dans B^b de

$$\varphi\left(\Pi^-(a)\right) = a\,\Pi^-(a)$$

$$\mathrm{div}\left(\Pi^-(a)\right) = \sum_{n<0} \left[\varphi^n(y)\right]$$

$\Pi(a) = \Pi^+(a)\cdot\Pi^-(a)$ convient. $\square$

<u>Lien avec le logarithme</u> – $E = \mathbb{Q}_p$. Idem pour tout E avec des Lubin–Tate.

<u>Rappel</u>: $V = \widehat{\mathbb{G}}_m(\mathcal{O}_F) = (1+m_F, \times) = \mathbb{Q}_p$–e.v.

$\varepsilon \in 1+m_F$, $\varepsilon \neq 1$, on pose $u_\varepsilon = \dfrac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon^{1/p}]-1} = 1 + [\varepsilon^{1/p}] + \dots + [\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}] \in A$ primitif de degré 1

Alors, $V \setminus \{0\} / \mathbb{Z}_p^\times = (1+m_F)\setminus\{1\} / \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\sim} |Y|$

$$\varepsilon^{\mathbb{Z}_p^\times} \longmapsto (u_\varepsilon)$$

et si C_ε = corps résiduel $= B / B u_\varepsilon$, via $F \xrightarrow{\sim} C_\varepsilon^b$

$$\varepsilon \longmapsto \text{générateur de } \mathbb{Z}_p(1) \text{ dans } C_\varepsilon$$

* Remarquons maintenant que $\Pi^+(a) = \prod_{n\geq 0} \frac{\varphi^n(a)}{\pi}$ existe dès que a primitif de degré 1 satisfait

$$a \equiv \pi \bmod W_{O_E}(m_F) \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{ccc} A_F = W_{O_E}(O_F) & \longrightarrow & W_{O_E}(k_F) \\ a & \longmapsto & \pi \end{array}$$

Car alors $\frac{a}{\pi} - 1 \in W_{O_E}(m_F)$ et $\forall x \in W_{O_E}(m_F)$ $\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \varphi^n(x) = 0}_{\text{pour la topologie faible de } A = \text{top. définie par } |\cdot|_\rho,\ \rho\in]0,1[.}$

Dem, $\Pi^-(a) \in B^b$ l'unique solution non nulle de $\varphi(\Pi^-(a)) = a\,\Pi^-(a)$ existe à un $E^\times$-multiple près.

* Or, $u_\varepsilon = 1 + [\varepsilon^{1/p}] + \dots + [\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}] \overset{\varepsilon \in 1+m_F}{\equiv} 1 + [1] + \dots + [1] \equiv p \bmod W_{O_E}(m_F)$

Que vaut $\Pi^+(u_\varepsilon)$?

$$u_\varepsilon = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon^{1/p}]-1}$$

$$\Pi^+(u_\varepsilon) = \prod_{n\geq 0} \frac{\varphi^n(u_\varepsilon)}{p} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\prod_{k=0}^{n} \frac{\varphi^k(u_\varepsilon)}{p}}$$

$$\frac{1}{p^{n+1}} \frac{\cancel{[\varepsilon]-1}}{[\varepsilon^{1/p}]-1} \times \frac{[\varepsilon^p]-1}{\cancel{[\varepsilon]-1}} \times \dots \times \frac{[\varepsilon^{p^n}]-1}{[\varepsilon^{p^{n-1}}]-1}$$

$$= \frac{1}{p^{n+1}} \frac{[\varepsilon^{p^n}]-1}{[\varepsilon^{1/p}]-1}$$

$$\Pi^+(u_\varepsilon) = \frac{1}{p\left([\varepsilon^{1/p}]-1\right)} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p^n}\left([\varepsilon^{p^n}]-1\right)$$

<u>Rappel</u>: $\widehat{\mathbb{G}_m}$ tq. $X \underset{\widehat{\mathbb{G}_m}}{+} Y = XY + X + Y$ $\quad \log_{\widehat{\mathbb{G}_m}}(T) = \log(1+T)$

$$\| $$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[p^n]_{\widehat{\mathbb{G}_m}}}{p^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+T)^{p^n}-1}{p^n}$$

produit de Weierstrass du log.

Comme fonction rigide analytique sur $\mathbb{D}_{\mathbb{Q}_p} = \{|T|<1$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi^+(u_\varepsilon) = \frac{1}{\varphi([\varepsilon^{1/p}]-1)} \log([\varepsilon])} \text{ dans } B^+$$

De plus, $\varphi([\varepsilon^{1/p}]-1) = [\varepsilon]-1 = ([\varepsilon^{1/p}]-1) \cdot u_\varepsilon$

$\Rightarrow$ on peut prendre $\Pi^-(u_\varepsilon) = \varphi([\varepsilon^{1/p}]-1)$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi(\varepsilon) = \log([\varepsilon]) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{([\varepsilon]-1)^n}{n} \in B^+}$$

$= \underbrace{t \text{ de Fontaine}}_{}$ associé à ε générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ dans C_ε.

C'est un produit de Weierstrass. Si $y = (u_\varepsilon)$

alors $\operatorname{div}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\varphi^n(y)]$

et $\operatorname{ord}_y(t) = 1 \Rightarrow t =$ une uniformisante de $B^+_{dR,y} = B^+_{dR}(C_y)$.

La suite exacte fondamentale F alg. clos

Prop: Soient $t_1, \dots, t_d \in P_1$ non nuls et $\overset{(a_1)}{\overset{\shortparallel}{y_1}}, \dots, \overset{(a_d)}{\overset{\shortparallel}{y_d}} \in |Y|$ classique. $\mathrm{div}(t_i) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\varphi^n(y_i)]$ ou encore $t_i = \boxed{\Pi(a_i)}$. Alors, la suite

$$0 \to E \prod_{i=1}^{d} t_i \longrightarrow \underbrace{B^{\varphi = \pi^d}}_{P_d} \longrightarrow B/B a_1 \dots a_d \longrightarrow 0$$

est exacte.

Ex: $t \in P_1$ $\quad 0 \to E t^d \longrightarrow B^{\varphi = \pi^d} \longrightarrow B^+_{dR,y} / t^d B^+_{dR,y} \longrightarrow 0$

$$\overset{\shortparallel}{B/a^d B} \text{ si } t = \Pi(a).$$

dem: Exactitude au milieu:

Si $f \in B^{\varphi = \pi^d}$ non nul vérifie $f \in B a_1 \dots a_d$

$$\Longrightarrow \mathrm{div}(f) \geq \sum_{i=1}^{d} \underbrace{[y_i]}_{\mathrm{div}(a_i)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{div}(f) \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n\left(\sum_{i=1}^{d} [y_i]\right)$$

$\uparrow$ $\mathrm{div}(f)$ φ-invariant

$$= \sum_{i=1}^{d} \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} [\varphi^n(y_i)]}_{\mathrm{div}(t_i)}$$

$$= \mathrm{div}\left(\prod_{i=1}^{d} t_i\right).$$

$$\Longrightarrow f = \lambda.\prod_{i=1}^{d} t_i \ , \ \lambda \in B$$

Mais $\varphi(f) = \pi^d f$ et $\varphi(t_i) = \pi t_i \Rightarrow \lambda \in B^{\varphi = \mathrm{Id}} = E$.

<u>Surjectivité:</u> Par un dévissage, il suffit de traiter le cas $d = 1$.

Cas $E = \mathbb{Q}_p$ (Idem E général avec des $\mathcal{L}.\mathcal{T}.$)

$$B^{\varphi = p} \xrightarrow{\ \theta\ } C = C_y \quad \text{où } y = (a)$$

$\varepsilon \in 1 + m_F$, $\log([\varepsilon]) \in B^{\varphi = p}$ et alors $\theta(\log([\varepsilon])) = \log(\underbrace{\theta([\varepsilon])}_{\in 1 + m_C})$.

C alg. clos $\Rightarrow \log : 1 + m_C \longrightarrow C$ est surjectif.

Si $x \in C$, pour $n >> 0$ $p^n x \in$ domaine de C.V. de exp

alors si $z \in 1 + m_C$ vérifie $z^{p^n} = \exp(p^n x)$, $\log z = x$.

Soit $x \in C$, $x = \log(z)$ avec $z \in 1 + \mathfrak{m}_C$

C alg. clos $\Rightarrow \exists\, \varepsilon \in C^{\flat}$ tel que $\varepsilon^{(0)} = z$. Via $F \xrightarrow{\sim} C^{\flat}$

$\varepsilon \in 1 + \mathfrak{m}_F$ et $x = \log\Big(\underbrace{\vartheta([\varepsilon])}_{\varepsilon^{(0)} = z}\Big) = \vartheta\big(\log([\varepsilon])\big)$ $\square$

<u>Rem</u>: On va utiliser la suite exacte fondamentale pour prouver que $X = \mathrm{Proj}(P)$ est une "courbe". Réciproquement, une fois la courbe construite on peut retrouver naturellement la suite exacte fondamentale ; X courbe $\mathcal{O}_X(1)$ fibré en droites

$$P_d = H^0(X, \mathcal{O}_X(d))$$

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\prod_{i=1}^{d} t_i} \mathcal{O}_X(d) \to \mathcal{F} \to 0$$ suite exacte de faisceaux cohérents/X

$\mathcal{F}$ cohérent de torsion

+ application de $H^0(X, -)$ et utilisation de $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Corollaire : $t \in P_1$ non nul. $C = C_y$ où $\mathrm{div}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\varphi^n(y)]$

Il y a un isomorphisme de E-alg. graduées.

$$\begin{array}{ccc} P/tP & \xrightarrow{\ \sim\ } & \{ f \in C[T] \,/\, f(0) \in E \} \\ \| & & \\ E \oplus \bigoplus_{d \geq 1} P_d / tP_{d-1} & & \\ \begin{smallmatrix} x \bmod tP_{d-1} \\ \cap \\ P_d \end{smallmatrix} & \longmapsto & \vartheta_y(x) T^d . \end{array}$$

Rappel du Prof :

Un cône := Schéma affine X muni d'une action du

Schéma en monoïdes $(\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}, \times)$ au dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$

$$\mu : X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \longrightarrow X, \quad \lambda \in \mathbb{A}^1, x \in X \quad \lambda . x \in X.$$

Se donner un cône $\Leftrightarrow$ Se donner $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ une algèbre graduée en degrés positifs.

Alors, $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{A}^1$ agit sur A_d via multiplication par λ^d.

i.e. $\mu^*: A \longrightarrow A[T]$

$$\sum_{\substack{i\geq 0 \\ \cap \\ A_i}} a_i \longmapsto \sum_{i\geq 0} a_i T^i$$

Soit $A^+ = \bigoplus_{d>0} A_d$ l'idéal d'augmentation.

$X \supset \mathbb{A}^1$ ~~mais~~ restriction $X \supset \mathbb{G}_m$

$X^{\mathbb{G}_m}$ = plus grand sous-schéma fermé sur lequel $\mathbb{G}_m$ agit trivialement

$= V(A^+) \hookrightarrow X$ "sommet du cône"

Il y a une rétraction

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{\mathbb{G}_m} \\ \| \; x & \mapsto & 0 \cdot x \quad \| \\ \mathrm{Spec}(A) & \xrightarrow[\text{induit via } A_0 \to A]{} & \mathrm{Spec}(A_0) \end{array}$$

où $0 \in \mathbb{A}^1$

$A_0 = A/A^+$.

Résultat : Le quotient catégorique

$$\mathrm{Proj}(A) := (X \setminus X^{\mathbb{G}_m})/\mathbb{G}_m$$

existe dans la catégorie des schémas. De plus

$$X \setminus X^{\mathbb{G}_m} \xrightarrow{\pi} \mathrm{Proj}(A)$$

est un $\mathbb{G}_m$-torseur Zariski localement trivial.

Description: $X \setminus X^{\mathbb{G}_m} = \bigcup_{\substack{d>0 \\ t \in P_d}} D(t)$

$D(t)$ ↻ invariant sous l'action de $\mathbb{G}_m$ car t homogène

$D(t) = \mathrm{Spec}\left(A\left[\frac{1}{t}\right]\right)^{\circlearrowleft \mathbb{G}_m}$ ← donnée par la graduation de $A\left[\frac{1}{t}\right]$

↓

$\lambda \in \mathbb{G}_m$ agit via mult. par λ^d sur $A\left[\frac{1}{t}\right]_d$

$$D^+(t) := D(t)/\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\Big(\underbrace{A\left[\tfrac{1}{t}\right]^{\mathbb{G}_m}}_{A\left[\frac{1}{t}\right]_0}\Big) = \mathrm{Spec}\left(A\left[\tfrac{1}{t}\right]_0\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Proj}(A) = \bigcup_{\substack{d>0 \\ t \in P_d}} D^+(t)$$

De plus le $\mathbb{G}_m$-torseur $D(t) \longrightarrow D^+(t)$ est trivial.

$*$ $|\mathrm{Proj}(A)| \simeq$ ~~[illegible]~~ fermés irréductibles de $|\mathrm{Proj}(A)|$

$\simeq$ fermés irréductibles $\mathbb{G}_m$-invariants de $\mathrm{Spec}(P) \setminus V(P^+)$

$\mathbb{G}_m$-torseur loc trivial pour Zariski

$\simeq$ fermés irred. de $\mathrm{Spec}(P)$, Z, $\mathbb{G}_m$-invariants et t.q. $Z \not\subset V(P^+)$

$\simeq$ Idéaux premiers homogènes de P ne contenant pas P^+.

* Se donner un faisceau q.c. $\underbrace{(\mathbb{A}^1, \times)\text{-équivariant}}$ $\mathcal{E}$

action de $(\mathbb{A}^1, \times)$ compatible à l'action sur X i.e. via $X \times \mathbb{A}^1 \underset{pr_1}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} X$

iso. $\mu^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} pr_1^* \mathcal{E}$ + conditions naturelles définissant une action d'un monoïde

$$\Updownarrow$$

Se donner un A-module gradué en degrés ≥ 0

$M = \bigoplus_{d \geq 0} M_d$ $\qquad M = \Gamma(X, \mathcal{E})$

Si $\mathcal{E}$ est un tel faisceau $\mathcal{E}_{|X \setminus X^{\mathbb{G}_m}}$ est $\mathbb{G}_m$-équivariant

$\Longrightarrow$ descend via le $\mathbb{G}_m$-torseur $X \setminus X^{\mathbb{G}_m} \longrightarrow \mathrm{Proj}(A)$

en un faisceau q.c. $\pi_*(\mathcal{E}_{|X \setminus X^{\mathbb{G}_m}})^{\mathbb{G}_m} =: \widetilde{M}$

$$\Gamma(D^+(f), \widetilde{M}) = \Gamma(D(f), \mathcal{E})^{\mathbb{G}_m} = M\left[\frac{1}{f}\right]^{\mathbb{G}_m} = M\left[\frac{1}{f}\right]_0.$$

* Si $\chi : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ est un caractère cela définit un fibré en droites $\mathcal{L}_\chi$ sur $\mathrm{Proj}(A)$ de réalisation géométrique

$$\mathbb{V}(\mathcal{L}_\chi) = \left(X \setminus X^{\mathbb{G}_m} \times \mathbb{A}^1 \right) / \mathbb{G}_m$$

$\lambda \in \mathbb{G}_m$ agit par multiplication par $\chi(\lambda)^{-1}$.

Si $\chi(\lambda) = \lambda^b$, $b \in \mathbb{Z}$. Alors $\mathcal{L}_\chi = \widetilde{P[b]} =: \mathcal{O}(b)$.

Alors, le $\mathbb{G}_m$-torseur s'identifie à

$$\begin{tikzcd}
X \setminus X^{\mathbb{G}_m} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Proj}(A) \\
\mathbb{V}(\mathcal{O}(1)) \setminus \underbrace{\{0\}}_{\text{section nulle.}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$