1

Cours n°7
M2 Jussieu
2014

F alg. clos

$$P = \bigoplus_{d \geq 0} B^{\varphi = \pi^d} \qquad X = \mathrm{Proj}(P)$$

<u>Rappels:</u> * P graduée factorielle + éléments irréductibles de degré 1

* Si $t \in P_1 \setminus \{0\}$ $\quad P/tP \xrightarrow{\sim} \{ f \in C_y[T] \,/\, f(0) \in E \}$

$y \in |Y|,\ t(y) = 0$ $\quad$ iso. de E-alg. graduées. $\quad \{ f \in C_y[T] \,/\, f(0) \in E \} = D_y$

<u>Th:</u> * X est un schéma noethérien régulier de dimension 1

* Si $t \in P_1 \setminus \{0\}$ $\quad V^+(t) = \{\infty_t\}$ point fermé de X

$$\text{et } X \setminus \{\infty_t\} = \mathrm{Spec}\Big(\underbrace{B[\tfrac{1}{t}]^{\varphi = \mathrm{Id}}}_{\text{principal}} \Big)$$

<u>dem:</u> $V^+(t) = \mathrm{Proj}(P/tP) \simeq \mathrm{Proj}(D_y)$

On calcule facilement que le seul idéal homogène premier ne contenant pas l'idéal d'augmentation de D_y est l'idéal nul.

$\Rightarrow |V^+(t)| =$ un seul point.

De plus $\mathrm{Proj}(D_y) = \mathrm{Spec}\left(D_y\left[\frac{1}{T}\right]_0\right) = \mathrm{Spec}(C_y)$

il y a un seul point $\in D^+(T)$

via $C_y \xrightarrow{\sim} D_y\left[\frac{1}{T}\right]_0$

$3 \mapsto \frac{3}{T}$

$\Rightarrow V^+(F) = \{\infty_t\}$ point fermé.

* $B_e := P\left[\frac{1}{F}\right]_0 = B\left[\frac{1}{F}\right]^{\varphi = Id}$ est factoriel d'éléments irréductibles les $\frac{H}{F}$ où $t' \in P_1 \setminus Et$.

De plus, si $t' \in P_1 \setminus Et$

$$B_e / \left(\frac{H}{F}\right) = P/t'P\left[\frac{1}{\bar{t}}\right]_0 \quad \text{où } \bar{t} = t \bmod t' \in (P/t'P)_1$$

$$\simeq C_{y'} \quad \text{si } t'(y') = 0.$$

si $a \in (D_{y'})_1$ $\quad D_{y'}\left[\frac{1}{a}\right]_0 = C_{y'}$.

Donc, l'idéal maximal engendré par n'importe quel élément irréductible est maximal $\Rightarrow$ B_e est principal $\square$

Prop: $f \in E(X)^\times$, $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$

dem: $t \in P_1 \setminus \{0\}$ fixé. $E(X) = \mathrm{Frac}(B_e)$ où $B_e = B[\frac{1}{t}]^{\varphi = Id}$

Il suffit alors de montrer le pour $f \in B_e \setminus \{0\}$

Si $f \in E^\times$ c'est clair car alors $\mathrm{div}(f) = 0$.

Sinon, $\exists d \geq 1$ $\quad f = \dfrac{t'_1 \dots t'_d}{t^d}$ $\quad t'_1, \dots, t'_d \in P_1 \setminus \{0\}$

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^{d} [\infty_{t'_i}] - d[\infty_t] \Rightarrow \text{de degré } 0 \quad \square$$

Prop: Si $\mathrm{div}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\varphi^n(y)]$

$$\widehat{\mathcal{O}_{X,\infty_t}} \xrightarrow{\sim} B^+_{dR,y}$$

dem: $\mathcal{O}_{X,\infty_t} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in P \text{ homogènes de m̂ degré et } b \notin tP \right\} \subset \mathrm{Frac}(P) \subset \mathrm{Frac}(B) \subset B_{dR,y}$

$\mathcal{O}_{X,\infty_t} \to B^+_{dR,y} \subset B_{dR,y}$

car $b \notin Pt \Leftrightarrow b(y) \neq 0$.

$\mathcal{O}_{X,\infty_t} \subset B^+_{dR,y}$ inclusion d'anneaux de valuation.

$\hat{\mathfrak{m}}$ uniformisante $\underbrace{\frac{t}{t'}}_{\text{unif. de } B^+_{dR,y} \text{ car } \operatorname{ord}_y\left(\frac{t}{t'}\right) = 1}$ où $t' \in P_1 \setminus \mathbb{E}t$

et iso. au niveau des corps résiduels

$\Longrightarrow$ iso. sur les complétés $\square$

Rappels sur les fibrés vectoriels / courbe

X schéma noethérien régulier de dimension 1 intègre.

$\infty \in |X|$ point fermé. η point générique $K := \mathcal{O}_{X,\eta}$

On suppose de plus que $X \setminus \{\infty\} = \operatorname{Spec}(A)$ soit affine | $\mathcal{O}_{X,\infty} = $ A.V.D. $\ni t$ uniformisante

$A =$ anneau de Dedekind.

Fibrés: $\mathrm{Fib}_X = \mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini.

$$\mathcal{C} = \left\{ (M, W, u) \;\middle|\; \begin{array}{l} M = B\text{-module projectif de type fini} \\ W = \widehat{\mathcal{O}_{X,\infty}}\text{-module libre de rang fini} \\ u : M \otimes_B \widehat{\mathcal{O}_{X,\infty}}\left[\frac{1}{t}\right] \xrightarrow{\sim} W\left[\frac{1}{t}\right] \end{array} \right\}$$

Alors, $\mathrm{Fib}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$

$$\mathcal{E} \longmapsto \left(\Gamma(X \setminus \{\infty\}, \mathcal{E}), \widehat{\mathcal{E}_\infty}, \mathrm{can}\right)$$

où can est donné par

$$\Gamma(X \setminus \{\infty\}, \mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{E}_\eta = \mathcal{E}_\infty\left[\tfrac{1}{t}\right]$$

$$\left[\underset{=}{\mathcal{E}_n} : \mathcal{O}_X(b[\infty]) \longleftrightarrow \left(A, t^{-b}\widehat{\mathcal{O}_{X,\infty}}, \mathrm{can}\right)\right]$$

De plus, si $\mathcal{E} \longleftrightarrow (M, W, u)$

$$RP(X, \mathcal{E}) \simeq \left[\overset{0}{M \oplus W} \longrightarrow \overset{+1}{W\left[\tfrac{1}{t}\right]}\right]$$
$$(m, w) \longmapsto u(m) - w$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{E}) &= u(M) \cap W \\ H^1(X, \mathcal{E}) &= W\left[\tfrac{1}{t}\right] / W + u(M) \end{aligned}}$$

* Supposons maintenant de plus que X est "Complète" i.e. on a une fonction

$$\deg : |X| \to \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ vérifiant } \forall f \in K^\times, \deg(\mathrm{div}(f)) = 0$$

On suppose de plus que $\deg(\infty) = 1$

$$\Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{F}_q =: E \subset K$$
$$\| $$
$$\{0\} \cup \{f \in K^\times / \operatorname{div}(f) \geq 0\}$$

Alors, $\deg := -\operatorname{ord}_\infty : A \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$

$\uparrow$ valuation sur K

$$E = A^{\deg \leq 0}$$
$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d[\infty])) = A^{\deg \leq d}$$
$$H^1(X, \mathcal{O}_X(d[\infty])) = K \big/ \cancel{\ } t^d \mathcal{O}_{X,\infty} + A$$

* En particulier $\boxed{H^1(X, \mathcal{O}_X) = K \big/ \mathcal{O}_{X,\infty} + A}$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0 \iff \forall x, y \in A \text{ avec } y \neq 0,\ \exists a \in A \text{ tq. } \frac{x}{y} - a \in \mathcal{O}_{X,\infty}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\deg\left(\frac{x}{y} - a\right) \leq 0$$

$$\Updownarrow$$

$(A, \deg)$ presque euclidien. $\qquad$ $\cancel{\deg(x)}$ $\deg(x - ay) \leq \deg(y)$

$$\boxed{H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = K \big/ t\mathcal{O}_{X,\infty} + A}$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = 0 \iff \forall x, y \in A,\ y \neq 0,\ \exists a \in A \quad \deg\left(\frac{x}{y} - a\right) < 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(A, \deg) \text{ euclidien.} \qquad\qquad \deg(x - ay) < \deg(y)$$

* $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0 \Rightarrow \deg : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ se factorise en un morphisme $\deg : \mathrm{Div}(X)/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Div}(X)/\sim \;=\; \mathrm{Pic}(X)$$

On a alors

$$\begin{array}{ccc} Cl(A) = \mathrm{Div}(\mathrm{Spec}(A))/\sim & \xrightarrow{\ \sim\ } & \mathrm{Div}^0(X)/\sim \;=\; \mathrm{Pic}^0(X) \\ \| & & \\ \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(A)) \quad [D] & \longmapsto & [D - \deg D \cdot [\infty]] \end{array}$$

Ainsi, $\left[\text{A de Dedekind est principal} \iff \mathrm{Pic}^0(X) = 0 \iff \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow[\deg]{\sim} \mathbb{Z}.\right]$

Retour à la courbe $X = \mathrm{Proj}(P)$ Complété de corps de définition $E = H^0(X, \mathcal{O}_X)$

Prop : $* H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ i.e. $(B_e, \deg)$ est presque euclidien

$* \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow[\sim]{\deg} \mathbb{Z}$

↳ on vient de le voir car B_e est principal.

Le fait que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$: $H^1(X, \mathcal{O}_X) = B_{dR,y} / B^+_{dR,y} + B_e$

où $B_e = B[\frac{1}{t}]^{\varphi = \mathrm{Id}}$, $t \in P_1 \setminus \{0\}$.

Il suffit de voir que si $d \geq 1$, $B_e^{\deg \leq d} \longrightarrow t^{-d} B^+_{dR} / t^{-d+1} B^+_{dR}$

est surjectif. Mais cela résulte de ce que

$P_d \longrightarrow B^+_{dR} / t^d B^+_{dR}$ est surjectif (suite exacte fondamentale)

Prop : $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) \neq 0$ i.e. $(B_e, \deg)$ n'est pas euclidien

$\to H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0 \Rightarrow B_{dR} = B^+_{dR} + B_e$

Donc $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = B_{dR} / tB^+_{dR} + B_e = B^+_{dR} + B_e / tB^+_{dR} + B_e$

$= B^+_{dR} / tB^+_{dR} + \overbrace{B_e \cap B^+_{dR}}^{E} = C_y / E$. □

Indépendance du choix de l'uniformisante

$\overline{\mathbb{F}_q}$ = Clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ dans F

$\shortparallel$

alg. clos car F l'est.

Si π, π' sont deux uniformisantes de E

$$\pi'/\pi \in W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}_q})^\times \Rightarrow \exists\, u \in W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}_q})^\times \text{ tq. } \frac{\pi'}{\pi} = u^{\varphi - 1}$$

Alors

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ P_{E,\pi,d}}}{B^{\varphi = \pi^d}} \xrightarrow{\sim} B^{\varphi = \pi'^d} = P_{E,\pi',d}.$$

$$x \longmapsto u^d x$$

Ainsi, si $L_{\pi,\pi'} = \{ u \in W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}_q})_{\mathbb{Q}} \mid \varphi(u)\pi = \pi' u \}$ = E-e.v. de dim. 1

$$\bigoplus_{d \geq 0} P_{E,\pi,d} \otimes L_{\pi,\pi'}^{\otimes d} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{d \geq 0} P_{E,\pi',d}$$

$\Rightarrow$ m̃ Proj. (Canoniquement).

Extension des scalaires

<u>Cas non-ramifié:</u> $h \geq 1$, $E_h = W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}_q})^{\varphi_E^h = \mathrm{Id}}$ l'extension N.R. de degré h

$$B_{E_h} = B_E \text{ mais } \varphi_{E_h} = \varphi_E^h.$$

$$\Rightarrow P_{E_h,\pi} = \bigoplus_{d\geq 0} B_E^{\varphi_E^h = \pi^d}$$

Il y a une application $B_E^{\varphi_E = \pi^d} \hookrightarrow B_E^{\varphi_E^h = \pi^{hd}}$

qui induit un iso. $B_E^{\varphi_E = \pi^d} \underset{E}{\otimes} E_h \xrightarrow{\sim} B_E^{\varphi_E^h = \pi^{hd}}$ (Hilbert 90).

$$\Rightarrow P_{E,\pi,\bullet} \underset{E}{\otimes} E_h = P_{E_h,\pi,h\bullet} \Rightarrow \text{m } \mathrm{Proj}.$$

De plus via

$$\begin{array}{c} X_{E_h} = X_E \underset{E}{\otimes} E_h \\ \big\downarrow \pi_{E_h,E} \\ X_E \end{array} \qquad \boxed{\pi_{E_h,E}^* \mathcal{O}_{X_E}(d) = \mathcal{O}_{X_{E_h}}(hd).}$$

<u>Cas ramifié</u>: exo.

Quelques remarques sur le cas F parfait quelconque

$$X_{F,E} = \mathrm{Proj}\left(P_{F,E,\pi}\right)$$

* C'est encore une courbe complète, mais en général pour $x \in |X_{F,E}|$ $\deg(x) > 1$.

$$|Y_{F,E}| / \varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X_{F,E}|$$

via cet iso. les fonctions degrés correspondent.

* Si $t \in P_1 \setminus \{0\}$, $B_{F,e} = B\left[\frac{1}{t}\right]^{\varphi = Id}$ c'est un anneau de Dedekind qui n'est pas principal en général.

$$B_{F,e} = B_{\hat{\bar{F}},e}^{G_F}$$

et si I est un idéal non nul de $B_{F,e}$

$$B_{\hat{\bar{F}},e} I = \text{idéal principal de } B_{\hat{\bar{F}},e} = (f)$$

$$\forall \sigma \in G_F, \quad f^{\sigma} = \underset{\underset{B_{\hat{\bar{F}},e}^{\times} = E^{\times}}{\cap}}{\chi(\sigma)} f \qquad \chi : G_F \to E^{\times} \text{ caractère } C^0.$$

Alors cela définit un iso.

$$\boxed{Cl(B_{F,e}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G_F, E^{\times})}$$

* En fait, lorsque F n'est pas alg. clos le choix d'un "fibré ample" pour définir l'algèbre graduée $P_{F,E,?}$ est important.

<u>Explication:</u> * Notons $\varphi\text{-Mod}_{B_F}$ = B_F-modules projectifs de type fini + automorphisme φ-linéaire.

* Soit $\mathcal{R}_F := \varinjlim_{\rho \to 0^{>}} B_{F,]0,\rho]}$ = anneau de Robba.

$$\mathcal{R}_F \text{ est de } \underbrace{\text{Bezout}}_{\text{tout idéal de type fini est principal}} \text{ car } \forall \rho \in]0,1[, \underbrace{B_{F,]0,\rho]} \text{ l'est}}$$

Raison: tout diviseur $D \in \mathrm{Div}^+(Y_{]0,\rho]})$ est principal (on peut former des produits de Weierstrass)

$$\text{Soit } \overset{\circlearrowright \varphi \text{ bijectif}}{\mathcal{E}_F^{\dagger}} = \varinjlim_{\rho \to 0^{>}} B_{F,[0,\rho]} \subset \varinjlim_{\rho \to 0^{>}} \overset{\circlearrowright \varphi \text{ bijectif car } \varphi: B_{]0,\rho]} \xrightarrow{\sim} B_{]0,\rho^p]}}{B_{F,]0,\rho]}} = \mathcal{R}_F$$

différence : on demande la méromorphie en 0

$$\Big(\mathcal{E}_F^{\dagger}, \overset{\text{"ord}_0\text{"}}{v_\pi}\Big) = \text{Corps valué Hensélien de Complété } (\mathcal{E}_F, v_\pi).$$

$\hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}_F^{\dagger}}^{\dagger} = \{v_\pi \geq 0\}$ est Hensélien

7

<u>Rappel</u> : $B_{[0,\rho]} = \{x \in B_{]0,\rho]} \mid \exists b \in \mathbb{Z},\ \pi^b x \text{ bornée i.e. } \sup_{\rho' \in]0,\rho]} |\pi^b x|_{\rho'} < +\infty\}$

$\rightarrow$ c'est pourquoi on appelle parfois $\mathcal{E}_F^{\dagger}$ Robba borné $\mathcal{R}_F^b$.

$- \otimes_{\mathcal{E}_F^\dagger} \mathcal{E}_F = \widehat{(-)}$ complétion

De plus, $\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{E}_F^\dagger} \xrightarrow{\sim} \underbrace{\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{E}_F}}_{\text{classifiés par Dieudonné-Manin}}$ $\qquad \mathcal{E}_F = W_{O_E}(F)_{\mathbb{Q}}$.

pente de Dieudonné-Manin 0

En particulier $\varphi\text{-}\mathrm{Mod}^0_{\mathcal{E}_F^\dagger} \xrightarrow{\sim} \underbrace{\mathrm{Rep}_E(G_F)}_{\text{représentation c° de } G_F \text{ à valeurs dans un } E\text{-e.v. de dim. finie}}$

"Isocristaux racines de l'identité"

$$(D,\varphi) \longmapsto \left(D \otimes_{\mathcal{E}_F} \mathcal{E}_{\hat{\bar{F}}}\right)^{\varphi = \mathrm{Id}} \circlearrowleft G_F$$

$$\left(\left(V \otimes_E \mathcal{E}^\dagger_{\hat{\bar{F}}}\right)^{G_F}, \mathrm{Id} \otimes \varphi\right) \longleftarrow\!\!\shortmid V$$

$*$ On a donc $\mathrm{Pic}\left(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{E}_F^\dagger}\right) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$ $\qquad$ deg = opposé de la pente de Dieudonné-Manin.

groupe des classes d'iso., loi de groupe $= \otimes$, inverse $= (-)^\vee$

$$\boxed{\mathrm{Pic}^0\left(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{E}_F^\dagger}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\left(G_F, E^\times\right)}$$

De plus, $\mathcal{R}_F^\times = (\mathcal{E}_F^\dagger)^\times$ car $B_{]0,\rho]}^\times = B_{[0,\rho]}^\times$

"sans zéros au voisinage de 0 ⇒ ~~[illegible]~~ méromorphe en 0"

$\Rightarrow \forall (M,\varphi) \in \underbrace{\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{R}_F}}$ de rang 1

$\mathcal{R}_F$-modules libres de type fini ⇐ projectifs de type fini ← $\mathcal{R}_F$ - Bezout
+ automorphisme φ-linéaire

Si $M = \mathcal{R}_F . e$. $\varphi(e) = \lambda e$, $\lambda \in \mathcal{R}_F^\times = (\mathcal{E}_F^\dagger)^\times$

On peut définir $\deg(M,\varphi) = -v_\pi(\lambda)$.

Cela définit $\mathrm{Pic}(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{R}_F}) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$

Alors,
$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}^0(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{E}_F^\dagger}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Pic}^0(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{R}_F}) \\ \downarrow = & & \\ \mathrm{Hom}(G_F, E^\times) & & \end{array}}$$

Et
$$\boxed{\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_F} \xrightarrow[\sim]{-\otimes_{B_F}\mathcal{R}_F} \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{R}_F}}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{Pic}\left(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_F}\right) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \\ \\ \mathrm{Pic}^0\left(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_F}\right) \simeq \mathrm{Hom}\left(G_F, E^\times\right) \end{array}\right.$$

et

$$(M, \varphi) \longmapsto \underbrace{\left(M \underset{B_F}{\otimes} B_{\hat{\overline{F}}}\right)^{\varphi = \mathrm{Id}}}_{E\text{-e.v. de dim. } 1} \circlearrowleft G_F$$

Ex: F alg. clos $\Rightarrow \mathrm{Pic}\left(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_F}\right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$

$$\left[\left(B_F, \pi^{-d}\varphi\right)\right] \longleftarrow d$$

Si $\underbrace{\mathbb{L} = (M, \varphi)}_{\text{de rang } 1.} \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_F}$ posons $H^0(\mathbb{L}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, \mathbb{L}) = M^{\varphi = \mathrm{Id}}$.

Déf: $\mathbb{L} \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_F}$ de rang 1 et de degré > 0 on pose

$$P_{F, E, \mathbb{L}} := \bigoplus_{d \geq 0} H^0\left(\mathbb{L}^{\otimes d}\right)$$

$\mathcal{L} = [\mathbb{L}] \in \mathrm{Pic}(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_F})$

$X_{F,E,\mathcal{L}} := \mathrm{Proj}(P_{F,E,\mathbb{L}})$ ne dépend clairement que de la classe d'iso. de $\mathbb{L}$.

Ex: $\mathbb{L} = (B_F, \pi^{-1}\varphi)$ $\quad P_{F,E,\mathbb{L}} = P_{F,E,\pi}$.

Th: $X_{F,E,\mathcal{L}}$ ne dépend pas canoniquement du choix de $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_F})$ de degré > 0.

$\rightarrow$ Conséquence de ce que on a le [Th: $\deg(\mathbb{L}) > 0 \Rightarrow H^0(\mathbb{L}) \neq 0$.]

$\Rightarrow \forall \mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ de degré > 0 $\quad \mathrm{Hom}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2^{\otimes b}) \neq 0$ pour $b >> 0$

et $\mathrm{Hom}(\mathbb{L}_2, \mathbb{L}_1^{\otimes b}) \neq 0$ " "

$X_{F,E} \underset{\uparrow}{=} X_{F,E,\mathcal{L}}$ indépendamment du choix de $\mathcal{L}$.

De plus, $P_{F,E,\mathbb{L}}[1]$ définit un fibré sur $X_{F,E}$ via.

Cela définit l'iso. ~~$\mathrm{Pic}(X_{F,E})$~~ $\mathrm{Pic}(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_F})^{\deg>0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X_{F,E})^{\deg>0}$.

Autres interprétations de la Courbe

$$* \mathcal{M}(Y) := \varprojlim_{\substack{I \subset]0,1[\\ \text{Compact}}} \operatorname{Frac}(B_I)$$

$\parallel$

Corps des fonctions méromorphes sur Y.

Fait : $\mathcal{M}(Y) = \operatorname{Frac}(B)$ i.e. toute fonction méromorphe est quotient de deux fonctions holomorphes.

φ bijectif

Def : $\mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}) = \mathcal{M}(Y)^{\varphi = \mathrm{Id}}$.

Fait : $\underbrace{E(X)}_{\text{Corps des fonctions rationnelles sur } X.} \subset \operatorname{Frac}(P) \subset \operatorname{Frac}(B) = \mathcal{M}(Y)$

$E(X) = \left\{ \frac{x}{y} \;/\; x, y \in P,\ y \neq 0,\ \text{homogènes de m̂ degré} \right\} \subset \mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$

Prop : $E(X) = \mathcal{M}(Y)$.

Alors, $\forall y \in |Y|$ $\mathrm{ord}_y : \mathcal{M}(Y) \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ valuation.

$$\begin{cases} |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \{\text{valuations sur } \mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})\} \\ [y] \longmapsto \mathrm{ord}_y|_{\mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})} \end{cases}$$

Alors, $\{\text{ouverts de } X\} = \emptyset \cup \{\text{Complémentaires d'ensembles finis de } |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}\}$

Si $U \subset |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}$ complémentaire d'un ensemble fini alors

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \{ f \in \mathcal{M}(Y) \,/\, \forall [y] \in U,\ \mathrm{ord}_y(f) \geq 0 \}.$$

* Quotient d'un ind-schéma :

Th : Il y a un morphisme naturel de Ind-schémas

$$\varinjlim_{\substack{I \subset]0,1[\\ \text{compact}}} \mathrm{Spec}(B_I) \longrightarrow X$$

φ-invariant et qui identifie X à un quotient catégorique.

De plus, $\mathrm{Spec}(B_I) \to X$ est flat, fidèlement flat lorsque $I = [\rho_1, \rho_2]$ avec $\rho_1 \leq \rho_2^{q}$.