Faiblement admissible $\Leftrightarrow$ admissible

- $E = \mathbb{Q}_p$.

Rappels sur les isocristaux

k corps parfait de car. p.

Déf : $\mathrm{Isoc}_k = \{ (D, \varphi) \}$

D : $W(k)_{\mathbb{Q}}$-e.v. de dim. finie

φ : automorphisme σ-linéaire

σ = Frobenius

Isoc_k = catégorie Tannakienne $\mathbb{Q}_p$-linéaire.

Déf : (D, φ) est isocline de pente $\lambda \in \mathbb{Q}$ si $\exists\, d \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ t.q. $\lambda = \frac{d}{h}$ et un $W(k)$-réseau $\Lambda \subset D$ tel que $\varphi^h(\Lambda) = p^d \Lambda$.

Th (Dieudonné–Manin) :

(1) $\mathrm{Isoc}_k = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathbb{Q}}^{\perp} \mathrm{Isoc}_k^{\lambda}$ ← isocline de pente λ

i.e. $\forall (D, \varphi)$ isocristal $D = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathbb{Q}} \underbrace{D^{\lambda}}_{\text{stable sous } \varphi \text{ isocline de pente } \lambda}$

et si D_1, D_2 sont isoclines de pente $\neq$ alors $\mathrm{Hom}(D_1, D_2) = 0$.

(2) Si k est alg. clos alors Isoc_k est semi-simple et $\forall \lambda \in \mathbb{Q}$

$\exists!$ objet simple isocline de pente λ.

Si $\lambda = \frac{d}{h}$ avec $(d, h) = 1$ l'objet simple de pente λ est

$D = \langle e, \varphi(e), \dots, \varphi^{h-1}(e) \rangle$ avec $\varphi^h(e) = p^d e$.

$\mathrm{End}(D) =$ alg. à division d'invariant λ.

* Pour (D, φ) isocristal on note

$$ht(D, \varphi) = \dim_{W(k)_{\mathbb{Q}}} D$$

$\mathrm{Newt}(D, \varphi) =$ polygone convexe de pentes $\lambda \in \mathbb{Q}$ avec multiplicités $\dim_{W(k)_{\mathbb{Q}}} D^{\lambda}$ et commençant en $(0,0)$.

$t_N(D, \varphi) =$ ordonnée terminale de $\mathrm{Newt}(D, \varphi)$

$= v_p(x)$ si $\det D = W(k)_{\mathbb{Q}} . e$ avec $(\det \varphi)(e) = x e$.

$\Rightarrow \mathrm{Newt}(D, \varphi)$ commence en $(0,0)$ et finit en $(ht(D, \varphi), t_N(D, \varphi))$.

$$\left.\begin{array}{l} ht : \mathrm{Isoc}_k \longrightarrow \mathbb{N} \\ t_N : \mathrm{Isoc}_k \longrightarrow \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$ fonctions additives sur la catégorie abélienne Isoc_k.

Si on pose $\left.\begin{array}{l} rg = ht \\ deg = t_N \end{array}\right\}$ et $\left.\begin{array}{l} rg = ht \\ deg = -t_N \end{array}\right\}$ $\longrightarrow$ deux filtrations de Harder-Narasimhan opposées qui définissent la décomposition de Dieudonné-Manin $D = \bigoplus_\lambda D^\lambda$.

φ-Modules filtrés

$K|\mathbb{Q}_p$ valuation discrète à corps résiduel parfait

$$K \,|\, \underbrace{K_0 = W(k)_{\mathbb{Q}} \,|\, \mathbb{Q}_p}_{\text{ext. max. N.R. de } \mathbb{Q}_p \text{ dans } K.}$$

Def: $\varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} = \left\{ \left(\underbrace{D, \varphi}_{\in \mathrm{Isoc}_{k_K} = \varphi\text{-Mod}_{K_0}}, \mathrm{Fil}^\bullet D_K \right) \right\}$

$\mathrm{Fil}^\bullet D_K$: filtration décroissante finie de $D_K := D \otimes_{K_0} K$

$(D, \varphi) \in \mathrm{Isoc}_{k_K}$

$(D, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) \in \mathrm{VectFil}_{K|K_0}$

$$\varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} = \text{Isoc}_{b_K} \times_{\text{Vect}_{K_0}} \text{VectFil}_{K/K_0}$$

$$= \text{Catégorie exacte}$$

Il y a trois fonctions additives

$$\underbrace{ht, t_N}_{\substack{\text{précédentes} \\ \text{sur } \text{Isoc}_{b_K}}}, t_H \text{ sur } \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$$

$$t_H = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K gr^i D_K$$

$$= \text{point terminal du } \underbrace{\text{polygone de Hodge}}$$

polygone convexe commençant en $(0,0)$ de pentes $i \in \mathbb{Z}$ avec multiplicité $\dim_K gr^i D_K$.

Posons $\begin{cases} \deg = t_H - t_N : \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} \to \mathbb{Z} \\ \text{rg} = ht \quad : \quad \text{"} \quad \text{"} \to \mathbb{N} \end{cases}$

Alors
$$\begin{aligned} \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} &\longrightarrow \text{Isoc}_{k} \\ (D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K) &\longmapsto (D, \varphi) \end{aligned}$$

est un foncteur "fibre générique".

$\Rightarrow$ on a des filtrations de H.N. dans $(\varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}, \deg, \mathrm{rg})$

<u>Lemme.</u> $A = (D, \varphi, \text{Fil}^\bullet D_K)$ est semi-stable de pente 0

$\Updownarrow$

faiblement admissible [$t_H(A) = t_N(A)$ et $\forall D' \subset D$ sous-isocristal (i.e. $\varphi(D') = D'$)

on a $t_H(D', \text{Fil}^\bullet D_K \cap D'_K) \leq t_N(D', \varphi_{|D'})$.

<u>dem:</u> $\deg A = 0 \Leftrightarrow t_H(A) = t_N(A)$.
$\Updownarrow$
$\mu(A) = 0$

De plus, si $\deg A = 0$, A s.s $\Leftrightarrow \forall B \subset A$ sous-objet strict $\deg(B) \leq 0$
$\Updownarrow$
$t_H(B) \leq t_N(B)$

sous-objet strict $\to$ en bijection avec les sous-isocristaux via le foncteur "fibre générique"

$\square$

Le foncteur V_{cris}

$\overline{K}$ clôture alg. de K $\qquad G_K = Gal(\overline{K}|K)$

$C = \widehat{\overline{K}}$

$$\begin{tikzcd}
B^+_{dR}(C) \arrow[r, two heads, "\theta"] & C \\
 & K \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[ul, "\exists!\ \text{section}" ', "G_K\text{-invariante}"]
\end{tikzcd}$$

$B^+_{dR}(C)^{G_K} \xrightarrow{\sim} C^{G_K} = K$.

On a donc $K \subset B_{dR}$

Def: $V_{cris}(D, \varphi, Fil^\bullet D_K) = Fil^0 \Big(D \otimes_{K_0} \underbrace{B_{cris}(C)}_{B^+_{cris}(C)[\frac{1}{t}]}\Big)^{\varphi = Id}$

où $D \otimes_{K_0} B_{cris}(C) \subset D \otimes_{K_0} B_{dR}(C) = D_K \otimes_K B_{dR}(C)$

et $Fil^0 (D_K \otimes_K B_{dR}(C)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Fil^i D_K \otimes_K t^{-i} B^+_{dR}(C)$.

But: **Th:** (Colmez-Fontaine): faiblement admissible $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\text{admissible}}_{\dim_{\mathbb{Q}} V_{cris}(-) = ht(-)}$.

Démonstration via la Courbe.

$F = C^\flat \rightsquigarrow$ Courbe $X_F \circlearrowleft G_K$ via $G_K \to \mathrm{Aut}(F) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X_F)$

De plus, $\underbrace{\ker\left(\theta : W(\mathcal{O}_F) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_C\right)}_{\boxed{y_0}} \in |Y_F| \circlearrowleft G_K$

stable sous l'action de G_K.

$$\boxed{B^+_{dR,y_0} = B^+_{dR}(C)}$$

Via $|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$

$y_0 \longmapsto \infty \in |X|$ stable sous l'action de G_K.

$\{\infty\} = V^+(t)$ où $t \in B^{\varphi = p} \setminus \{0\}$, $t(y_0) \neq 0$.

* $X \circlearrowleft G_K$ stabilise ∞ $\qquad \widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty} = B^+_{dR}$

$G_K \circlearrowleft$ action usuelle.

$X \setminus \{\infty\} = \mathrm{Spec}(B_e) \qquad \underbrace{B_e}_{\text{anneau principal } \circlearrowleft G_K} = B\left[\frac{1}{t}\right]^{\varphi = \mathrm{Id}} = B_{\mathrm{cris}}(C)^{\varphi = \mathrm{Id}}$

Fibré Vectoriel associé à un isocristal

Déf. $\mathrm{Fib}_X^{G_K} = \{$ fibrés vectoriels G_K-équivariants sur $X \}$

i.e. $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X$ et $\forall \sigma \in G_K$, $c_\sigma : \sigma^* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$

vérifiant $\forall \sigma, \tau \in G_K$

$$\begin{tikzcd}(\sigma\tau)^* \mathcal{E} = \tau^* \sigma^* \mathcal{E} \arrow[r, "\tau^* c_\sigma"] \arrow[rr, bend right, "c_{\sigma\tau}"'] & \tau^* \mathcal{E} \arrow[r, "c_\tau"] & \mathcal{E}\end{tikzcd}$$

i.e. $\boxed{c_{\sigma\tau} = c_\tau \circ \tau^* c_\sigma}$

$$\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathrm{Fib}_X^{G_K}$$

$$(D, \varphi) \longmapsto \mathcal{E}(D,\varphi) := \bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{\left(D \otimes_{K_0} B\right)^{\varphi = p^d}}$$

Module gradué sur

$P = \bigoplus_{d \geq 0} B^{\varphi = p^d}$, $X = \mathrm{Proj}(P)$.

Après oubli de la structure G_K-équivariante

$$\mathcal{E}(D,\varphi) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \mathcal{O}_X(-\lambda)^{m_\lambda}$$ ← multiplicité de λ dans $\mathrm{Newt}(D,\varphi)$.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathrm{rg}(\mathcal{E}(D,\varphi)) = \mathrm{ht}(D,\varphi) \\ \deg(\mathcal{E}(D,\varphi)) = -t_N(D,\varphi) \end{array}}$$

Interprétation en termes de B-paires

Déf : $\mathrm{Rep}_{B_e}(G_K) = \{ B_e$-modules libres de rang fini + action semi-linéaire de $G_K \}$

$= \mathrm{Fib}_{X \setminus \{\infty\}}^{G_K}$

$\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K) = \{ B_{dR}^+$-mod. libres de rang fini + action semi-linéaire de $G_K \}$

Alors, $\mathrm{Fib}_X^{G_K} \xrightarrow{\sim} \{ (M,W) \,/\, M \in \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K),\ W \in \mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ et $M \otimes B_{dR} = W[\frac{1}{t}] \}$

$$\mathcal{E} \longmapsto \left(\Gamma(X \setminus \{\infty\}, \mathcal{E}),\ \widehat{\mathcal{E}}_\infty \right)^{B_e}.$$

Via Cela

$$\mathcal{E}(D,\varphi) \longleftrightarrow \left(\left(D \underset{K_0}{\otimes} B\left[\tfrac{1}{t}\right] \right)^{\varphi = Id}, \; D_K \underset{K}{\otimes} B_{dR}^+ \right)$$

Be-représentations

Prop.: Les seuls points de $|Y|$ de G_K-orbite finie sont $\{\varphi^n(y_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

dem: Quitte à remplacer K par une extension de degré fini on classifie les points G_K-invariants.

Rappel: $(1 + m_F \setminus \{1\}) / \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow[\sim]{\circlearrowleft G_K} |Y|$

Si $\varepsilon \in 1 + m_F$, $\varepsilon \neq 1$, $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n \geq 0}$ où $\varepsilon^{(n)} \in 1 + m_C$, $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$

Alors, si $\varepsilon^{\mathbb{Z}_p^\times}$ est stable sous l'action de G_K, $\exists\, \chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ caractère continu tel que $\forall \sigma \in G_K$, $\sigma(\varepsilon) = \chi(\sigma) \cdot \varepsilon$.

Notons $Gal(\overline{K}|K') = \ker(\chi)$ avec $K'|K$. Alors, $\varepsilon \in \widehat{K'}^\flat$

Car (Ax-Sen-Tate) $C^{G_{K'}} = \widehat{K'}$.

2 Cas : * Si K' est de valuation discrète alors $\widehat{K'}^{b} \xrightarrow{\sim} k_{K'}$

i.e. $\forall x \in \widehat{K'}^{b} \quad |x| = 1 \Rightarrow \varepsilon = 1$. Impossible.

$\quad \llcorner \varepsilon \in 1 + \underbrace{m_{K'^{b}}}_{(0)}$

* Sinon, $K'|K$ est une $\mathbb{Z}_p$-extension infiniment ramifiée

et donc d'après Tate, $H^0(G_K, C(\chi^{-1})) = 0$.

Mais alors $\log(\varepsilon^{(0)}) \in C$ vérifie $\log(\varepsilon^{(0)}) \in H^0(G_K, C(\chi^{-1}))$

$\Rightarrow \log(\varepsilon^{(0)}) = 0 \Rightarrow \varepsilon^{(0)} \in \mu_{p^\infty}(C)$. $\Rightarrow \square$

Corollaire : Le seul point fermé de X ayant une G_K-orbite finie est ∞.

Prop : $\mathrm{Fib}_{X \setminus \{\infty\}}^{G_K} = \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K)$ est une catégorie abélienne.

dém : Cela résulte de ce que $\mathrm{Coh}_{X \setminus \{\infty\}}^{G_K} = \mathrm{Fib}_{X}^{G_K}$

Car si $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}_{X \setminus \{\infty\}}^{G_K}$ $\quad \mathrm{supp}(\mathcal{E}_{\mathrm{tor}}) \subset |X| \setminus \{\infty\}$

est un ensemble fini G_K-invariant $\Rightarrow \emptyset$ $\quad \square$

Déf :
$$\varphi\text{-Mod}_{K_0} \underset{D_{cris}}{\overset{V_{cris}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K)$$

$$V_{cris}(D,\varphi) = \left(D \otimes_{K_0} B[\tfrac{1}{t}]\right)^{\varphi-Id} = \Gamma\left(X \setminus \{\infty\}, \mathcal{E}(D,\varphi)\right)$$
$$D_{cris}(M) = \left(\left(M \otimes_{B_e} B[\tfrac{1}{t}]\right)^{G_K}, Id \otimes \varphi\right)$$

Exposé III - "Périodes p-adiques"
Astérisque 223.

Fait : * $Id \xrightarrow{\sim} D_{cris} \circ V_{cris}$.

* $V_{cris} \circ D_{cris} \hookrightarrow Id$.

$\rightarrow$ Résulte de ce que $B[\frac{1}{t}]$ est un (K_0, G_K)-anneau régulier.

De cela il résulte que :

Prop : Si $\mathrm{Rep}^{cris}_{B_e}(G_K) = \{ M \in \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K) \mid rkt(D_{cris}(M)) = rg_{B_e} M \}$

Alors, $V_{cris} : \varphi\text{-Mod}_{K_0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}^{cris}_{B_e}(G_K)$

De plus, $\{\text{sous-isocristaux de } (D,\varphi)\} \underset{\sim}{\overset{V_{cris}}{\longrightarrow}} \{\text{sous } B_e\text{-rep. de } V_{cris}(D,\varphi)\}$

Corollaire : Soit $(D,\varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0}$. Alors, l'ensemble des sous-fibrés localement facteur direct de $\mathcal{E}(D,\varphi)$ stables sous l'action de G_K

sont en bijection avec les sous-isocristaux de (D,φ) via

$D' \subset D$ $\mapsto$ $\mathcal{E}(D',\varphi_{|D'}) \subset \mathcal{E}(D,\varphi)$.

Fibré associé à un φ-module filtré

$$A = (D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \in \varphi\text{-}\mathrm{ModFil}_{K/K_0}$$

$$\mathcal{E}(D,\varphi) \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$$

$$\widehat{\mathcal{E}(D,\varphi)}_\infty = D_K \otimes_K B_{dR}^+$$

Soit $\underline{\Lambda} = \underbrace{\mathrm{Fil}^0(D_K \otimes_K B_{dR})}_{\sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}^i D_K \otimes_K t^{-i} B_{dR}^+}$ = réseau G_K-invariant de $D_K \otimes_K B_{dR}$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{E}(A) \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$ tel que

modification G_K-éq. du fibré en ∞

$$\begin{cases} \mathcal{E}(A)_{|X\setminus\{\infty\}} = \mathcal{E}(D,\varphi)_{|X\setminus\{\infty\}} \\ \widehat{\mathcal{E}(A)}_\infty = \underline{\Lambda} \end{cases}$$

Lemme: Le polygone de la modification est donné par le polygone de Hodge de $(D_K, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)$.

i.e. si $\Lambda = \langle t^{a_1} e_1, \dots, t^{a_n} e_n \rangle$ $\quad a_1 \leq \dots \leq a_n$

$$D_K \otimes_K B^+_{dR} = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$$

alors $\mathrm{Hdg}(D_K, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)(i) = a_1 + \dots + a_i$.

Corollaire: $\mathrm{rg}(\mathcal{E}(A)) = \mathrm{ht}(A)$

$$\deg(\mathcal{E}(A)) = \underbrace{\deg(\mathcal{E}(D,\varphi))}_{-t_N(D,\varphi)} + \underbrace{[\Lambda : D_K \otimes_K B^+_{dR}]}_{t_H(A)}$$

$$= \deg(A)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mu(A) = \mu(\mathcal{E}(A))}$$

Rem fondamentale:

$$\boxed{H^0(X, \mathcal{E}(A)) = V_{cris}(A)}$$

<u>Prop</u>: Si $A \in \varphi$-ModFil$_{K/K_0}$ a pour filtration de H.N. $0 = A_0 \subsetneq \dots \subsetneq A_r = A$

alors $0 = \mathcal{E}(A_0) \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{E}(A_r) = \mathcal{E}(A)$ est la filtration de H.N. de $\mathcal{E}(A)$.

<u>dem</u>. La filtration de H.N. de $\mathcal{E}(A)$ est G_K-invariante par canonicité

$\Longrightarrow$ descendent une filtration de A.

Sous fibrés loc. facteurs directs de $\mathcal{E}(A)$

$\wr\wr$

s. fibrés loc. facteurs directs de $\mathcal{E}(D,\varphi)$

Ceux qui sont G_K-invariants $\simeq$ sous-isocristaux de (D,φ)

$\wr\wr$

sous-objets stricts de A $\square$

Th : Faiblement admissible $\Longleftrightarrow$ admissible

dem: A faiblement admissible

$\Updownarrow$

A s.s. de pente 0

$\Updownarrow$ Prop. précédente

$\mathcal{E}(A)$ s.s. de pente 0

$\Updownarrow$ Théo. de classification + $H^0(X, \mathcal{O}_X(\lambda)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < 0 \\ \mathbb{Q}_p & \text{si } \lambda = 0 \\ \dim \infty & \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$

$\dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(X, \mathcal{E}(A)) = \mathrm{rg}(A)$

$\Updownarrow$

A admissible.

$\square$