

Filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats

Un formalisme général

(cf. Yves André "Slope filtrations" pour un formalisme plus général)

* \mathcal{C} Catégorie exacte

\mathcal{A} Catégorie abélienne

$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ exact fidèle

"adhérence schématique"

foncteur fibre générique

tel que $\left[F: \left\{ \text{sous-objets stricts de } X \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \text{sous-objets de } F(X) \right\} \right]$
Ceux d'insèrent dans une suite exacte

$\text{rg}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ additive, $\text{rg}(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

On note encore $\text{rg}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$ défini par " $\text{rg} = \text{rg} \circ F$ "

$\text{deg}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ additive

telles que: $\left[X \xrightarrow{u} Y \text{ iso. en fibre générique} \Rightarrow \text{deg}(X) \leq \text{deg}(Y) \text{ avec égalité si } u \text{ est un iso.} \right]$

* Def: $X \in \mathcal{C}$ est semi-stable si $\forall Y \subset X, Y \neq 0, \mu(Y) \leq \mu(X)$.
 \uparrow sous-objet strict

où pour $X \neq 0$ on pose $\mu(X) = \frac{\text{deg } X}{\text{rg } X}$.

Rem: Tout morphisme dans \mathcal{C} admet un noyau et un conoyau: si $f: X \rightarrow Y$
 $\ker f$ est l'unique \mathbb{A}^1 -objet strict de X tel que $F(\ker f) = \ker(Ff)$.

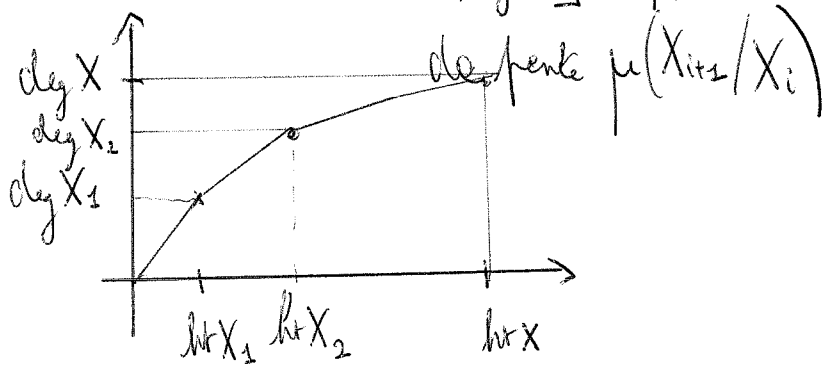
~~De \hat{m}~~ De \hat{m} , $\text{Im } f \subset Y$ est l'unique sous-objet strict tel que
 $F(\text{Im } f) = \overline{\text{Im}(Ff)}$ et $\text{Coker } f = Y/\text{Im } f$.

Notation: $X \subset Y$ signifiera toujours un sous-objet strict.

Th: $\forall X \in \mathcal{C}$, $\exists!$ filtration $0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n = X$ telle que:

- * $\forall i, X_i/X_{i-1}$ est semi-stable
- * $\mu(X_1/X_0) > \dots > \mu(X_n/X_{n-1})$.

Pour un tel X on pose $\text{HN}(X) =$ polygone concave défini sur le segment
 $[0, \text{rg } X]$ tel que sur $[\text{ht } X_i, \text{ht } X_{i+1}]$ il soit



Th: * $\forall Y \subset X$, le point $(\text{rg}(Y), \text{deg}(Y))$ est en dessous du polygone
 $\text{HN}(X)$

* Si de plus ce point est sur le polygone et i est tel que $\text{rg}(X_i) \leq \text{rg}(Y) \leq \text{rg}(X_{i+1})$
alors $X_i \subset Y \subset X_{i+1}$.

$\Rightarrow \text{HN}(X) =$ enveloppe concave des points $(\text{rg}(Y), \text{deg}(Y))_{Y \subset X}$.

(2)

Filtrations de \mathcal{C} : $\mathcal{C}^{\leq \lambda} = \{X \in \mathcal{C} / \text{plus grande pente de } \text{HN}(X) \leq \lambda\}$

$$= \{X \in \mathcal{C} / \forall Y \subset X, Y \neq 0, \mu(Y) \leq \mu(X)\}$$

$\mathcal{C}_{\geq \lambda} = \{X \in \mathcal{C} / \text{la plus petite pente de } \text{HN}(X) \geq \lambda\}$

$$= \{X \in \mathcal{C} / \forall X \rightarrow Y \neq 0 \text{ ép. strict, } \mu(Y) \geq \lambda\}$$

$(\mathcal{C}^{\leq \lambda})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ filtration décroissante

$(\mathcal{C}_{\geq \lambda})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ filtration croissante

$\mathcal{C}_{\lambda}^{\text{ss}} = \mathcal{C}^{\leq \lambda} \cap \mathcal{C}_{\geq \lambda} = \text{objets semi-stables de pente } \lambda$

Th. * $\mathcal{C}^{\leq \lambda}$ et $\mathcal{C}_{\geq \lambda}$ sont des sous-catégories exactes stables par extensions dans \mathcal{C}

* Si $\lambda > \mu$, $\text{Hom}(\mathcal{C}_{\geq \lambda}, \mathcal{C}^{\leq \mu}) = 0$

* $\mathcal{C}_{\lambda}^{\text{ss}}$ est une catégorie abélienne

→ dévissage de la catégorie exacte \mathcal{C} par la famille de catégories abéliennes $(\mathcal{C}_{\lambda}^{\text{ss}})_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

Démo. de l'existence et de l'unicité de la filtration de HN

* Remarque préliminaire: si $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ est une suite exacte dans \mathcal{C}

avec $X' \neq 0$ et $X'' \neq 0$,

$$\mu(X) = \underbrace{\frac{\text{rg } X'}{\text{rg } X} \mu(X') + \frac{\text{rg } X''}{\text{rg } X} \mu(X'')}_{\text{barycentre}}$$

⇒ si on note $[a, b]$ pour l'intervalle noté usuellement $[a, b]$ lorsque $a \leq b$
et $[b, a]$ lorsque $b < a$,

$$\mu(X) \in [\mu(X'), \mu(X'')]$$

Si de plus $\mu(X') \neq \mu(X'')$, $\mu(X) \in]\mu(X'), \mu(X'')[$.

Plus généralement, si $0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n = X$ est une filtration de X ,

$$\mu(X) \in \text{Conv}(\mu(X_i/X_{i-1}))_{1 \leq i \leq n}$$

$$\Rightarrow \left[\inf_{1 \leq i \leq n} \mu(X_i/X_{i-1}) \leq \mu(X) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \mu(X_i/X_{i-1}) \right]$$

* Soit $X \in \mathcal{C}$, $X \neq 0$. Considérons la propriété suivante pour $Y \subset X$

↑ signifie toujours
S. objet strict

$$\left[\begin{array}{l} \text{(SCSS)} \quad Y \text{ est semi-stable et si } Y \subsetneq Y' \subset X \text{ alors } \mu(Y') < \mu(Y) \\ \text{i.e. } Y \text{ est un sous-objet S.S. minimal dans } X \text{ pour la relation d'inclusion.} \end{array} \right]$$

Rem. La condition $Y \subsetneq Y' \subset X \Rightarrow \mu(Y') < \mu(Y)$ est équivalente à

$$0 \neq Y'' \subset X/Y \Rightarrow \mu(Y'') < \mu(Y)$$

$$\text{Car si } Y'' = Y'/Y, \quad \mu(Y') \in [\mu(Y), \mu(Y'')] \text{ et } \mu(Y'') \neq \mu(Y) \Rightarrow \mu(Y') \in]\mu(Y), \mu(Y'')[$$

Lemme. Il existe au plus un seul $Y \subset X$ vérifiant (SCSS).

dem. Soient $Y_1, Y_2 \subset X$ vérifiant (*). Pour montrer que $Y_1 = Y_2$ il suffit de

→ montrer que $Y_1 \subset Y_2$ ou bien $Y_2 \subset Y_1$.

Supposons donc que $Y_1 \not\subset Y_2$. Soit le morphisme canonique

$f: Y_1 \rightarrow X/Y_2$. Il se factorise en

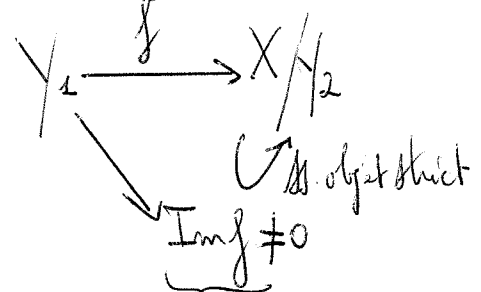


Image de $f =$ adhérence schématique de $\text{Im}(F(f))$.

$Y_1/\text{ker } f \rightarrow \text{Im } f$ est un isomorphisme en fibre générique

$$\Rightarrow \mu(Y_1/\text{ker } f) \leq \mu(\text{Im } f).$$

Mais $Y_1 \text{ s.s.} \Rightarrow \mu(\text{ker } f) \leq \mu(Y_1)$ et donc, puisque $\mu(Y_1) \in [\mu(\text{ker } f), \mu(Y_1/\text{ker } f)]$

ona $\mu(Y_1) \leq \mu(Y_1/\text{ker } f)$ (Δ faire attention si $\text{ker } f = 0$, mais l'égalité est évidente dans ce cas là)

on a donc $\boxed{\mu(Y_1) \leq \mu(\text{Im } f)}$

De plus, Y_2 véridie (SCSS) $\Rightarrow \mu(\text{Im } f) < \mu(Y_2)$.

Donc au final $\boxed{\mu(Y_1) < \mu(Y_2)}$.

Par symétrie, si $Y_2 \not\subset Y_1$ on a de même $\mu(Y_2) < \mu(Y_1)$.

Donc, soit $Y_1 \subset Y_2$, soit $Y_2 \subset Y_1$ □

Lemme: $\mu_{\max}(X) = \sup \{ \mu(Y) / Y \neq 0, Y \subset X \} < +\infty$ pour tout $X \in \mathcal{C}$, $X \neq 0$.

dem: Puisque la fonction $\mu_Y: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ est additive et vérifie

$\mu_Y A = 0 \Leftrightarrow A = 0$, tout objet de \mathcal{A} est de longueur finie (i.e. \mathcal{A} est artésienne et noethérienne)

Soit $0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n = X$ une filtration de X (par des sous-objets simples) dans \mathcal{C} telle que $0 = F(X_0) \subsetneq \dots \subsetneq F(X_n) = F(X)$ soit une suite de Jordan-Hölder de $F(X)$.

Soit $Y \subset X$ et $0 = Y_0 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n = Y$ l'adhérence schématique de la filtration ~~($F(Y) \cap F(X_i)$)~~ $(F(Y) \cap F(X_i))_{0 \leq i \leq n}$.

Pour tout i il y a un morphisme $Y_i/Y_{i-1} \xrightarrow{u_i} X_i/X_{i-1}$

tel que $F(u_i): F(Y_i/Y_{i-1}) \hookrightarrow \underbrace{F(X_i/X_{i-1})}_{\text{objet simple de } \mathcal{A}}$

\Rightarrow soit $Y_i = Y_{i-1}$, soit $F(u_i)$ est un iso.

$$\mu(Y_i/Y_{i-1}) \leq \mu(X_i/X_{i-1}).$$

Donc $\mu(Y) \leq \sup \{ \mu(X_i/X_{i-1}) / 1 \leq i \leq n \}$ \square

Lemme: La borne supérieure précédente est atteinte

} cela sera toujours trivialement le cas dans les applications car soit $\deg: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$, soit $\{ \text{N. objets de } F(X) \}$ est fini.

\rightarrow cas.

Lemme: $\exists Y \subset X$ satisfaisant (SCSS).

dem: L'unicité a déjà été vue.

Existence: il suffit de prendre Y de rang maximal parmi les $Y \subset X$ vérifiant $\mu(Y) = \mu_{\max}(X)$. \square

Preuve de l'existence de la filtration de HN:

Il suffit de construire par récurrence une filtration de X
 $0 = X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_n = X$

telles que $\forall i, X_{i+1}/X_i \subset X/X_i$ vérifie (SCSS), ce qui est possible d'après le lemme précédent. \square

Unicité: Soit $0 \subsetneq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n = X$ une filtration de H.N.

Il suffit de montrer que cela implique que $X_1 \subset X$ vérifie (SCSS)

Unicité: Il suffit de montrer que si $X \in \mathcal{L}$ et $0 = X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_n = X$ est une filtration de H.N. de X alors $X_1 \subset X$ vérifie (SCSS).

Soit $Y \subset X/X_1, Y \neq 0$. Soit $0 = Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n = Y$ la filtration adhérente schématisée de $(F(Y) \cap F(X_i/X_1))_{1 \leq i \leq n}$.

Soit $u_i: Y_i/Y_{i-1} \rightarrow X_i/X_{i-1}$. $F(u_i)$ est un monomorphisme et donc si $Y_i \neq Y_{i-1}$,

$$\Rightarrow \mu(Y_i/Y_{i-1}) \leq \mu(\text{Im } u_i) \leq \mu(X_i/X_{i-1}) < \mu(X_1) \begin{matrix} \uparrow \\ \text{car } \mu(X_1) > \dots \end{matrix} \rightarrow \mu(X_n/X_{n-1}).$$

Puisque $\mu(Y) \leq \sup \{ \mu(Y_i/Y_{i-1}) \mid Y_i \neq Y_{i-1}, 2 \leq i \leq r \}$ on a donc

$$\mu(Y) < \mu(X_1).$$

Cela étant vrai pour tout Y , ~~X_1~~ X_1 vérifie (SCS) \square

Preuve que $\mathcal{C}_\lambda^{\text{ss}}$ est abélienne: $X, Y \in \mathcal{C}_\lambda^{\text{ss}}, f: X \rightarrow Y$

* On sait que $\ker f$ et $\text{Im} f$ existent dans \mathcal{C} . Il reste donc à prouver que

$\ker f, \text{Im} f \in \mathcal{C}_\lambda^{\text{ss}}$ et $X/\ker f \rightarrow \text{Im} f$ est un iso.

$$* X \text{ s.s. de pente } \lambda \Rightarrow \mu(\ker f) \leq \lambda \Rightarrow \mu(X/\ker f) \geq \lambda$$

$$\uparrow \mu(X) \in [\mu(\ker f), \mu(X/\ker f)]$$

$$Y \text{ s.s. de pente } \lambda \Rightarrow \mu(\text{Im} f) \leq \lambda.$$

$$X/\ker f \rightarrow \text{Im} f \text{ iso. en fibre géométrique} \Rightarrow \mu(X/\ker f) \leq \mu(\text{Im} f).$$

$$\text{Donc, } \lambda \leq \mu(X/\ker f) \leq \mu(\text{Im} f) \leq \lambda$$

$$\Rightarrow \mu(\text{Im} f) = \mu(X/\ker f) = \lambda \xrightarrow{\text{can iso. en fibre géométrique}} X/\ker f \rightarrow \text{Im} f \text{ est un iso.}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Im} f \in \mathcal{C}_\lambda^{\text{ss}}$$

$$\Downarrow$$

$$\ker f \in \mathcal{C}_\lambda^{\text{ss}} \text{ car } \lambda = \mu(X) \in [\mu(\ker f), \mu(X/\ker f)] \quad \square$$

Les autres propriétés sont laissées en exercice. \square

Exemples:

* X Courbe projective lisse, $\mathcal{C} = \text{Fib}_X$, $\mathcal{A} = \text{Vect}_{\mathbb{P}^1}(h)$ $h = \text{point gen de } X$
e.v. de dimension finie

deg, rg = fonctions degre et rang usuelles

* K valued, $v: K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\mathcal{C} =$ schémas en groupes commutatifs finis et plats / \mathcal{O}_K d'ordre une puissance de p généralement étalés

$\mathcal{A} = K$ -schémas en groupes finis commutatifs
 $rg = ht$, deg = fonction degre définie précédemment.

* k Corps parfait / \mathbb{F}_p $\mathcal{C} = \mathcal{A} = \text{Istoc}_k$
 $deg(N, \varphi) = t_N(N, \varphi)$
 $rg(N, \varphi) = \dim_{W(k) \otimes \mathbb{Q}} N$

→ filtration de H.N. = filtration par les pentes de Deligne-Illuslami-Mazur
Dans ce cas là elle est canoniquement scindée.

* k / \mathbb{F}_p $\mathcal{C} = \mathcal{A} = \text{pdiv}_k \otimes \mathbb{Q}$ $rg = ht$, deg = dim

→ filtration de H.N. = filtration par les pentes (Zimh)
Elle n'est pas scindée en general, sauf si k est parfait

* $\mathcal{O} = W(k)[[u]] \ni \sigma$ où $\sigma_{W(k)}$ est le Fib. usuel et $\sigma(u) = u^p$
↑ parfait de car. p

$\mathcal{C} = \mathcal{O}$ -modules de Breuil-Kisin
 $= \{(M, \varphi)\}$ où M est un \mathcal{O} -module de type fini annihilé par une puissance de p sans u -torsion

$\left. \begin{array}{l} \varphi: M \rightarrow M \text{ est } \sigma\text{-linéaire induisant} \\ \text{un isomorphisme } M^{(G)} \left[\frac{1}{u} \right] \xrightarrow{\varphi \otimes \text{Id}} M \left[\frac{1}{u} \right] \end{array} \right\}$

$\mathcal{H} = \left\{ (N, \varphi) \text{ où } N \text{ est un } \sigma \left[\frac{1}{u} \right]\text{-module annulé par une puissance de } p \right.$
 $\left. \begin{array}{l} \text{de type fini et } \varphi: N \rightarrow N \text{ est } \sigma\text{-linéaire induisant un iso.} \\ \varphi \otimes \text{Id}: N^{(G)} \xrightarrow{\sim} N \end{array} \right\}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ng} = \text{long}_{\sigma \left[\frac{1}{u} \right]} N \\ \text{deg} = \text{long}_{W(b)} M / \sigma \varphi(M) \end{array} \right.$

$\mathcal{C} \stackrel{(\text{De Jong})}{\simeq}$ Schémas en groupes commutatifs finis et plats / $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{u} \right]$
 \uparrow géométriquement étales
 \downarrow via et iso. les filtrations de H.N. se correspondent

Si K/\mathbb{Q}_p , $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{K_0} \left[\frac{1}{p} \right] / (E \left(\frac{1}{p} \right))$, $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$
 $\underbrace{W(b_K)}_{\text{Eisenstein}} \quad \underbrace{\left[\frac{1}{p} \right]}_{\text{''}} \quad \left\{ (N, \varphi) \mid M / \sigma \varphi(M) \text{ est annulé par } E(u) \right\}$

$\mathcal{C}' \stackrel{(\text{Kisin})}{\simeq}$ Schémas en groupes commutatifs finis et plats d'ordre une
 \uparrow puissance de p / \mathcal{O}_K
 \downarrow via cette équivalence les filtrations de H.N. se correspondent

$* L/K$ une extension de corps. $\mathcal{C} = \text{Vect Fil}_{L/K} = \left\{ (V, \text{Fil} \cdot V_L) \right\} =$ exactes suites exactes
 $\left. \begin{array}{l} \text{strictement compatibles} \\ \text{aux filtrations} \end{array} \right\}$
 $\begin{array}{c} \text{filtration} \\ \text{décroissante "finie"} \\ \text{de } V \otimes L. \end{array}$
 $\begin{array}{c} \text{K.-e.v. de} \\ \text{dim. finie} \end{array}$
 $\begin{array}{c} (V, \text{Fil} \cdot V_L) \\ \swarrow \quad \searrow \\ V \quad \mathcal{A} = \text{Vect}_K \end{array}$

$$N_g = \dim_K V$$

$deg = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \dim_L \varphi^i V_L =$ point terminal du polygone de Hodge associé à la filtration

* $K/K_0 = W(b_K) \mathbb{Q}$

$$(\mathbb{D}, \varphi, \text{Fil} \cdot D_K) \in \varphi\text{-Mod Fil}_{K/K_0} = \left\{ (\mathbb{D}, \varphi, \text{Fil} \cdot D_K) \mid \begin{array}{l} (\mathbb{D}, \varphi) \in \text{IJac}_{b_K} \\ (\mathbb{D}, \text{Fil} \cdot D_K) \in \text{Vect Fil}_{K/K_0} \end{array} \right\}$$

φ -Modules filtrés de Fontaine

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ (\mathbb{D}, \varphi) \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \mathcal{A} = \text{IJac}_{b_K} \end{array} \quad \begin{array}{l} deg = t_H - t_N \\ N_g = ht(\mathbb{D}, \varphi) \end{array}$$

$\mathcal{C}_0^{ss} =$ Objets s.s. de pente 0 = catégorie abélienne des φ -modules filtrés faiblement admissibles de Fontaine.

* $R =$ anneau de Bezout (tout idéal de type fini est principal + intègre)

$\mathcal{E} \subset R$ sous-corps valué, $v: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\sigma \in \text{End}(R)$ un endo. stabilisant \mathcal{E} et tel que $\forall k \in \mathcal{E}, v(\sigma(k)) = v(k)$.

On fait les hypothèses * $\mathcal{E}^\times = R^\times$

* $\forall k \in R, k^{\sigma-1} \in \mathcal{E}^\times \Rightarrow v(k^{\sigma-1}) \geq 0$
($k \neq 0$)

$$\mathcal{C} = \left\{ (M, \varphi) \mid \begin{array}{l} M \text{ est un } R\text{-module libre et } \varphi: M \rightarrow M \text{ est } \sigma\text{-linéaire,} \\ \varphi \otimes \text{Id}: M^{(\sigma)} \xrightarrow{\sim} M \text{ est un iso.} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{A} = \text{Vect}(\text{Fac}(R))$

$$F(M, \varphi) = M \otimes_{\mathbb{R}} \text{Fac}(\mathbb{R})$$

Pour $(M, \varphi) \in \mathcal{L}$ on pose $\nu_{\varphi} = \nu_{\varphi, M}$

$$\deg(M, \varphi) = -v(a) \text{ si } \det(M, \varphi) \simeq \mathbb{R} \cdot e$$

puissance entière maximale

$$\text{avec } \varphi(e) = a e$$

$\mathbb{R}^X = \mathbb{F}^X$

→ Lorsque \mathbb{R} est l'anneau de Robba et $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ le sous-anneau des fonctions bornées on trouve les filtrations étudiées par Kedlaya.

La filtration de H.N. des schémas en groupes finis et plats

K/\mathbb{Q}_p valuée complète $v: K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $v(p) = 1$.

$\mathcal{L} =$ schémas en groupes commutatifs finis et plats \mathcal{G}_K d'ordre une puissance de p .

$$\text{ht}(\mathcal{G}) = \log_p |\mathcal{G}| = v(|\mathcal{G}|)$$

$$\deg(\mathcal{G}) = \sum_i v(a_i) \text{ si } \mathcal{G}_{\mathbb{F}} \simeq \bigoplus_i \mathbb{G}_m / a_i \mathbb{G}_m$$

$$\mu(\mathcal{G}) = \frac{\deg \mathcal{G}}{\text{ht} \mathcal{G}} \in [0, 1], \quad \mu(\mathcal{G}^0) = 1 - \mu(\mathcal{G})$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{G} \text{ étale} \Leftrightarrow \mu(\mathcal{G}) = 0 \\ \mathcal{G} \text{ } p\text{-mult.} \Leftrightarrow \mu(\mathcal{G}) = 1 \end{array} \right.$$

→ filtrations de H.N. dans \mathcal{L} - $HN(G) =$ polygone de H.N.

(7)

Ex: * Si H est un groupe p -divisible / \mathbb{O}_K , $\omega_{H[p^n]} \cong \omega_H / p^n \omega_H$
avec $\omega_H \cong \mathbb{O}_K^{\dim H} \Rightarrow \deg(H[p^n]) = n \dim H$. Donc,

$$\forall n, \quad \boxed{\mu(H[p^n]) = \frac{\dim H}{\dim H}}$$

* Si G est un schéma en groupes de type (p, r, t) au sens de Raynaud
 G est semi-stable. En effet, la filtration de H.N. de G est invariante
sous $\text{End}(G)$, or $H(\mathbb{O}_K)$ est un $\text{End}(G)$ -e.v. de dimension 1.

Nature géométrique de la filtration de H.N.

← éventuellement non algébrique.

Prop: Soit L/K une extension valisée complète et G/\mathbb{O}_K . Alors, la filtration de H.N.
de $G \otimes_{\mathbb{O}_K} \mathbb{O}_L$ est obtenue par image réciproque via $(-)^{\otimes_{\mathbb{O}_K} \mathbb{O}_L}$ de celle de G et donc
 $HN(G) = HN(G \otimes_{\mathbb{O}_K} \mathbb{O}_L)$.

dem: * Supposons d'abord L/K galatienne de degré fini

Si $G' \in \mathcal{L}_{\mathbb{O}_L}$ et $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$, $\mu(G'^{(\sigma)}) = \mu(G')$.

L'application $G' \mapsto G'^{(\sigma)}$ induit une bijection de l'ensemble des
schémas en groupes fermés plats de $G \otimes_{\mathbb{O}_K} \mathbb{O}_L$ dans lui-même.

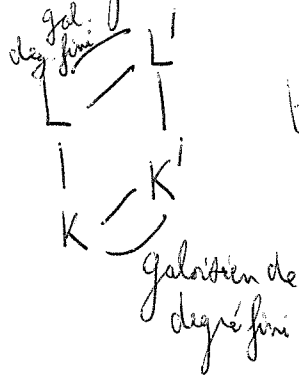
Donc, si $0 = G'_0 \subsetneq \dots \subsetneq G'_n = G \otimes_{\mathbb{O}_K} \mathbb{O}_L$ est la filtration de H.N. de $G \otimes_{\mathbb{O}_K} \mathbb{O}_L$

On a $\forall i, \forall G_i = G_i \Rightarrow$ la filtration précédente provient d'une filtration

$$0 = G_0 \subsetneq \dots \subsetneq G_n = G \text{ de } G.$$

Il est alors immédiat de vérifier que cette filtration est la filtration de H.K. de G .

* Soit L/K quelconque. Soit un diagramme de corps valués complets



tel que $G \otimes K^i$ soit un groupe stable constant i.e. $\cong \underline{G(K^i)}$

Il suffit de vérifier que $HN(G) = HN(G \otimes_{G_K} G_L)$ "i.e. on n'introduit pas d'autres pentes".

$$\begin{aligned} \text{D'après le point précédent } HN(G) &= HN(G \otimes_{G_K} K^i) \\ HN(G \otimes_{G_K} G_L) &= HN(G \otimes_{G_K} G_L^i). \end{aligned}$$

Mais puisque $G \otimes K^i$ est un groupe constant l'application $H_i \rightarrow H_i \otimes_{G^i} G_L^i$ induit une bijection $\{ \text{N. objets stricts de } G \otimes_{G_K} K^i \} \xrightarrow{\sim} \{ \text{N. objets stricts de } G \otimes_{G_K} G_L^i \}$

$$\Rightarrow HN(G \otimes_{G_K} K^i) = HN(G \otimes_{G_K} G_L^i) \quad \square$$

Dualité de Cartier: Utilisant la formule $\forall G \in \mathcal{C}, \mu(G^{\vee}) = 1 - \mu(G)$ on obtient:

Prop. Pour $G \in \mathcal{C}$, si $0 = G_0 \subsetneq \dots \subsetneq G_n = G$ est la filtration de H.N. de G ,

relativement à l'accouplement parfait $G(\overline{K}) \times G^D(\overline{K}) \rightarrow \underbrace{\mathbb{Q}_\ell / 2\ell(1)}_{\mathbb{Y}_{\text{ps}}(\mathbb{K})}$,
 la filtration de H.N. de G^D est l'adhérence schématique de
 la filtration $0 = G_n(\overline{K})^\perp \subsetneq G_{n-1}(\overline{K})^\perp \subsetneq \dots \subsetneq G_0(\overline{K})^\perp = G^D(\overline{K})$

Corollaire. Si G est muni d'un iso. $\lambda: G \xrightarrow{\sim} G^D$ vérifiant $\lambda^D = \pm \lambda$, relativement à l'accouplement parfait (symplectique ou orthogonal) la filtration de $G(\overline{K})$ est de la forme

$$0 = \underbrace{G_D(\overline{K}) \subsetneq \dots \subsetneq G_1(\overline{K})}_{\text{partie de pente } > \frac{1}{2} = \text{trapeau} \text{ totalement isotope}} \subset G_{i+1}(\overline{K}) = G_i(\overline{K})^\perp \subsetneq G_{i-1}(\overline{K})^\perp \subsetneq \dots \subsetneq G_0(\overline{K})^\perp = G(\overline{K})$$

partie de pente $\frac{1}{2}$ (de elle-même): l'accouplement déduit sur $G_{i+1}(\overline{K})/G_i(\overline{K})$ est parfait

Pentes symplectiques via $\lambda \leftrightarrow 1-\lambda$.

Exemple. A schéma abélien / \overline{K} muni d'une polarisation principale en ℓ, λ .

i.e. de degré premier à ℓ

Alors, la filtration de H.N. de $A[\ell]$ définit un sous-groupe parabolique de $G_{\text{sp}}(\mathbb{T}_\ell(A), \langle \cdot, \cdot \rangle)$
 accouplement défini par λ .

Le Cas monogène

Filtration de ramification inférieure - K/\mathbb{Q}_ℓ complète $v: K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $v(\ell) = 1$.

\overline{K} clôture alg. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \cap v(\overline{K}^\times)$ on note $m_{\overline{K}, \lambda} = \{x \in \overline{K} / v(x) \geq \lambda\}$

$G_{\overline{K}, \lambda} = \overline{K} / m_{\overline{K}, \lambda}$, par exemple $G_{\overline{K}, 1} = \overline{K} / \ell \overline{K}$.

* X schéma fini et plat / \mathbb{C}_K génériquement étale ($X_{\mathbb{C}_K}$ étale)

$$X(\mathbb{C}_{\bar{K}}) \xrightarrow[\text{mod } \lambda]{\text{réduction}} X(\mathbb{C}_{\bar{K}, \lambda})$$

$\downarrow \text{Gal}(\bar{K}/K)$
 $\downarrow \cong$
 $\downarrow G_K$

fibres = avoir \hat{m} réduction modulo λ
 définit une relation d'équivalence G_K -invariante sur $X(\mathbb{C}_{\bar{K}})$
 \rightsquigarrow relation d'équivalence sur $X_{\mathbb{C}_K}$

adhérence schématique relation d'équivalence R_λ sur X finie et plate.

$(R_\lambda)_{\lambda > 0}$ famille de relations d'équivalence finies et plates sur X tq. $\lambda \geq \mu \Rightarrow R_\mu$ est plus fine que R_λ .

fini et plat
 $\text{inv} (X \rightarrow X/R_\lambda)_{\lambda > 0}$
 \downarrow
 $X \rightarrow X/R_\lambda$
 \uparrow
 X/R_μ

* Lorsque $X = G$ est un schéma en groupes fini et plat / \mathbb{C}_K les relations d'équivalence précédentes sont compatibles à la structure de groupe. Plus précisément,

pour $\lambda > 0$, posons $G(\mathbb{C}_{\bar{K}})_\lambda = \ker(G(\mathbb{C}_{\bar{K}}) \rightarrow G(\mathbb{C}_{\bar{K}, \lambda}))$

$\underbrace{\quad}_{\cong}$
 \cong groupe de $G(\mathbb{C}_{\bar{K}})$
 invariant sous G_K

$\rightsquigarrow (G_{\mathbb{C}_K})_\lambda$ sous-groupe de $G_{\mathbb{C}_K}$

$\rightsquigarrow G_\lambda$ sous-groupe fini plat de G

adhérence schématique

$G_\lambda =$ unique \mathbb{A} -objet strict de G dans \mathcal{L} tel que $G_\lambda(\mathbb{C}_{\bar{K}}) = G(\mathbb{C}_{\bar{K}})_\lambda$.

$(G_\lambda)_{\lambda > 0} =$ ~~famille de sous-groupes~~ filtration décroissante de G dans \mathcal{L} .

$[G_\lambda = 0 \text{ pour } \lambda \gg 0, \quad G_{0+} = \bigcup_{\lambda > 0} G_\lambda = G^0 \text{ composante neutre.}]$

Alors, $R_\lambda =$ relation d'éq. déduite de l'action par translations de G_λ sur G .

$X/R_\lambda = G/G_\lambda$.

La filtration de ramification inférieure est compatible à la restriction.

$$\text{si } H \subset G, \quad \boxed{H_\lambda(\overline{K}) = H \cap G_\lambda(\overline{K})}$$

i.e. $(H_\lambda)_{\lambda > 0}$ est obtenue à partir de $(G_\lambda)_{\lambda > 0}$ en l'intersectant avec H .

Le Cas Monogène :

Supposons maintenant que $G = \text{Spec}(\mathbb{C}_K[T]/(f(T)))$ où $f \in \mathbb{C}_K[T]$ est un polynôme unitaire vérifiant $f(0) = 0$ et tel que la section $T=0$ de G soit la section neutre.

Ex : Si $G =$ noyau d'une isogenie de groupes formels p -divisibles de dimension 1 / \mathbb{C}_K .

$$G(\overline{K}) = \text{racines de } f \text{ dans } \overline{K}$$

$$\text{Si } f(T) = \prod_{i \in I} (T - \alpha_i) \quad \left(\text{où les } (\alpha_i)_i \text{ sont distincts car } G \otimes K \text{ est étale} \right)$$

i.e. f est séparable

$$\text{soit } f_\lambda(T) = \prod_{\substack{i \in I \\ v(\alpha_i) \geq \lambda}} (T - \alpha_i) \in \mathbb{C}_K[T]. \text{ Alors, } \boxed{G_\lambda = \text{Spec}(\mathbb{C}_K[T]/(f_\lambda(T)))}$$

$$\left[\begin{array}{l} \deg(G) = v(f'(0)) = \sum_{i \in I} v(\alpha_i) \\ |G| = |I| \end{array} \right]$$

Si $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ sont les sauts de la filtration $(G_\lambda)_{\lambda > 0}$ i.e.

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \{v(\alpha_i) \mid i \in I\}$$

$$\deg(G) = \sum_{b=1}^n \lambda_b \left| \{i \in I / v(\lambda_i) = \lambda_b\} \right|$$

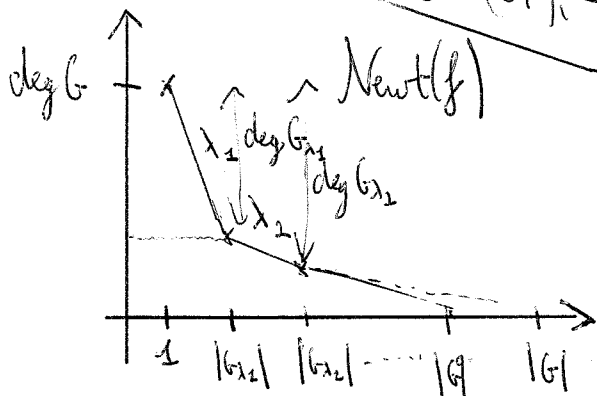
$$= \sum_{b=1}^n \lambda_b (|G_{\lambda_b}| - |G_{\lambda_{b-1}}|) \quad \text{où l'on a posé } G_{\lambda_0} = 0.$$

$$= \int_0^{+\infty} (|G_\lambda| - 1) d\lambda$$

→ formule à rapprocher de "Gps Locaux" prop. 4 p. 72

$$v_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \sum_{i=0}^{+\infty} (|G_i| - 1)$$

où $(G_i)_i$ = filtration de ramification inférieure de $G_{\text{Gal}}(L/K)$.



$$i f = \sum_{i \geq 1} a_i T^i$$

$\text{Newt}(f) =$ enveloppe convexe des points $(i, v(a_i))_{i \geq 1}$

} pentes de $\text{Newt}(f) =$ sauts de la filtration $(G_\lambda)_{\lambda > 0}$

parties de pente 0 $\leftrightarrow G/G^0 = G^{\text{ét}}$

abscisses des points de rupture = ordre de G_λ en un saut (i.e. $G_\lambda \neq G_{\lambda+}$)

$\text{Newt}(f) =$ enveloppe convexe des points $(|H|, \deg G - \deg H)$ lorsque H parcourt les sous-groupes plats finis de G .

* Supposons maintenant que G soit d'ordre fini et que f soit un polynôme de G .

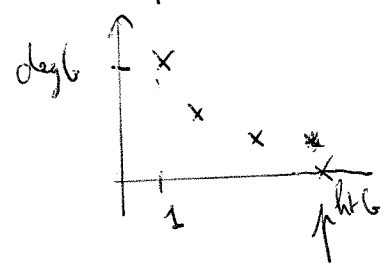
⇒ les abscisses des points de rupture de $\text{Newt}(f)$ sont des puissances de p .

Supposons maintenant que G est d'ordre une puissance de p
 \Rightarrow les abscisses des points de rupture de $\text{Newt}(f)$
 sont des puissances de p .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Newt}(f) = \text{Enveloppe Convexe des } (p^{htH}, \deg G - \deg H), H \subset G \\ \text{HN}(G) = \text{Enveloppe Concave des } (htH, \deg H), H \subset G. \end{array} \right.$$

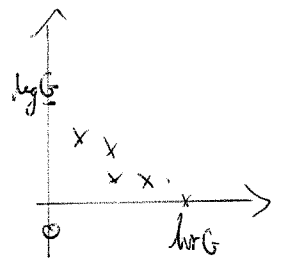
Algorithme:

$\text{Newt}(f)$ ou
 Comme la collection
 de ses points de rupture



Changement
 d'échelle logarithmique
 $(ny) \mapsto (\log p^h, y)$

Collection de points
 dans \mathbb{R}^2



Concavifie

Polygone Convexe d'origine
 $(0, \deg G)$ et de point terminal
 $(htG, 0)$

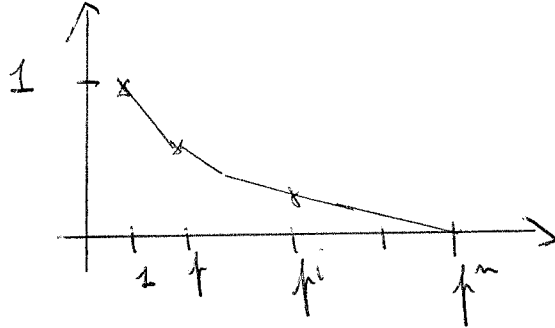
$\text{HN}(G)$ ← renverse le polygone de manière à
 avoir un polygone concave.

~~La filtration de G est un saut de la filtration de $\text{HN}(G)$.~~

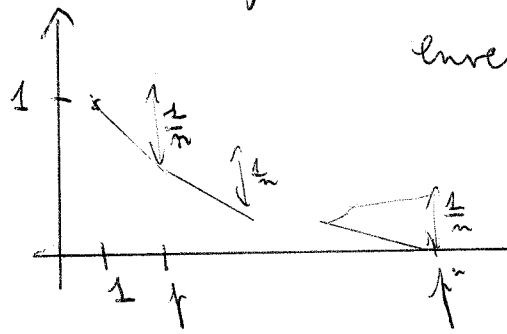
\Rightarrow tout élément de la filtration de H.N. de G est un saut de la
 filtration $(G_n)_{n \geq 0}$.

La réciproque est fautive: par exemple, soit H un groupe formel p -div. de dim. 1 et ht. n/\mathbb{O}_K ($n=2$, $H = E[p]$, E Courbe elliptique à réduction supersingulière)

$$\text{Newt}(H[p]) =$$



$H[p]$ semi-stable $\Leftrightarrow \text{Newt}(H[p]) \geq P$ où P est le polygone suivant



enveloppe convexe des points

$$\left(p^i, 1 - \frac{i}{n} \right)_{0 \leq i \leq n}$$

↳ sont tous des points de rupture.