①

Cours M2
n°8
Jussieu
2014

Filtrations de Harder-Narasimhan

Cf. Yves André "Slope Filtrations"

Catégories exactes

Notion introduite par Quillen : catégorie additive dans laquelle on dispose d'une "bonne notion de suite exacte".

Ex. Canonique : $\mathcal{C}$ = sous-catégorie d'une catégorie abélienne $\mathcal{D}$. Stable par extensions i.e. si $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{D}$ tq. $A', A'' \in \mathcal{C}$ alors $A \in \mathcal{C}$.
On dit alors que $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie exacte de $\mathcal{D}$.

Ex : * X schéma. $\mathrm{Fib}_X = \mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini
$\cap$ ss. cat. exacte.
Qcoh_X = abélienne

* K Corps $\mathrm{VectFil}_K$ = Catégorie des K-e.v. de dim. finie V munis d'une filtration décroissante $(\mathrm{Fil}^i V)_{i \in \mathbb{Z}}$

vérifiant : $\mathrm{Fil}^i V = \begin{cases} V & \text{si } i \ll 0 \\ 0 & \text{si } i \gg 0 \end{cases}$

$\mathrm{VectFil}_K \subset$ Cat. abélienne des foncteurs $(\mathbb{Z}, \leq)^{op} \longrightarrow \mathrm{Vect}_K$

ss-cat. exacte

Vect_K : K-e.v. de dim. finie

i.e. $\forall i \in \mathbb{Z}$, $V^i \in \mathrm{Vect}_K$

$\cdots \longrightarrow V^{i+1} \longrightarrow V^i \longrightarrow V^{i-1} \to \cdots$

Une suite $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ d'e.v. filtrés est exacte ssi

$\forall i \in \mathbb{Z}$, $0 \to \mathrm{Fil}^i V' \to \mathrm{Fil}^i V \to \mathrm{Fil}^i V'' \to 0$ est exacte.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie exacte : un mono. $X \to Y$ est strict s'il se trouve

dans une suite exacte $0 \to X \to Y \to Z \to 0$

Idem : épi. stricts.

Ex. : * Dans Fib_X un morphisme $\mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{E}'$ est :

* un mono. strict ssi $\mathcal{E} \overset{u}{\hookrightarrow} \mathcal{E}'$ est localement facteur direct

* un épi. strict ssi c'est un épi. de faisceaux.

* Dans $\mathrm{VectFil}_K$, un morphisme $\mathrm{Fil}^\bullet V \to \mathrm{Fil}^\bullet V'$ est :

* un mono. ssi $V \hookrightarrow V'$ injectif

* un mono. strict ssi $V \subset V'$ et $\mathrm{Fil}^i V = \mathrm{Fil}^i V' \cap V$.

* un épi. ssi $V \twoheadrightarrow V'$

* un épi. strict ssi $\forall i \in \mathbb{Z}$, $Fil^i V \twoheadrightarrow Fil^i V'$.

Filtrations de H.N. :

$\mathcal{C}$ = Catégorie exacte. On la suppose munie de deux fonctions

$$rg : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$$
$$deg : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$

additives : si $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ est exacte alors

$$rg\, X = rg\, X' + rg\, X''$$
$$deg\, X = deg\, X' + deg\, X''$$

Ex. X = courbe complète, $\mathcal{E} \in Fib_X$ $\quad deg(\mathcal{E}) := deg(\det \mathcal{E})$

via $Pic(X) = Div(X)/\sim \xrightarrow{deg} \mathbb{Z}$

On suppose de plus qu'on dispose d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ et d'un foncteur "fibre générique" exact $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$

tel que : (1) La fonction rang provient d'une fonction additive $rg : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ composée avec F

et vérifie $rg\, A = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(2) Si $X \in \mathcal{C}$

$$F : \{\text{sous-objets stricts de } X\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-objets de } F(X)\}$$

est une bijection

inverse = "adhérence schématique"

(3) Si un morphisme $X \xrightarrow{u} X'$ est un "iso. en fibre générique" i.e. $F(u)$ iso. alors

$\deg X \leq \deg X'$ avec égalité ssi u iso.

Ex. X courbe complète

η = point générique de X

$$\mathrm{Fib}_X \to \mathrm{Vect}_{\underbrace{\mathcal{O}_{X,\eta}}_{\text{Corps des fct. rat.}/X}}$$

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}_\eta$$

$\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X$

$$\{\text{sous } \mathcal{O}_X\text{-modules loc. facteurs directs de } \mathcal{E}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-e.v. de } \mathcal{E}_\eta\}$$

$\to$ résulte de ce que si A = anneau de valuation

M = A-module libre

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Sous-}A\text{-modules de } M \\ \text{facteurs directs} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \text{Sous-Frac}(A)\text{-e.v. de } M \otimes_A \text{Frac}(A) \right\}$$

$$V \cap M \longleftarrow\!\shortmid V \subset M \otimes_A \text{Frac}(A)$$

Si $\mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{E}'$ est un iso. en fibre générique alors $\mathcal{E} \overset{u}{\hookrightarrow} \mathcal{E}'$

et $\mathcal{E}'/u(\mathcal{E})$ = faisceau cohérent de torsion

$= \bigoplus_{\text{finie}}$ faisceaux gratte-ciel en un point fermé de X

$$\deg(\mathcal{E}') = \deg(\mathcal{E}) + \underbrace{\deg\left(\mathcal{E}'/u(\mathcal{E})\right)}_{\displaystyle\sum_{x \in |X|} \operatorname{long}_{\mathcal{O}_{X,x}} \left(\mathcal{E}'/u(\mathcal{E})\right)_x \cdot \deg(x)}$$

$\Rightarrow \deg(\mathcal{E}') \geq \deg(\mathcal{E})$ avec égalité ssi u iso.

* **Ex:** $L|K$ extension de corps

$$\text{VectFil}_{L|K} := \left\{ (V, \text{Fil}^\bullet V_L) \;\middle|\; \begin{array}{l} V \in \text{Vect}_K \\ \text{Fil}^\bullet V_L \in \text{VectFil}\, \underbrace{V_L}_{V \otimes_K L} \end{array} \right\}$$

catégorie exacte

$$\mathrm{VectFil}_{L|K} \longrightarrow \mathrm{Vect}_K \qquad \text{foncteur fibre générique}$$
$$(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) \longmapsto V$$

"Adhérence schématique" de $W \subset V$ est donnée par $(W, \mathrm{Fil}^\bullet V_L \cap W_L)$

Posons
$$\left.\begin{aligned} rg &= \dim_K V \\ \deg &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim \mathrm{gr}^i V_L \end{aligned}\right\} \text{ fonctions additives}$$

suite exacte d'e.v. filtrés $\Rightarrow$ suite exacte de $\mathrm{gr}^\bullet$.

De plus, si $b \ll 0$ est tel que $\mathrm{Fil}^b V_L = V_L$

$$\deg = b \dim V_L + \sum_{i > b} \dim \mathrm{Fil}^i V_L$$

$\Rightarrow$ si $(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) \xrightarrow{u} (V', \mathrm{Fil}^\bullet V'_L)$ est un iso. en fibre générique
i.e. $V \xrightarrow{\sim} V'$

alors

$$\deg(V', \mathrm{Fil}^\bullet V'_L) = \deg(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim\left(\mathrm{Fil}^i V'_L \big/ u(\mathrm{Fil}^i V_L)\right)$$

$\Rightarrow \deg(-) \geq \deg(-)$ avec égalité ssi u iso.

Rem : Dans les deux exemples précédents, la catégorie exacte $\mathcal{C}$ possède un $\otimes$ des duaux et des Hom-internes ainsi qu'un objet unité $\mathbb{1}$.

De plus, $\{X \in \mathcal{C} \,/\, \check{X} \otimes X \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}\} = \{X \in \mathcal{C} \,/\, rg\, X = 1\}$.

On peut alors définir $\underbrace{Pic(\mathcal{C})}_{\text{groupe via } \otimes \text{, inverse} = (-)^\vee.} = \{X \in \mathcal{C} \,/\, rg\, X = 1\}/\sim$

élément neutre ~~…~~ $= [\mathbb{1}]$.

Il y a de plus un morphisme $\det : \underbrace{K_0(\mathcal{C})}_{\substack{\text{groupe ab. libre sur } Ob(\mathcal{C})/\sim \\ \text{modulo } [X]=[X']+[X''] \text{ si } 0 \to X' \hookrightarrow X \to X'' \to 0}} \longrightarrow Pic(\mathcal{C})$

et $\deg : Pic(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\deg = \deg \circ \det$

→ Clair pour le cas des courbes et Fil_X

→ Pour $VectFil_{L|K}$: $\forall b \in \mathbb{N}$, $\Lambda^b(V, Fil^\bullet V_L) = (\Lambda^b V, Fil^\bullet \Lambda^b V_L)$

où $Fil^i(\Lambda^b V_L) = \sum_{j_1 + \dots + j_b = i} Im\left(Fil^{j_1} V_L \otimes \dots \otimes Fil^{j_b} V_L \to \Lambda^b V_L\right)$

$\Rightarrow$ on peut définir $\det(V, Fil^\bullet V_L) = \Lambda^{\dim_K V}(-)$

Alors, $\quad \mathrm{Pic}\left(\mathrm{Vect}\,\mathrm{Fil}^{\cdot}V_L\right) \xrightarrow[\sim]{\deg} \mathbb{Z}$

$$\left[\left(V, \mathrm{Fil}^{\cdot}V_L\right)\right] \longmapsto \sup\left\{i \mid \mathrm{Fil}^{i}V_L = V_L\right\}$$

$\dim_K V = 1$

* En fait ce sera souvent le cas : $\deg : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est donné par $\deg \circ \det$.

* Revenons à nos moutons. $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$, $\deg$, rg ...

Dans $\mathcal{C}$ tout morphisme possède un noyau :

si $X \xrightarrow{u} Y$ $\quad \ker u =$ " adhérence " schématique " de $\ker(F(u))$

et une image $\quad \mathrm{Im}\, u =$ " " $\mathrm{Im}(F(u))$

Mais en général $X/\ker u \to \mathrm{Im}\, u$ n'est pas un iso.

i.e. $\mathcal{C}$ pas abélienne

Ex : $\mathcal{C} = \mathbb{Z}$-modules libres de rang fini

$\mathcal{A} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}$

$$\begin{cases} \ker_{\mathcal{C}}\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}\right) = 0 \\ \mathrm{Im}_{\mathcal{C}}\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

Def. $X \in \mathcal{C}$ non nul, $\mu(X) = \dfrac{\deg X}{\operatorname{rg} X}$ pente de X.

X est dit semi-stable si $\forall X' \subset X$, $X' \neq 0$, $\mu(X') \leq \mu(X)$.

strict ou pas strict, cela ne change pas la définition

X est stable si $\forall X' \subsetneq X, X' \neq 0$, $\mu(X') < \mu(X)$.

Th. $X \in \mathcal{C}$ non nul. $\exists!$ filtration de X dans $\mathcal{C}$

par des sous-objets stricts

$$0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_r = X$$

tq. $\forall i$ $\quad X_i / X_{i+1}$ est semi-stable

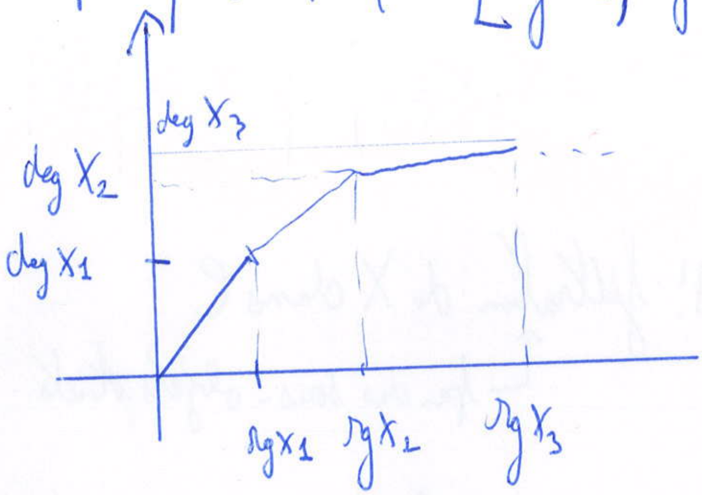
et $\mu(X_1/X_0) > \mu(X_2/X_1) > \dots > \mu(X_r/X_{r-1})$

Ex. X s.s. $\Leftrightarrow$ sa filtration de H.N. est $(0) \subsetneq X$.

On pose alors $HN(X)$ = polygone concave commençant en $(0,0)$ et finissant en $(\mathrm{rg}\, X, \deg X)$

de pentes $\underbrace{\mu(X_{i+1}/X_i)}_{\text{multiplicité} = \mathrm{rg}(X_{i+1}/X_i)}$

i.e. de pente $\mu(X_{i+1}/X_i)$ sur $[\mathrm{rg}\, X_i, \mathrm{rg}\, X_{i+1}]$.



Ex: X s.s. $\Leftrightarrow$ $HN(X)$ est une droite.

Prop: $\forall Y \subset X$, $(\mathrm{rg}(Y), \deg(Y))$ est en dessous de $HN(X)$.

$\Rightarrow HN(X)$ = enveloppe concave des $(\mathrm{rg}\, Y, \deg Y)_{Y \subset X}$.

strict ou pas.

$\lambda \in \mathbb{Q}$

<u>Def</u>: $\mathcal{C}^\lambda$ = objets s.s. de pente λ

$\mathcal{C}^{\leq \lambda} = \{ X \mid$ les pentes de $HN(X)$ sont $\leq \lambda \}$

$\mathcal{C}^{\geq \lambda} = \{ X \mid$ .... $\geq \lambda \}$

$\mathcal{C}^\lambda = \mathcal{C}^{\leq \lambda} \cap \mathcal{C}^{\geq \lambda}$

<u>Th</u>: (1) $\mathcal{C}^{\leq \lambda}$ et $\mathcal{C}^{\geq \lambda}$ sont des sous-catégories stables par extension dans $\mathcal{C}$ i.e. des sous-catégories exactes.

(2) si $\lambda > \mu$ $Hom(X, Y) = 0$ si $X \in \mathcal{C}^{\geq \lambda}$ et $Y \in \mathcal{C}^{\leq \mu}$

(3) $\mathcal{C}^\lambda$ est une catégorie abélienne.

<u>Ex</u>: * Si $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in Fil_X^\lambda$ et $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ alors $\underbrace{\ker u}$ est localement facteur direct dans $\mathcal{E}$ et $\mathrm{Coker}\, u$ est sans torsion i.e. un fibré vectoriel.

Comme faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules

* Si $(V, Fil^\cdot V_L) \xrightarrow{u} (V', Fil^\cdot V'_L)$ est un morphisme dans $\mathrm{VectFil}^\lambda_{L/K}$ alors u est automatiquement strictement compatible aux filtrations:

$$u(Fil^i V_L) = u(V_L) \cap Fil^i V'_L.$$

Filtrations de H.N. et Revêtements étales

X = Courbe Complète = Schéma noethérien régulier de dim. 1 intègre

$\deg : |X| \to \mathbb{N}_{\geq 1}$

$\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$

$$\begin{array}{l} Y \\ \downarrow \pi \\ X \end{array}$$

morphisme étale, $\boxed{\text{fini}}$ de Courbes Complètes où l'on suppose que

$\forall y \in |X| \qquad \deg(y) = \deg(\pi(y)) \cdot [k(y) : k(x)]$

$$\mathrm{Fib}_Y \underset{\pi^*}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fib}_X$$

$\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X \begin{cases} \deg(\pi^* \mathcal{E}) = \deg \pi \cdot \deg \mathcal{E} \\ \mathrm{rg}(\pi^* \mathcal{E}) = \mathrm{rg}\, \mathcal{E} \end{cases}$ et donc $\mu(\pi^* \mathcal{E}) = \deg \pi \cdot \mu(\mathcal{E})$

$\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_Y \begin{cases} \deg(\pi_* \mathcal{E}) = \deg \mathcal{E} \\ \mathrm{rg}(\pi_* \mathcal{E}) = \deg \pi \cdot \mathrm{rg}\, \mathcal{E} \end{cases}$ et donc $\mu(\pi_* \mathcal{E}) = \dfrac{1}{\deg \pi} \cdot \mu(\mathcal{E})$.

<u>Rem</u>: Seule la propriété $\deg \pi_* \mathcal{E} = \deg \mathcal{E}$ pose problème.

→ on montre en fait qu'on a un théorème de Grothendieck-Riemann-Roch

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(Y) & \simeq & \mathrm{Div}(Y)/\sim \\ \downarrow{\scriptstyle \det\circ\pi_*} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ \mathrm{Pic}(X) & \simeq & \mathrm{Div}(X)/\sim \end{array}$$

comme modulo 2-torsion i.e. après application de $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$

Cn : ~~$\nexists$~~ $Y \xrightarrow{\pi} X$ de degré n $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{S}_n$-torseur étale E/X des numérotations des éléments des fibres de π.

$E = \mathrm{Isom}(X^n, Y)$ $\circlearrowleft \mathfrak{S}_n$

$$E \times_{\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\varepsilon \text{ signature}}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-torseur} \leftrightarrow \mu_2\text{-torseur} \leftrightarrow \mathfrak{S}_m\text{-torseur}$$

$\|$

celui associé à $\det(\pi_* \mathcal{O}_Y)$.

$*$ $\begin{array}{c} Y \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow \big) \Gamma \\ X \end{array}$ galoisien de groupe Γ.

Rappel : $\mathrm{Fib}_X \simeq$ fibrés Γ-équivariants sur Y.

Si $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X$, par unicité de la filtration de H.N. de $\pi^* \mathcal{E}$

et le fait que $\forall \sigma \in \Gamma$, $\forall \mathcal{F} \in \mathrm{Fib}_Y$, $\mu(\sigma^* \mathcal{F}) = \mu(\mathcal{F})$, la filtration de H.N. de $\pi^* \mathcal{E}$ est Γ-équivariante

$\Longrightarrow$ elle descend en une filtration de $\mathcal{E}$ dans Fib_X.

De cela on déduit.

<u>Prop</u>: * Soit $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X$, $\mathcal{E}$ s.s. $\Leftrightarrow$ $\pi^* \mathcal{E}$ s.s.

* Soit $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_Y$ $\mathcal{E}$ s.s. $\Leftrightarrow$ $\pi_* \mathcal{E}$ s.s. $\Big] \to$ résulte de car $\pi^* \pi_* \mathcal{E} = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma} \sigma^* \mathcal{E}$

* Si $0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{E}_r = \mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_Y$ est la filtration de H.N. de $\mathcal{E}$ alors $0 = \pi^* \mathcal{E}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \pi^* \mathcal{E}_r = \pi^* \mathcal{E}$ est celle de $\pi^* \mathcal{E}$

* Idem. π_*.

Retour à la Courbe

$E|\mathbb{Q}_p$ de degré fini, Corps résiduel $\mathbb{F}_q \subset F$.

F alg. clos.

$E_h :=$ extension N.R. de degré h de E de corps résiduel $\mathbb{F}_{q^h} \subset F$.

$$X := X_{F,E} = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d\geq 0} B^{\varphi_E = \pi_E^d} \right)$$

$$X_h := X_{F,E_h} = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{d\geq 0} B^{\varphi_E^h = \pi_E^d} \right) = X \underset{E}{\otimes} E_h.$$

$$\begin{array}{ccc} (X_h)_{h\geq 1} & & (Y/\varphi^{h\mathbb{Z}})_{h\geq 1} \\ \downarrow & \left.\right) \text{revêtement pro-galoisien de groupe } \widehat{\mathbb{Z}} & \downarrow \\ X & & Y/\varphi^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Def: $d \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_{X_h}(d) = P_h[d]$, $\mathcal{O}_{X_h}(d) = \mathcal{O}_{X_h}(1)^{\otimes d}$ fibré en droites de degré d.

Rappel: $\underbrace{\mathrm{Pic}(X_h)}_{\text{générateur} = [\mathcal{O}_{X_h}(1)]} \xrightarrow[\sim]{\deg} \mathbb{Z}$.

Def: $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda = \frac{d}{h}$, $(d,h)=1$ où $d\in\mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

On pose $\boxed{\underbrace{\mathcal{O}_X(\lambda)}_{} := \pi_{h*}\, \mathcal{O}_{X_h}(d)}$

semi-stable de pente λ car de rang h et degré d.

$\boxed{\mu(\mathcal{O}_X(\lambda)) = \lambda.}$

Donc, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}$ est semi-stable de pente λ.

Quelques propriétés:

$$\begin{cases} H^0(X, \mathcal{O}_X(\lambda)) = 0 \text{ si } \lambda < 0 \\ H^1(X, \mathcal{O}_X(\lambda)) = 0 \text{ si } \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $H^i(X, \underbrace{\mathcal{O}_X(\lambda)}_{\pi_{h*}\mathcal{O}_{X_h}(d)}) = H^i(X_h, \mathcal{O}_{X_h}(d))$

$H^0(X, \mathcal{O}_X(\lambda)) = B^{\varphi^h = \pi^d}$ si $\lambda = \frac{d}{h}$ $(d,h)=1$.

$$\mathcal{O}_X(\lambda) \otimes \mathcal{O}_X(\mu) = \bigoplus_{\text{finie}} \mathcal{O}_X(\lambda+\mu)$$

$$\mathcal{O}_X(\lambda)^\vee = \mathcal{O}_X(-\lambda)$$

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(\lambda), \mathcal{O}_X(\mu)) = 0 \text{ si } \lambda > \mu \\ \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(\lambda), \mathcal{O}_X(\mu)) = 0 \text{ si } \lambda \leq \mu \end{cases}}$$

Car $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}(\lambda), \mathcal{O}(\mu)) = H^i\big(\underbrace{\mathcal{O}(\lambda)^\vee \otimes \mathcal{O}(\mu)}_{\bigoplus_{\text{finie}} \mathcal{O}(\mu-\lambda)}\big)$

<u>Th.</u> (1) $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X$ est s.s. de pente λ

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{E} \simeq \bigoplus_{\text{finie}} \mathcal{O}_X(\lambda)$$

(2) La filtration de H. N. d'un fibré sur X est scindée (non canoniquement)

(3) $\{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Q}\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fib}_X/\sim$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \left[\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X(\lambda_i)\right]$$

Rem : Les points (2) et (3) résultent de (1) facilement car

$$\mathrm{Ext}^1\left(\bigoplus_{\text{finie}} \mathcal{O}_X(\lambda), \bigoplus_{\text{finie}} \mathcal{O}_X(\mu)\right) = 0 \text{ si } \lambda \leq \mu.$$