Rappels sur les schémas en groupes

S schéma $\qquad Sch/S$ = Catégorie des S-schémas

* Par définition, un S-schéma en groupes est un foncteur représentable

$$Sch/S \longrightarrow \text{Groupes}$$

De manière équivalente, il s'agit d'un S-schéma G muni de S-morphismes :

* multiplication $G \times_S G \xrightarrow{m} G$
* inverse $\iota : G \xrightarrow{\sim} G$
* section unité
$$\begin{tikzcd} G \arrow[d] \\ S \arrow[u, bend right, "e"'] \end{tikzcd}$$

satisfaisant les axiomes usuels associés à la définition d'un groupe.

<u>Ex</u> : Associativité

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S G \arrow[r, "m \times Id"] \arrow[d, "Id \times m"] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\ G \times_S G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

Commute

* Lorsque $S = \mathrm{Spec}(\text{Corps})$ on parle parfois de "groupe algébrique" (bien qu'en général cette terminologie suppose que G soit de type fini)
* Si $S' \to S$ est un morphisme de schémas, le tiré en arrière $G \times_S S'$ est un S'-schéma en groupes. Du point de vue fonctoriel, $G_{S'}$ est obtenu

en restreignant le foncteur $G : Sch/S \to$ groupes à Sch/S'.

* Si $s \in S$, la fibre G_s est un $k(s)$ - "groupe algébrique" et on doit penser à G comme la famille $(G_s)_{s \in S}$ de "groupes algébriques" paramétrée par la base S.

Comme d'habitude lorsqu'on considère des familles de variétés algébriques il sera naturel de supposer que le morphisme $G \to S$ est plat de présentation finie.

* Schémas en groupes intervenant naturellement en arithmétique et géo. algébrique se divisent en gros en 3 familles

    * Les groupes algébriques affines lisses - Tores, groupes unipotents lisses, les groupes réductifs $\to$ cf. Borel "Linear algebraic groups" pour le cas où $S = \mathrm{Spec}(\text{corps})$ et SGA III pour les familles de tels objets

    * Les variétés abéliennes et les familles correspondantes les schémas abéliens. Ce sont les schémas en groupes propres et lisses à fibres géo. connexes $\to$ cf. Mumford "Abelian Varieties" et "Geometric invariant theory".

*

* Les schémas en groupes commutatifs finis/corps et les familles correspondantes les schémas en groupes commutatifs finis et plats. Contrairement aux deux familles précédentes, ceux qui sont intéressants ne sont pas ceux qui sont lisses mais qui au contraire possèdent des infinitésimaux dans leur faisceau structural. Ils apparaissent comme noyaux d'isogénies (éventuellement inséparables) de schémas abéliens.

[Ce sont ceux qui vont nous intéresser dans ce cours]

<u>Rem</u>. Schémas semi-abéliens.

<u>Schémas en groupes comme faisceaux fppf</u>

<u>Site et topos fppf</u> : S_{fppf} = site fppf

catégorie sous-jacente = Sch/S

topologie = engendrée par la prétopologie dont les recouvrements sont les familles de morphismes de S-schémas $(U_i \to T)_{i\in I}$ telles que :

* $\forall i \in I$, $U_i \to T$ est plat de présentation finie

* Le morphisme $\coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow T$ est surjectif

Rem : * Plat de présentation finie $\Rightarrow$ ouvert. La $2^{ème}$ condition est donc équivalente à ce que $\mathrm{Im}(U_i \to T)$ forme un recouvrement ouvert Zariski de T

* Si T est quasicompact le recouvrement précédent est dominé par le recouvrement $\coprod_{i \in J} U_i \to T$ formé d'un seul morphisme plat de présentation finie, pour $J \subset I$ suffisamment grand.

$\tilde{S}_{fppf}$:= topos associé

$$\mathrm{Sch}/_S \hookrightarrow \tilde{S}_{fppf}$$

$$\text{S-schémas en groupes} \hookrightarrow \text{faisceaux de groupes sur } \tilde{S}_{fppf}.$$

$\qquad$ ||

faisceaux représentables

Rem : * Si l'on travaillait avec des schémas en groupes lisses il serait inutile de travailler avec le site fppf, le site lisse ou le gros site étale de S serait suffisant.

* En fait en général lorsqu'on travaille avec des schémas en groupes plats de présentation finie il y a un site ~~intermédi~~ intermédiaire entre le site lisse et le site fppf, le site syntomique, qui est le mieux adapté.

Monomorphismes

$f : G \to H$ morphisme de S-schémas en groupes.

Noyau :

$\underbrace{\ker f}_{\text{comme faisceau fppf}}$ est représentable (par un S-schéma en groupes)

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & S \arrow[d, "e_H"] \\ G \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

$\ker f$ = fibre de f au dessus de la section neutre de H.

$\Rightarrow$ $\ker f \hookrightarrow G$ est une immersion (localement fermée) car e_H en est une.

Donc, $\ker f \hookrightarrow G$ est une immersion fermée si H est séparé$/S$.

Rem : Un S-schéma en groupes est séparé $\Leftrightarrow$ sa section unité est une immersion fermée

(car dans un groupe $x = y \Leftrightarrow xy^{-1} = e$)

En particulier si $S = \mathrm{Spec}(\text{Corps})$ tout S-schéma en groupes est séparé.

$$\boxed{f \text{ monomorphisme} \Leftrightarrow \ker f = \{e\}}$$

Monomorphisme et immersion

f immersion $\Rightarrow$ f mono.

Réciproque fausse déjà pour des schémas en groupes quasi-finis / AVD
(SGA3, exp. XVI, sect. 1.1).

Cependant :

Prop (EGA IV, 8.11.5) Un morphisme de S-schémas est une immersion fermée $\Leftrightarrow$ monomorphisme propre de présentation finie

Corollaire : $f : G \to H$ morphisme de S-schémas en groupes de présentation finie avec H séparé et G propre. Alors

f immersion fermée $\Leftrightarrow$ f monomorphisme.

Prop (SGA3, exp VI_B, Cor. 1.4.2). Si $S = \mathrm{Spec}(\text{Corps})$ monomorphisme de sch. en gp. quasicompacts

$\Updownarrow$

immersion fermée.

Critère fibre à fibre : **Prop** (SGA3, exp. VI_B, Cor. 2.10) $G/_S$ t.q. $\forall s \in S$, $G_s = \{e\}$
alors $G = \{e\}$.

Appliquant cela à $\ker f$ + Prop. précédente on obtient le critère général suivant pour $f : G \to H$

Prop. f est un monomorphisme $\iff \forall s \in S$, $f_s : G_s \to H_s$ en est un
$\iff \forall s \in S$, f_s est une immersion fermée.

Quotient par une relation d'équivalence plate

X un S-schéma

Relation d'équivalence sur X = $R \subset X \times_S X$ sous-faisceau fppf

tq. $\forall U/S$ $\quad R(U) \subset X(U) \times X(U)$ soit une relation d'équivalence

$$R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X \qquad p_1, p_2 = \text{projections}$$

Def : X/R = faisceau associé au préfaisceau fppf $\overbrace{U \mapsto X(U)/R(U)}^{\text{séparé}}$
$= \mathrm{Coker}\,(R \rightrightarrows X)$

$\nwarrow$ si $\mathcal{F} \in \widetilde{S}_{fppf}$ $\quad \mathrm{Hom}(X/R, \mathcal{F}) = \{ s \in \mathcal{F}(X) \,/\, \underbrace{p_1^* s = p_2^* s}_{\mathrm{Hom}(R, \mathcal{F})} \}$

$$(X/R)(U) = \varinjlim_{\substack{U' \to U \\ \text{recouvrement fppf}}} \ker \left(X(U')/R(U') \rightrightarrows X(U' \times_U U')/R(U' \times_U U') \right)$$

si U quasicompact

Ex * G = S-schéma en groupes agissant sur X = S-schéma

Supposons l'action de G libre i.e. $\forall T$, $G(T)$ agit librement sur $X(T)$

$$\Updownarrow$$

$$G \times_S X \to X \times_S X \quad \text{est un monomorphisme}$$
$$(g,x) \mapsto (g.x, x)$$

Alors $R = G \times_S X \hookrightarrow X \times_S X$ définit une relation d'éq sur X

$$X/R = G\backslash X$$

* En particulier si $H \subset G$ ss. schéma en groupes on peut former $H\backslash G$ et G/H en faisant agir H par translations sur G.

Quotient dans la catégorie des espaces annelés

Supposons R représentable (par un S-schéma)

$$R \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X$$

Posons pour $x,y \in X$, $x \sim y$ si $p_1^{-1}(x) \cap p_2^{-1}(y) \neq \emptyset$

$\to$ Cela définit une relation d'équivalence sur $|X|$.

Notons $Y = |X|/R$ le quotient dans la catégorie des espaces topologiques.

Notons $q : |X| \twoheadrightarrow Y$ l'application quotient

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & p_{1*}\mathcal{O}_R \\ \mathcal{O}_X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & p_{2*}\mathcal{O}_R \end{tikzcd} \quad \overset{q_*}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & q_*p_{1*}\mathcal{O}_R \\ q_*\mathcal{O}_X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & q_*p_{2*}\mathcal{O}_R \end{tikzcd}$$

$$\alpha := qp_1 = qp_2$$

Posons $\mathcal{O}_Y = \ker(q_*\mathcal{O}_X \rightrightarrows \alpha_*\mathcal{O}_R) =$ "faisceau des fonctions algébriques constantes sur les classes d'équivalences de R."

Alors, $(|X|, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{q} (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un quotient dans la catégorie des espaces annelés i.e. $(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathrm{Coker}(R \rightrightarrows X)$ dans la catégorie des espaces annelés.

<u>Le théorème de Grothendieck</u>

<u>Morphismes finis localement libres</u>. $X \xrightarrow{f} Y$ est fini loc. libre si c'est un morphisme fini tq $f_*\mathcal{O}_X$ soit un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre

Y-schémas finis loc. libres $\simeq$ Faisceaux de $\mathcal{O}_Y$-alg. loc. libres

$$[X \xrightarrow{f} Y] \longmapsto f_*\mathcal{O}_X$$

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \longleftarrow\!\shortmid \mathcal{A}$$

fini loc. libre $\Longleftrightarrow$ plat fini, de présentation finie.

En particulier sur les schémas loc noethériens, fini loc. libre $\Longleftrightarrow$ plat fini.

Th (Grothendieck, SGA3 exp. V
Cf. également Raynaud "Passage au quotient par une relation d'éq. plate") Soit $R \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} X$ une

relation d'équivalence représentable par un sous-schéma fermé de $X \times_S X$ vérifiant :

1) $\forall x \in X$, $\underbrace{\text{l'orbite de } x}_{\text{classe d'éq.}}$ $p_2\left(p_1^{-1}(x)\right) \subset$ ouvert affine

2) $p_1 : R \to X$ est fini loc. libre

Alors, le faisceau fppf X/R est représentable par un S-schéma vérifiant : a) $\left(X/R, \mathcal{O}_{X/R}\right)$ est le quotient de $(X, \mathcal{O}_X)$ par R dans la catégorie des espaces annelés

b) Le morphisme $X \to X/R$ est fini loc. libre et donc fidèlement plat.

Corollaire : X = S-schéma quasi-projectif et G = S-schéma en groupes fini loc. libre ~~...~~ agissant librement sur X. Alors, $_G\backslash X$ est représentable par un S-schéma tel que $X \to {}_G\backslash X$ est fini loc. libre et fait de X un G-torseur ~~...~~ au dessus de $_G\backslash X$.

Rem.: (Nagata) $\exists$ ~~...~~ variété propre et lisse / corps $X \circlearrowleft \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ action libre et $X/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ n'est pas représentable.

Ex.: $G \hookrightarrow H$ sous-groupe fermé, G fini loc. libre $/S$ et H quasi-proj sur S. Alors $_G\backslash H$ est représentable.

Le théorème qui suit se déduit du théo. précédent grâce à la technique des "quasi-sections" (cf. SGA3 exp. V)

Th: Supposons S noethérien. $R \subset X \times_S X$ sous-schéma fermé définissant une rel. d'éq.

s'applique aux actions libres de schémas abéliens sur des schémas quasi-proj.

* Si X est quasi-projectif $/S$ et $p_1 : R \to X$ est propre et plat alors X/R est représentable, est le quotient dans la catégorie des espaces annelés et $X \to X/R$ est fidèlement plat
* Si $p_1 : R \to X$ est plat de type fini $\exists$ ouvert dense U de X

représentabilité "générique" du quotient.

saturé sous R tq. U/R soit représentable, soit le quotient dans la catégorie des espaces annelés et $U \to U/R$ soit fidèlement plat.

<u>Th</u> (SGA3 exp VI_B) : k corps, $G \subset H$ k schémas en groupes quasicompacts

Alors, $G\backslash H$ est représentable et $H \to G\backslash H$ est fidèlement plat.

→ * dévissage au cas de type fini/k
* par descente fidèlement plate on peut supposer k alg. clos
* $\exists$ quotient "bon" sur un ouvert dense U de H invariant par translations sous G
* On utilise des translations par des éléments de $H(k)$ afin de voir que l'on peut prendre $U = H$.

<u>Th</u> (Chevalley) : * Si G et H sont affines de t.f. /k alors G/H est quasi-projectif
* Si de plus $G \triangleleft H$ alors le schéma en groupes G/H est affine.

Epimorphismes de schémas en groupes

* Si $f : X \to Y$ est un morphisme de S-schémas, f est un épi. fppf si et seulement si $\exists \left(U_i \to Y\right)_{i \in I}$ un recouvrement fppf et une section de f au dessus de ce recouvrement i.e. $\forall i$,

$$\begin{tikzcd} & U_i \arrow[dl, bend right, "\exists"'] \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

* Bien sûr, si f est fidèlement plat de présentation finie, f est un épi. fppf (on peut prendre le recouvrement trivial de Y) mais la réciproque est fausse.

Par exemple si $Z \xrightarrow{\alpha} Y$ est un morphisme qui n'est pas plat alors

$$Y \amalg Z \xrightarrow{(Id, \alpha)} Y$$

est un épi. fppf qui n'est pas plat.
On va voir cependant que cela est vrai pour les schémas en groupes plats de présentation finie.

<u>Th</u>: Soit $f : G \to H$ un morphisme de S-schémas en groupes de type fini. Alors, f épi $\Leftrightarrow$ f fidèlement plat.

<u>dem.</u> ($\Leftarrow$) est clair
($\Rightarrow$) f épi $\Rightarrow$ $G/\ker f \xrightarrow{\sim} H$ est un iso. de faisceaux fppf
Mais d'après le théorème précédent $G/\ker f$ est représentable et $G \to G/\ker f$ est fidèlement plat $\Rightarrow \square$

Rappelons le critère de platitude fibre à fibre.

Th (EGA IV, 11-3-1) : $X \xrightarrow{f} Y$ morphisme de S-schémas de présentation finie. Supposons X plat$/S$ et $\forall s \in S$, $f_s : X_s \to Y_s$ plat. Alors, f est plat et $Y \to S$ est plat aux points de $\operatorname{Im} f$.

Des 2 théo. précédents on déduit celui-ci.

Théo : $f : G \to H$ un morphisme de S-schémas en groupes de présentation finie. Supposons G plat$/S$. Sont alors $\sim$:

* f est fidèlement plat
* f est un épi. fppf
* $\forall s \in S$, $f_s : G_s \to H_s$ est fidèlement plat
* " " épi. fppf

De plus, si c'est le cas alors H est plat$/S$.

Du th. précédent couplé au m̂ théo. pour les mono. on déduit :

Corollaire : Soit $1 \to G_1 \xrightarrow{u} G_2 \xrightarrow{v} G_3 \to 1$ une suite de S-schémas en groupes de présentation finie avec G_1 et G_2 plats$/S$. Sont $\sim$.

* la suite est exacte
* la suite est exacte fibre à fibre$/S$

Structure des catégories de schémas en groupes commutatifs

Schémas en groupes finis et plats / base quelconque

S schéma. $\mathcal{C}$ = catégorie des S-schémas en groupes commutatifs finis loc. libres

* $\mathcal{C} \simeq$ $\mathcal{O}_S$-modules loc. libres de rg. fini $\mathcal{A}$ munis d'une structure d'algèbre de Hopf commutative et cocommutative

i.e. $\mathcal{A} = \mathcal{O}_S$-algèbre + $\mathcal{A} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}$ comultiplication

$i : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ inversion

$\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_S$ augmentation associée à la section neutre

+ axiomes ...

* $\mathcal{C}$ n'est pas en général une sous-catégorie abélienne de la catégorie des faisceaux fppf de groupe ab. $/S$ car si $f : G \to H$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ $\ker f$ n'est pas nécessairement plat $/S$.

* **Déf** (Quillen) : * une sous-catégorie exacte d'une catégorie abélienne est une sous-catégorie pleine stable par extensions.

($0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ $\quad X', X'' \in$ cat. $\Rightarrow X \in$ cat.)

* une catégorie exacte est une catégorie additive $\mathcal{C}$ munie d'une notion de suite exacte $0 \to X' \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} X'' \to 0$, $v \circ u = 0$,

tq. $\exists$ foncteur additif pleinement fidèle $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{A}$ = cat. abélienne faisant de $\mathcal{C}$ une sous-catégorie exacte de $\mathcal{A}$ et tq. une suite de $\mathcal{C}$ est exacte ssi elle l'est dans $\mathcal{A}$.

<u>Def.</u> Si $\mathcal{C}$ est exacte, un $\left|\begin{array}{l}\text{monomorphisme}\\ \text{épimorphisme}\end{array}\right.$ strict dans $\mathcal{C}$ est un $\left|\begin{array}{l}\text{mono.}\\ \text{épi.}\end{array}\right.$ pouvant s'insérer dans une suite exacte.

<u>Ex.</u> X schéma, $\mathcal{C}$ = $\mathcal{O}_X$-modules loc. libres de rg. fini

$\downarrow$ s. cat. exacte

$\mathcal{A}$ = faisceaux cohérents de $\mathcal{O}_X$-modules
abélienne.

* $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un mono. strict $\iff$ mono. de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ localement facteur direct (i.e. $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est loc. libre)
* $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un épi. strict $\iff$ épi de $\mathcal{O}_X$-modules au sens usuel

~~Si X schéma [illegible]~~

<u>Prop.</u> $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie exacte de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens fppf. De plus, un morphisme $f : G \to H$

est un mono. strict $\iff$ immersion fermée

est un épi. strict $\iff$ fidèlement plat.

dém : * Si $0 \to G_1 \to \mathcal{F} \to G_2 \to 0$ est une suite exacte de faisceaux fppf avec $G_1, G_2 \in \mathcal{C}$ alors $\mathcal{F}$ est un G_1-torseur fppf au dessus de G_2 $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ est représentable et $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$.

↑ Théorie de la descente
(tous les schémas sont affines$/S$ $\Rightarrow$ pas de problème).

Donc $\mathcal{C}$ = exacte.

* ~~[illegible]~~ $f : G \to H$ dans $\mathcal{C}$ s'insère dans une suite exacte

$0 \to G \to H \to K \to 0$ $\Longrightarrow$ f mono. dans Sch/S $\Longrightarrow$ f immersion fermée.

↑ car G propre$/S$ (cf. début)

Réciproquement, si f est une immersion fermée, d'après le théo. de quotient par une relation d'éq. finie loc. libre de Grothendieck, f s'insère dans une suite exacte.

* $f : G \to H$ s'insère dans une suite exacte $0 \to F \to G \to H \to 0$

$\Longrightarrow$ f épi. fppf $\Longrightarrow$ f fidèlement plat.

↑ cf. théo. précédent

Réciproquement f fidèlement plat $\Rightarrow$ $\ker f$ plat$/S$

$\Longrightarrow$ $\ker f \in \mathcal{C}$

$\Longrightarrow$ s'insère dans

$0 \to \ker f \to G \to H \to 0$ $\square$

Le Cas d'un corps - Soit k un corps.

D'après les résultats précédents on a une famille de sous-cat. abéliennes de la catégorie des faisceaux fppf de gp. ab./Spec(k)

$$\begin{matrix}\text{k-Schémas en gp.} \\ \text{finis commutatifs}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{k-schémas en groupes} \\ \text{affines de t.f. commutatifs}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{k-schémas en groupes} \\ \text{de t.f. commutatifs}\end{matrix}$$

Dans ces catégories abéliennes, mono. $\Longleftrightarrow$ immersion fermée

épi. $\Longleftrightarrow$ fidèlement plat.

On a la caractérisation suivante simple pour épi de gp. affines.

<u>Prop</u>: Soit $f: G \to H$ un morphisme de k-schémas en groupes de t.f./k affines. Alors, f est un épi. $\Longleftrightarrow$ schématiquement dominant

i.e. $\Gamma(H, \mathcal{O}_H) \overset{f^*}{\hookrightarrow} \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$.

<u>dem</u>: $G = \mathrm{Spec}(B)$ $\quad f^*: A \to B$

$H = \mathrm{Spec}(A)$

* f épi $\Rightarrow$ fidèlement plat $\Rightarrow f^*$ injectif.

* Réciproquement,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & & H \\ & \mathrm{Im} f = \mathrm{Spec}(C) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr] & & B \\ & C \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

f^* injectif $\Rightarrow A \to C$ injectif $\Rightarrow A \simeq C \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\mathrm{Im} f \simeq H$ $\square$

Donc, pour un morphisme d'algèbres de Hopf / corps,
injectif $\Longleftrightarrow$ fidèlement plat.

Structure des schémas en groupes plats de présentation finie

Opérateurs différentiels invariants

Rappels sur les op. diff. : $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$ morphisme de schémas

$$\begin{array}{ccc} & P^n_{X/S} & \\ {}^{p_1}\swarrow & & \searrow^{p_2} \\ X & & X \end{array}$$

$P^n_{X/S}$ = voisinage infinitésimal d'ordre $\leq n$ de la diagonale de X

(Si $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{X \times_S X}$ est l'idéal définissant la diagonale, $P^n_{X/S} = V(\mathcal{J}^{n+1})$)

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-modules

$$\boxed{\mathcal{D}iff^{\leq n}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p_{1*}p_2^*\mathcal{E}, \mathcal{F})}$$

= faisceau des opérateurs diff. d'ordre $\leq n$

= correspondances de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ à support dans $P^n_{X/S}$

$$\cap$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$$

Ex: $\mathrm{Diff}^{0}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \mathcal{H}om_{O_X}(\mathcal{E},\mathcal{F})$

$\mathrm{Diff}^{\leq 1}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = O_X \oplus \mathrm{Der}_{O_S}(O_X, O_X)$

Composition des op. diff.

$$\underset{\substack{\cup\\ D_1}}{\mathrm{Diff}^{\leq n}(\mathcal{E},\mathcal{F})} \times \underset{\substack{\cup\\ D_2}}{\mathrm{Diff}^{\leq m}(\mathcal{F},\mathcal{G})} \longrightarrow \mathrm{Diff}^{\leq n+m}(\mathcal{E},\mathcal{G})$$

obtenu par composition des correspondances

$$\begin{tikzcd}
 & & D^{n,m} \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dd, phantom, "\square"] & & P^{n+m} \arrow[ddllll, bend right, "p''_1"'] \arrow[dd, "p''_2"] \\
 & P^{n} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & & P^{m} \arrow[dl, "p'_1"'] \arrow[dr, "p'_2"] & \\
X & & X & & X
\end{tikzcd}$$

$$p'_{1*}p'^{*}_{2}\mathcal{E} \xrightarrow{D_1} \mathcal{F} \quad \leadsto \quad \underbrace{(p_2^{*}p'_{1*})}_{q_{1*}q_2^{*}} p'^{*}_{2}\mathcal{E} \xrightarrow{p_2^{*}D_1} p_2^{*}\mathcal{F}$$

$$\leadsto \quad \underbrace{(p_1 q_1)}_{p''_1\delta}{}_{*} \underbrace{(p'_2 q_2)}_{p''_2\delta}{}^{*}\mathcal{E} \xrightarrow{p_{1*}p_2^{*}D_1} p_{1*}p_2^{*}\mathcal{F} \xrightarrow{D_2} \mathcal{G}$$

$$\leadsto \quad p''_{1*}(\delta_*\delta^{*})p''^{*}_{2}\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G}$$

$\uparrow$ oubli du support

$p''_{1*}p''^{*}_{2}\mathcal{E} \xrightarrow{D_2\circ D_1} \mathcal{G}$

$$\mathrm{Diff}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X) := \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Diff}^{\leq n}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X) \subset \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X)$$

sous anneau filtré.

Si $D \in \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X)$ et $s \in \mathcal{O}_X$ posons $Ad(s)(D) = sD - Ds : t \mapsto sD(t) - D(ts)$

Alors, $D \in \mathrm{Diff}^{\leq n}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X) \iff \forall s_1,\dots,s_{n+1} \in \mathcal{O}_X,\ Ad(s_1)\circ\dots\circ Ad(s_{n+1})(D) = 0$

<u>Rappel:</u> * $\begin{array}{l} E \circlearrowleft G = S\text{-schéma en gp.} \\ \downarrow \pi \\ S \end{array}$ tq. $E = G$-torseur pour la top. fppf

$$\text{Faisceaux sur } S \xrightarrow{\sim} \text{Faisceaux } G\text{-équivariants sur } E$$

$$\mathcal{F} \longmapsto \pi^*\mathcal{F}$$

$$(\pi_*\mathcal{G})^G \longleftarrow \mathcal{G}$$

De plus si E/S possède une section $\begin{array}{c} E \\ \downarrow\pi \ \circlearrowleft s \\ S \end{array}$ alors

$$(\pi_*\mathcal{G})^G \simeq s^*\mathcal{G}$$

* Idem pour les faisceaux de $\mathcal{O}$-modules quasi-cohérents en prenant $\pi^*(-) = \mathcal{O}_E \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_S} \pi^{-1}(-)$

$$\begin{array}{c} G \\ e \uparrow \downarrow \pi \\ S \end{array}$$ un S-schéma en groupes
e = section neutre

$$\boxed{\omega_{G/S} := \mathcal{J}_G/\mathcal{J}_G^2}$$ où $\mathcal{J}_G$ = idéal d'augmentation de $\mathcal{O}_G$.

$= \mathcal{O}_S$-module q.c.

faisceau conormal à la section unité.

Alors, d'après les considérations précédentes,

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega^1_{G/S} &\simeq \pi^* \omega_{G/S} \\ \omega_{G/S} &= \left(\pi_* \Omega^1_{G/S}\right)^G \end{aligned}}$$ (fibré cotangent trivial)

$= 1$-formes diff. invariantes

<u>Plus généralement</u> : $e^* \mathcal{D}iff^{\leq n}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}\left(\mathcal{O}_G/\mathcal{J}_G^{n+1}, \mathcal{O}_S\right)$

= <u>distributions</u> sur G à support dans le voisinage infinitésimal d'ordre $\leq n$ de la section neutre

et donc,
$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}\left(\mathcal{O}_G/\mathcal{J}_G^{n+1}, \mathcal{O}_S\right) &= \left[\pi_* \mathcal{D}iff^{\leq n}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G)\right]^G \\ \mathcal{D}iff^{\leq n}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G) &\xrightarrow{\sim} \pi^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}\left(\mathcal{O}_G/\mathcal{J}_G^{n+1}, \mathcal{O}_S\right) \end{aligned}}$$ = opérateurs diff. invariants par translation à gauche

$\Downarrow$ tout op. diff. est combinaison linéaire d'op. diff invariants

La composée de deux opérateurs diff. invariants à gauche est invariante à gauche, donc

$$\mathrm{Diff}^{\leq n} \times \mathrm{Diff}^{\leq m} \longrightarrow \mathrm{Diff}^{\leq n+m} \quad \text{induit}$$

$$\left[\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}\left(\mathcal{O}_G/J_G^{n+1}, \mathcal{O}_S\right) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}\left(\mathcal{O}_G/J_G^{m+1}, \mathcal{O}_S\right) \xrightarrow{*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}\left(\mathcal{O}_G/J_G^{n+m+1}, \mathcal{O}_S\right) \right]$$

Convolution des distributions

~~Δ ...~~

Comultiplication

$\Delta : \mathcal{O}_G \longrightarrow m_* \mathcal{O}_{G \times_S G}$ induit $\Delta : \mathcal{O}_G/J_G^{n+m+1} \longrightarrow \mathcal{O}_G/J_G^{n+1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_G/J_G^{m+1}$

$m : G \times_S G \to G$ multiplication

$\left(\text{Car } \Delta(J) \subset J \otimes \mathcal{O}_G + \mathcal{O}_G \otimes J \right)$

Alors, $\boxed{D_1 * D_2 = (D_1 \otimes D_2) \circ \Delta}$

En particulier, si G est commutatif $\pi_* \mathrm{Diff}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G)^G$ est commutatif.

En général, $\pi_* \mathrm{Diff}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G)^G$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre

Critère de lissité d'un schéma en groupes

Prop: Soit k un corps et G un k-schéma en groupes de type fini. Sont ~.

* G est lisse
* G est géo. réduit.
* $\mathcal{O}_{G,e} \otimes_k \bar{k}$ est réduit

dem: Se déduit du fait que si k alg. clos, $X = k$-schéma réduit de type fini alors ~~...~~ X^{lisse} = ouvert Zariski dense.

+ translations par un élément de $G(k)$. $\square$

Lissité des schémas en groupes sur des bases de car. 0

Th (Cartier). Soit S un $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ schéma et G un S-schéma en groupes plat de présentation finie. Alors, G/S est lisse.

dem: On peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(k)$ avec $\mathrm{car}(k) = 0$. Soit $n \geq 1$.

Soit $x_1, \dots, x_d \in \mathcal{J}_G / \mathcal{J}_G^{n+1}$ tels que $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d}) \in \mathcal{J}_G / \mathcal{J}_G^2$ soit une base

idéal d'aug. de G

de $\omega_{G/S}$. Soit ~~...~~ $(\delta_1, \dots, \delta_d) \in \omega^*_{G/S}$ la base duale de $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d})$. $\langle x_i, \delta_j \rangle = \delta_{ij}$

$$(\delta_1, \dots, \delta_d) \Longleftrightarrow (D_1, \dots, D_d) \in \mathrm{Diff}^{\leq 1}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G)^{\text{invariants à gauche}}$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ notons $D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d} \in \mathrm{Diff}^{\leq |\alpha|}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G)^{\text{inv.}}$

$$D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d} : \mathcal{O}_G / \mathcal{J}_G^{|\alpha|+1} \longrightarrow \mathcal{O}_G$$

On vérifie alors aussitôt que si $|\alpha| \leq n$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$

$$\langle D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d}, x_1^{\beta_1} \dots x_d^{\beta_d} \rangle = \underbrace{\alpha_1! \dots \alpha_d!}_{\neq 0 \text{ car } \mathrm{Car}(k)=0} \delta_{\alpha, \beta}$$

Donc, $\quad \mathrm{Car}(k) = 0 \Rightarrow (x_1^{\beta_1}, \dots, x_d^{\beta_d})_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta| \leq n}} = $ base de $\mathcal{J}_G / \mathcal{J}_G^{n+1}$.

Cela étant vrai pour tout n on en déduit que $\widehat{\mathcal{O}_{G,e}} = \varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{O}_G / \mathcal{J}_G^{n+1}$ est régulier $\Rightarrow \square$

~~Composantes connexes des schémas en groupes~~

~~k corps. $G = k$-schéma en groupes de type fini.~~

~~G connexe $\Longleftrightarrow$ G géo. connexe $\Longleftrightarrow$ G irréductible~~

~~G possède un point rationnel~~ ~~Ex.~~

~~G^0 = Composante connexe neutre~~

Schémas en groupes étales

Lemme: G/S plat de type fini est étale $\Leftrightarrow \omega_{G/S} = 0$

dem: $\Omega^1_{G/S} = \pi^* \omega_{G/S}$ si $\pi : G \to S$.

$\Omega^1_{G/S} = 0 \Leftrightarrow G/S$ non ramifié. $\square$

* S-Schémas en groupes étales finis $\simeq$ Faisceaux étales localement constants$/S$ en groupes de fibres des groupes finis.

* Si S est connexe, s = point géo. de S, Γ est un groupe fini

$$\text{Schémas en groupes étales finis}/S \text{ de fibre } \Gamma \text{ en } s \simeq \pi_1(S,s) \to \operatorname{Aut}(\Gamma)$$

Ex: k corps de clôture séparable k^s. k-schémas en groupes étales

$$\begin{array}{ccc} k\text{-schémas en groupes étales} & & G \\ \wr & & \downarrow \\ (\Gamma,\rho) \text{ où } \Gamma = \text{groupe fini et } \rho : \operatorname{Gal}(k^s/k) \to \operatorname{Aut}(\Gamma) & & G(k^s) \circlearrowleft \operatorname{Gal}(k^s/k) \end{array}$$

Schémas en groupes radiciels

Déf: G/S est radiciel si le morphisme structural $G \to S$ induit une bijection $|G| \xrightarrow{\sim} |S|$.

Si $\mathcal{I}_G \subset \mathcal{O}_G$ est l'idéal d'augmentation de G/S, G est radiciel si et seulement si $\mathcal{I}_G$ est un nilidéal

(i.e. lorsque S est quasi-compact et G/S de type fini, $\mathcal{I}_G$ est nilpotent, $\mathcal{I}_G^N = 0$ pour $N \gg 0$)

Composantes connexes.

k corps. $G = k$-schéma en groupes de type fini.

. G connexe $\Leftrightarrow$ G géo. connexe $\Leftrightarrow$ G irréductible.

$\quad\quad G(k) \neq \emptyset$

G^0 = composante connexe de $e \in G(k)$.

= sous-schéma en groupes ouvert/fermé.

Déf: $\pi_0(G) := G/G^0$

$\underline{\pi_0}(G)$ est un k-schéma en groupes étale.

Si k^s est une clôture séparable de k, $\underline{\pi_0}(G)(k^s) = \underbrace{\pi_0\left(G \otimes_k k^s\right) \circlearrowleft \mathrm{Gal}(k^s/k)}_{\text{caractérise complètement } \underline{\pi_0}(G).}$