

Rappels de la dernière fois.

G un schéma en groupes
 $\downarrow \pi$
 S

$J =$ idéal d'augmentation de G . $\omega_{G/S} = J/J^2 = e^* \Omega_{G/S}^1$

\cap
 G_G

$$\Omega_{G/S}^1 = \pi^* \omega_{G/S}$$

$$\omega_{G/S} = (\pi_* \Omega_{G/S}^1)^G = \text{formes diff. invariantes}$$

Si $\text{Diff}^{\leq n}(G, G) =$ op. diff. d'ordre $\leq n$ sur G .

$$e^* \text{Diff}^{\leq n}(G, G) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(G_G/J^{n+1}, \mathcal{O}_S) = \text{distributions sur } G \text{ à support dans } V(J^{n+1})$$

$$\text{Diff}^{\leq n}(G, G) = (\pi_* \text{Diff}^{\leq n})^G = \text{op. diff. invariantes}$$

$$\text{Diff}^{\leq n}(G, G) = \pi_* \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(G_G/J^{n+1}, \mathcal{O}_S)$$

Composition des op. diff., $\text{Diff}^{\leq n} \times \text{Diff}^{\leq m} \rightarrow \text{Diff}^{\leq n+m}$ conduit sur les op. diff. invariantes.

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(G_G/J^{n+1}, \mathcal{O}_S) \times \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(G_G/J^{m+1}, \mathcal{O}_S) \xrightarrow[\text{convolution}_{\mathcal{O}_S}]{*} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(G_G/J^{n+m+1}, \mathcal{O}_S)$$

critère de lissité d'un schéma en groupes

Prop. k corps. G un k -schéma en groupes de type fini. Sont équivalents.

- * G est lisse
- * G est géo. réduit
- * $O_{G,e} \otimes_k \bar{k}$ est réduit

→ Se déduit du fait que si k alg. clos, $X = k$ -schéma réduit de type fini
 alors $X^{\text{lisse}} = \text{ouvert Zariski dense}$
 + translations par un élément de $G(\bar{k})$ \square

\Rightarrow S -schémas en groupes lisses = S -schémas en groupes plats de présentation finie à fibres géo. réduites.

Lissité des schémas en groupes sur des bases de car. 0

Th (Cartier). Soit S un $\text{Spec}(A)$ -schéma et G un S -schéma en groupes plat de présentation finie. Alors, G/S est lisse.

dem. On peut supposer que $S = \text{Spec}(k)$ avec $\text{car}(k) = 0$.

Soit $m \geq 1$. Soient $x_1, \dots, x_d \in \underbrace{J_G/J_G^{m+1}}_{\text{idéal d'aug. de } G}$ tels que $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \in J_G/J_G^2 = \mathcal{C}_{G/S}$
 fait une base de $\mathcal{C}_{G/S}$.

Soit $(\delta_1, \dots, \delta_d) \in \mathcal{C}_{G/S}^*$ la base duale : $\langle \delta_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

$(\delta_1, \dots, \delta_d) \leftrightarrow (D_1, \dots, D_d) \in \left(\text{Diff}^{\leq 1}(O_G, O_G) \right)^d$
 invariants à gauche

~~Soit~~ Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ notons $D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d} \in \text{Diff}^{\leq |\alpha|}(O_G, O_G)$
 invariant

$D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d} : O_G/J_G^{|\alpha|+1} \rightarrow O_G^{\alpha} = k$.

On vérifie alors que si $|\alpha| \leq m$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$

$$\langle D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d}, x_1^{\beta_1} \dots x_d^{\beta_d} \rangle = \alpha_1! \dots \alpha_d! S_{\alpha, \beta} \neq 0 \text{ car } \text{Car}(b) = 0.$$

Donc, $\text{Car}(b) = 0 \Rightarrow (x_1^{\beta_1}, \dots, x_d^{\beta_d})_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta| \leq m}}$ = base de $\mathcal{I}_G / \mathcal{I}_G^{m+1}$

Cela étant vrai pour tout m on en déduit que $\widehat{\mathcal{O}_{G,e}} = \varprojlim_{m \geq 0} \mathcal{O}_G / \mathcal{I}_G^{m+1}$ est régulier

$\Rightarrow \mathcal{O}_{G,e}$ régulier $\Rightarrow \square$

Rappel: Morphisme de Frobenius.

\times Schéma. $\mathcal{F}^n =$ faisceau \mathcal{H}^n sur S^n .

\downarrow
 $\text{Spec}(\mathcal{F}^n)$

$S \xrightarrow{\text{Frob}_S} S$ Frobenius absolu

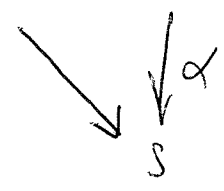
$$\boxed{\mathcal{F}^n \cong \text{Frob}_S^* \mathcal{F}^n}$$

Si \mathcal{U} est un S^n -schéma notons $\mathcal{U}^{[n]} = \mathcal{U}$

$\downarrow \alpha$
 S

ou comme S^n -schéma via $\alpha \circ \text{Frob}_S$.

$\mathcal{U}^{[n]} = \mathcal{U} \xrightarrow{\text{Frob}_S} \mathcal{U}$ morphisme de S^n -schémas entre $\mathcal{U}^{[n]}$ et \mathcal{U} .



~~...~~

$$\mathcal{F}^{(A)}(\bar{U}) = \mathcal{F}(\bar{U}[t])$$

$$F_{\mathcal{F}/S} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{(A)} \quad \text{morphisme de faisceaux}$$

tel que

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\bar{U}) \rightarrow \mathcal{F}^{(A)}(\bar{U}) = \mathcal{F}(\bar{U}[t]) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ S \xrightarrow{\quad} \text{Fol}_S^* \end{cases}$$

* Lorsque $\mathcal{F} = X$ est représentable, $F_{X/S}$ est donné par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_{X/S}} & X \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F_{X/S}^{(A)}} & X \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ S & \xrightarrow{F_{S/S}} & S \end{array}$$

* Si $G = S$ -schéma en groupes $F_{G/S} : G \rightarrow G^{(A)}$ est un morphisme de schémas en groupes.

- Rappel -

Th: k corps de caractéristique p . $G = k$ -schéma en groupes annulé par Frobenius
 (i.e. $F_G = 0 \Leftrightarrow \text{si } G = \text{Spec}(k \oplus \mathbb{I}) \text{ alors } \forall x \in \mathbb{I}, x^p = 0$). Alors, comme k -schéma
 idéal d'augmentation

$$G \cong \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_d] / (T_1^p, \dots, T_d^p))$$

dem. Il dem. que pour montrer que $\text{car}(b)=0 \Rightarrow G$ lisse.

Utilise le fait que si $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et $\forall i, \alpha_i < p$ alors $\alpha_1! \dots \alpha_d! \neq 0 \in b$.

□

~~Th (Raynaud)~~

Rem. Pour étudier les schémas en gf. non annulés par F on aura besoin des puissances divisées...

* Rappel:

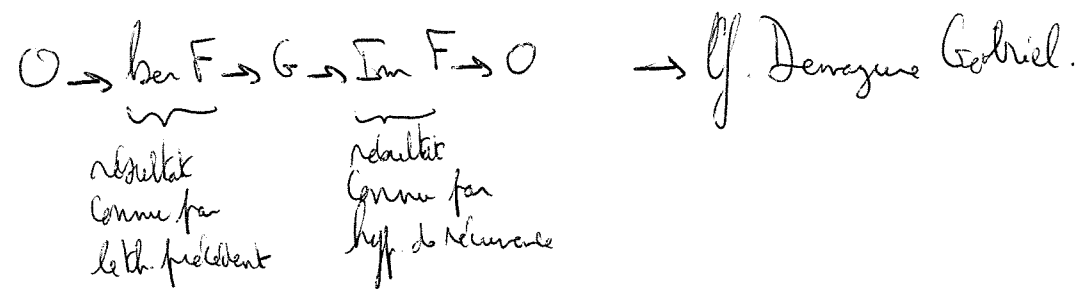
Schémas en groupes radiciels - G/S schéma en groupes tel que $|G| \rightsquigarrow |S| \Leftrightarrow$ si $I \subset \mathcal{O}_G$ est l'idéal définissant la section unité, alors I est un nil-idéal.

* Th (Raynaud): $b =$ Corps de Caractéristique p , parfait. $G = b$ -schéma en groupes radiciel. Alors, comme b -schéma, $G \simeq \text{Spec}(b[T_1, \dots, T_d] / (T_1^{p^{a_1}}, \dots, T_d^{p^{a_d}}))$ pour $d = \dim_b \mathcal{O}_G$ et des entiers $a_1, \dots, a_d \geq 1$.

Principe de la dem.: $G = b$ -schéma en groupes fini.

G radiciel \Leftrightarrow annulé par une puissance de F .

On connait déjà le résultat si $F_G = 0$. Récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ tel que $F_G^m = 0$.



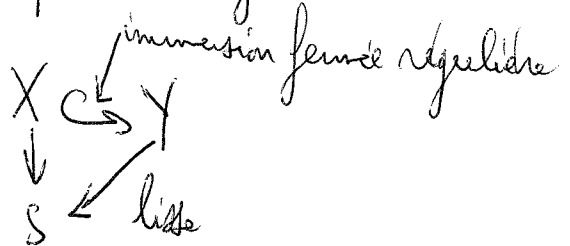
plat de présentation finie, localement intersection complète

S-schémas symptomiques

cf. EGA IV chap. 19.

Def. $X \rightarrow S$ est symptomique s'il est plat de présentation finie et

localement au X il existe un plongement

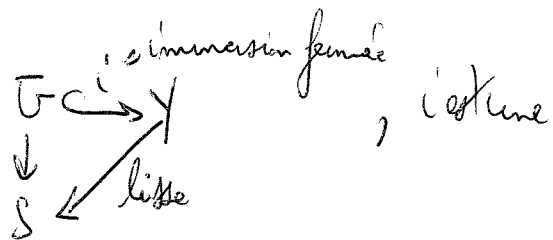


où immersion fermée régulière = immersion fermée localement définie par une suite régulière.

Th: Soit $f: X \rightarrow S$ plat de présentation finie. Sont équivalents:

* f est symptomique

* $\forall U$ ouvert de $X, \forall V$



immersion régulière

* $\forall s \in S, f_s: X_s \rightarrow \text{Spec}(k(s))$ est symptomique

* $\forall s \in S, \forall x \in X_s, \widehat{\mathcal{O}}_{X_s, x} =$ quotient d'un anneau local régulier par une suite régulière.

Syntacticité des schémas en groupes

Th. Tout S -schéma en groupes plat de présentation finie est syntactique.

dem. D'après le critère fibre à fibre précédent on peut supposer que $S = \text{Spec}(k)$, k corps.

La propriété d'être syntactique est locale pour la topologie étale/ S .

\Rightarrow on peut supposer k algébriquement clos.

G k -schéma en groupes + k parfait $\Rightarrow G_{\text{red}} \subset G$ est un sous- k -schéma en groupes lisse/ k (car G_{red} réduit + k parfait $\Rightarrow G_{\text{red}} \times G_{\text{red}} = (G \times G)_{\text{red}}$)

$$1 \rightarrow G_{\text{red}} \rightarrow G \rightarrow G/G_{\text{red}} \rightarrow 1$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{lisse}} \qquad \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{schéma en groupes}}$

fini radical \Rightarrow syntactique/ k

\uparrow Théorème de Raynaud précédent

G_{red} lisse $\Rightarrow G \xrightarrow{\text{lisse}} G/G_{\text{red}}$ car $G = G_{\text{red}}$ -torseur au dessus de G/G_{red} .

$$G \xrightarrow{\text{lisse}} G/G_{\text{red}} \xrightarrow{\text{syntactique}} \text{Spec}(k)$$

\Rightarrow syntactique

(la composée de 2 morphismes syntactiques est syntactique)



Corollaire: $f: G_1 \rightarrow G_2$ épi. \Leftrightarrow fidèlement plat \Leftrightarrow recouvrement syntactique.

Dualité de Cartier

* $\mathcal{C} =$ cat. des S -schémas en groupes finis loc. libres commutatifs

↳
cat. exacte

* \mathcal{C} est munie d'une involution exacte.

↳
 $G \mapsto \boxed{G^D := \underline{\text{Hom}}(G, G_m)}$ comme feuilleté ffpf

G^D est représentable. Si $G = \text{Spec}(A)$, $A = C_0$ -algèbre de Koff commutative

alors $\boxed{G^D = \text{Spec}(A^V)}$ $\Delta: A \rightarrow A \otimes_{C_0} A$ la comultiplication

induit $A^V \otimes A^V = (A \otimes A)^V \rightarrow A^V$

qui définit la structure d'algèbre sur A^V

la loi de mult. de l'alg. A , $A \otimes A \rightarrow A$

induit $A^V \rightarrow (A \otimes A)^V = A^V \otimes A^V$ qui est la comultiplication de A^V .

* Cette description de G^D montre que le morphisme de bidualité $G \rightarrow (G^D)^D$ est un isomorphisme.

* Si $0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 0$ est exacte alors $0 \rightarrow G_3^D \rightarrow G_2^D \rightarrow G_1^D \rightarrow 0$ l'est également.

En effet, $0 \rightarrow G_3^D \rightarrow G_2^D \rightarrow G_1^D$ est clairement une suite exacte de feuilletés ffpf

par application de $\underline{\text{Hom}}(-, G_m)$. De plus $|G_2| = |G_1| |G_3| \Rightarrow |G_2^D| = |G_1^D| |G_3^D|$

$G_2^D / G_3^D \hookrightarrow G_1^D$ immersion fermée de S -schémas
finis loc. libres de \tilde{m} rang $\Rightarrow \text{th. } \square$

Exo. Montrer qu'en fait $\forall G \in \mathcal{L}, \text{Ent}^{-1}(G, G_m) = 0$.

(5)

Ordre d'un schéma en groupes finis loc. libre

$G \in \mathcal{L}, G \xrightarrow{\pi} S, \boxed{|G| = \pi_{y_{G_3}}(\pi_* G_G)} \in \{ \text{fonctions loc. constantes } |S| \rightarrow \mathbb{N} \}$

* $\mathcal{L} \rightarrow \{ - \}$ est une fonction multiplicative.

$G \mapsto |G|$

i.e. si $0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \xrightarrow{f} G_3 \rightarrow 0$ est exacte et $f = \text{fini loc. libre}$

$\boxed{|G_2| = |G_1| \cdot |G_3|}$

En effet, la suite est scindée au dessus du recouvrement $G_2 \rightarrow G_3$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & G_1 & \rightarrow & G_2 & \rightarrow & G_3 \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \pi & \square & \downarrow f \\ 0 & \rightarrow & G_1 & \rightarrow & G_2 & \xrightarrow{f} & G_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

$G_2 \times_{G_3} G_2 \simeq G_1 \times_S G_2$

(1) $\pi_y(f)^2 \cdot |G_3| = |G_1| \cdot |G_2|$

$\pi_y(G_2 \times_{G_3} G_2 / S) = \pi_y(G_2 \times_{G_3} G_2 / G_3) \cdot |G_3|$

Mais $G_2 \xrightarrow{f} G_3 \Rightarrow \pi_y(f) \cdot |G_3| = |G_2|$ (2)

(1)+(2) \Rightarrow resultat. \square

* Th (Deligne). Si $G \in \mathcal{L}$ alors G est annulé par $|G|$. \rightarrow cf. Cart-tub (utilise le morphisme en Coh. plate)

\Rightarrow si $|G| = \prod_{p \text{ premier}} p^{v_p(|G|)}$

$G = \bigoplus_p G[p^{v_p(|G|)}]$
 \uparrow fini loc. libre d'ordre $p^{v_p(|G|)}$

Verschiebung :

$A =$ anneau tel que $pA = 0$.

* $M = A$ -module

$$\Delta: M^{\otimes r} \rightarrow (M^{\otimes r})^{\sigma_r} \quad \text{opérateur de symétrisation}$$

$$m_1 \otimes \dots \otimes m_r \mapsto \sum_{\sigma \in \sigma_r} m_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes m_{\sigma(r)}$$

Il y a un morphisme de ~~groupes~~ $f: M \rightarrow (M^{\otimes r})^{\sigma_r} / \Delta(M^{\otimes r})$ (lino.)

$$m \mapsto m \otimes \dots \otimes m$$

De plus, $f(am) = a^r f(m) \Rightarrow$ si $M^{(r)} = M \otimes_{A, \text{fini}} A$ il induit un morphisme de A -modules

$$M^{(r)} \rightarrow (M^{\otimes r})^{\sigma_r} / \Delta(M^{\otimes r})$$

Prop: Si M est plat sur A alors le morphisme précédent est un isomorphisme

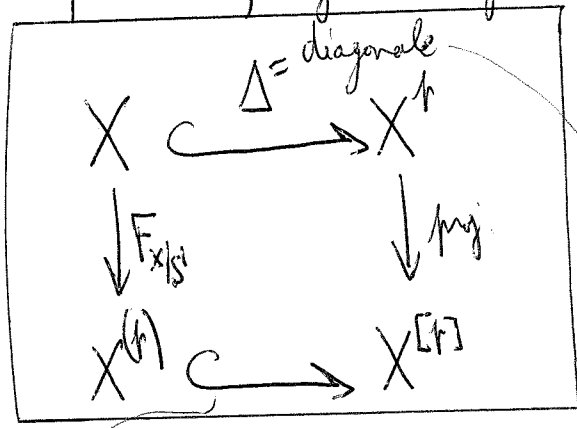
\rightarrow facile si M est libre de rang fini (calcul explicite sur des bases)
 + tout module plat est \varinjlim filtrante de modules libres de rang fini.

* Si $B = A$ -algebre $B^{(r)} \rightarrow (B^{\otimes r})^{\sigma_r} / \Delta(B^{\otimes r})$ est un morphisme d'algebres

qui est donc un iso. d'algebres si $A \rightarrow B$ est plat.

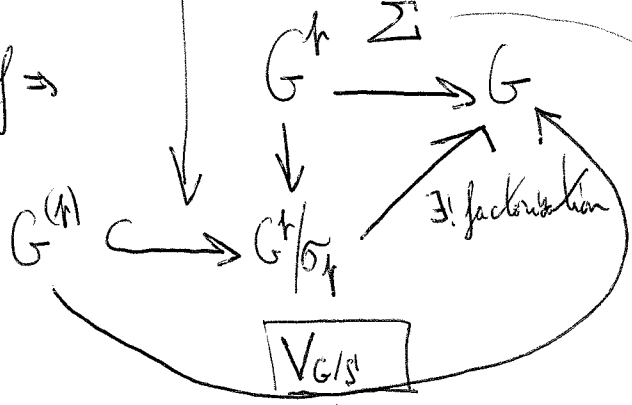
* Si $X \xrightarrow{f} S$ est affine et plat. Considérons $X^{[F]} = X^{\#} / \sigma_F$
 $\text{Spec}(F_T)$ -schéma $= \text{Spec} \left((f_* \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} f_* \mathcal{O}_X)^{\sigma_F} \right)$

D'après les considérations précédentes, il y a un diagramme commutatif



* Soit maintenant G un S -schéma en groupes plat affine commutatif.

G commutatif \Rightarrow



"morphisme de S -schémas en groupes = translation"

Diagramme précédent \Rightarrow $V \circ F = \mu$ Car $\mu = \Sigma \circ \Delta$

* Si G/S est fini localement libre alors $V = \text{Cartier dual de } F$.

Plus précisément, $F_{G^D} : G^D \rightarrow (G^D)^{(F)} = (G^{(F)})^D$
 induit $V_G = (F_{G^D})^D : G^{(F)} = ((G^{(F)})^D)^D \rightarrow (G^D)^D = G$.

Donc, dans ce cas là $\begin{cases} FV = f \\ VF = p \end{cases}$.

Ex. $\times G = \mathbb{A}^1/\mathbb{Z}$, ~~$F_G = \text{Id}$~~ $F_G = \text{Id}$, $V_G = 0$

$$G^D = \mathbb{A}^1, F_{\mathbb{A}^1} = 0, V_{\mathbb{A}^1} = \text{Id}$$

$$\# G = \mathbb{A}^1, G^D = G, F_G = V_G = 0.$$

Schémas en groupes étales

Lemme. G/S plat de type fini est étale $\Leftrightarrow \omega_{G/S} = 0$

dem. $\Omega_{G/S}^1 = \pi^* \omega_{G/S}$ si $\pi: G \rightarrow S$

$$\Omega_{G/S}^1 = 0 \Leftrightarrow G/S \text{ non ramifiée } \square$$

$\# S = \text{schéma annulé par une puissance de } p$ - $G/S = \text{schéma en groupes fini localement libre commutatif.}$
 $p^N \omega_S = 0$ pour $N \gg 0$.

Lemme. $(|G|, p) = 1 \Rightarrow G$ étale.

dem. $G \xrightarrow{\times|G|} G$ est le morphisme nul $\Rightarrow \omega_G \xrightarrow{\times|G|} \omega_G$ est le morphisme nul

$$\Rightarrow \omega_G = 0. \quad \square$$

$\nwarrow |G| \in \mathbb{P}(S, \mathbb{Z})^{\times}$

Corollaire. $G \cong G_1 \oplus G_2$
 d'ordre $\underbrace{\quad}$ étale
 une puissance de p

\Rightarrow Les seuls schémas en groupes commutatifs finis loc. libres / bases annulées par des puissances de p qui sont "intéressants" sont ceux d'ordre une puissance de p .

~~Si S schéma connexe, S schéma en groupes étale fini~~

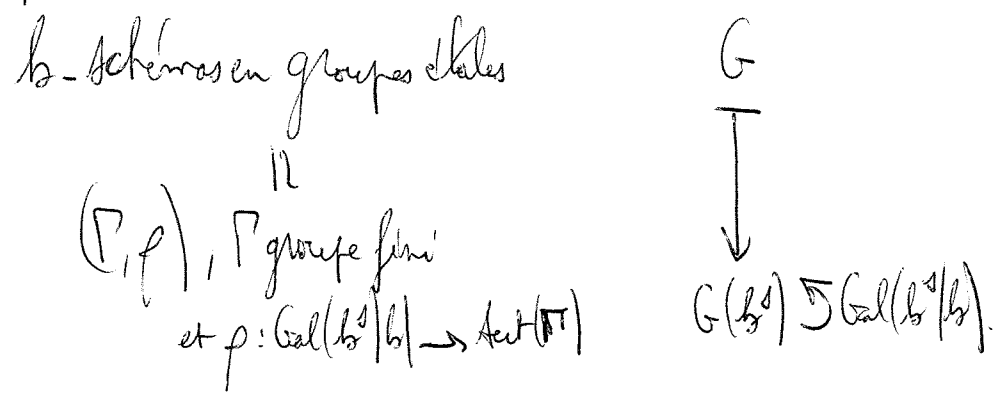
* Schémas -

S -schémas en groupes étale finis \cong Torsion en groupes étale localement constants de fibres des groupes finis.

Si S connexe, $s =$ point géométrique de S ,

S -schémas en groupes étale finis $\cong (\Gamma, \rho)$ cf. finis + action discrète de π_1 .
 où $\Gamma =$ groupe fini et $\rho: \pi_1(S, s) \rightarrow \text{Act}(\Gamma)$.

Ex. b corps de clôture séparable b^s .



Composantes Connexes

k Corps. $G = k$ -schéma en groupes de type fini.

$$G \text{ Connexe} \iff G \text{ géo. Connexe} \iff G \text{ irréductible}$$

\uparrow
 $G(k) \neq \emptyset$

$G^0 =$ Composante Connexe de $e \in G(k)$
 $=$ sous-schéma en groupes ouvert de G , $G^0 \triangleleft G$.

Def. $\pi_0(G) = G/G^0 = k$ -schéma en groupes étale.

Si k^s est une clôture séparable de k , $\pi_0(G)(k^s) = \pi_0(G \otimes_k k^s) \cong \text{Gal}(k^s/k)$
Caractérisé complètement
 $\pi_0(G)$

* Si G est affine, $\pi_0(G) = \text{Spec}(\text{plus grande sous-algèbre étale de } \Gamma(G, G_0))$.

* Si $G = k$ -schéma en groupes ~~connexe~~ fini, $G \text{ Connexe} \iff G \text{ radiciel}$

Développement

$$1 \rightarrow G^0 \rightarrow G \rightarrow \pi_0(G) \rightarrow 1$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{radiciel}} \qquad \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{étale}}$

Si de plus k est parfait, $G_{\text{red}} \subset G$ est un sous-schéma en gp. étale

et $G_{\text{red}} \hookrightarrow G \twoheadrightarrow \pi_0(G) -$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\cong}$
iso.

\Rightarrow la suite exacte précédente est canoniquement scindée.

$$G = G^0 \times \pi_0(G).$$

Le morphisme α_G

S schéma. Si \mathcal{R} est un \mathcal{O}_S -module quasi-cohérent il définit un faisceau $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{R}$ tel que si $U \xrightarrow{\beta} S$, $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{R})$.

* En général, \mathcal{R} n'est pas représentable. Cependant, si \mathcal{R} est localement libre de rang fini alors \mathcal{R} est représentable par la réalisation géométrique du fibre associé, $\text{Spec}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{R}^\vee)$. Donc, dans ce cas là,

\mathcal{R} est loc. isomorphe à $\mathcal{O}_a^{\oplus \text{fini}}$

G fini loc. libre commutatif / S^1

Def: $\alpha_G: G \longrightarrow \underline{\text{Co}}_G^D$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \text{Hom}(G, G_m) & & \mathbb{A}^1 \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \frac{dT}{T} \\ & & \in \underline{\text{Co}}_{G_m} \end{array}$$

Prop: α_G est universel pour les morphismes vers les faisceaux de la forme \underline{R} .

$\forall R = \mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent ~~sur~~, α_G induit

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\omega_{G^D}, R) \cong \text{Hom}(G, \underline{R})$$

dem: ~~Soit $\mathcal{O}_S \oplus R$ l'algèbre augmentée obtenue en posant $\forall x \in R, x^2 = 0$.~~

~~Soit $\mathcal{O}_S \oplus R$ l'algèbre augmentée obtenue en posant $\forall x \in R, x^2 = 0$.~~

Soit $\mathcal{O}_S \oplus R$ l'algèbre augmentée obtenue en posant $\forall x \in R, x^2 = 0$.

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_S \oplus R)$$

$$\downarrow \pi$$

$$S$$

$\pi^* G_m =$ restriction des scalaires à la Weil de G_m
(pas nécessairement représentable ici car R pas forcément loc. libre)

Il y a une résolution $0 \rightarrow \underline{R} \rightarrow \pi^* G_m \rightarrow G_m \rightarrow 0$ (scindée)

donnée par si $U \xrightarrow{\mathcal{I}} S$, $0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{I}^* R) \rightarrow \left[\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \oplus \Gamma(U, \mathcal{I}^* R) \right]^X \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^X \rightarrow 0$

$$x \mapsto (1, x)$$

$$(a, b) \mapsto a$$

Appliquant $\text{Hom}(G^D, -)$ à cette suite exacte scindée on obtient

$$0 \rightarrow \text{Hom}(G, \underline{R}) \rightarrow \text{Hom}(G, \pi^* G_m) \rightarrow G^D \rightarrow 0$$

Il suffit de vérifier que

$$\pi^* \text{Hom}(\pi^* G, G_m) = \pi^* G^D \quad \text{car} \quad (\pi^* G^D \rightarrow G^D) \simeq \omega_{G^D}$$

□

Classification des schémas en groupes annulés par F

(9)

$S = \mathbb{F}_p$ -schéma.

$\mathcal{C} = S$ -schémas en groupes commutatifs finis localement libres

Prop. Soit $G \in \mathcal{C}$ tel que $F_G = 0$. Alors, ω_G est localement libre de rang fini.

De plus, localement sur S on a $G \cong \text{Spec}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_S} \omega_G / \text{Sym}_{\mathcal{O}_S}^{\geq r} \omega_G)$.

Dém. Soit $s \in S$. On sait que $G_s \cong \text{Spec}(k[s][T_1, \dots, T_d] / (T_1^{n_1}, \dots, T_d^{n_d}))$ où

$d = \dim_{k[s]} \mathcal{C}_{G_s}$. Donc, $|G| = p^d$.

Soit $G = \text{Spec}(G_s \oplus \mathcal{I})$, $\mathcal{I} =$ idéal d'augmentation. Soient $x_1, \dots, x_d \in \mathcal{I}_{G_s}$

tels que leur image dans $\mathcal{C}_{G_s} = \mathcal{I}_{G_s} / \mathcal{I}_{G_s}^2 \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k[s]$ forment une base.

$F_G = 0 \Rightarrow \forall i, x_i^{\#} = 0$. Alors, d'après le lemme de Nagayama le morphisme

$$\mathcal{O}_{S,s}[T_1, \dots, T_d] / (T_1^{n_1}, \dots, T_d^{n_d}) \longrightarrow \mathcal{C}_{G_s}$$

$$T_i \longmapsto x_i$$

est surjectif. C'est donc un iso. puisque les deux \mathcal{O}_S -modules ont \hat{m} rang. \square

* Soit \mathcal{D} la catégorie des $G \in \mathcal{C}$ tel que $V_G = 0$. (classifier les $G \in \mathcal{C}$ annulés par V)
 \uparrow dualité Cartier
 " " " F

Soit \mathcal{E} la catégorie formée des couples (\mathcal{R}, ψ) où :

* \mathcal{R} est un \mathbb{C}_S -module localement libre de $rg.$ fini

* $\psi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^{(F)}$ est un morphisme de \mathbb{C}_S -modules
 \uparrow
 $\text{Forb}_S^* \mathcal{R}$
 " morphisme G^{-1} -linéaire de \mathcal{R} dans lui-même "

* Si $G \in \mathcal{D}$ le morphisme $F: G \rightarrow G^{(F)}$ induit $F_*: \omega_G \rightarrow \omega_{G^{(F)}} = \omega_G^{(F)}$

($G \mapsto \omega_G$ est covariant, $V_G = 0$ car F_G induit 0 sur ω_G). Notons $\psi_G = F_*$.

Cela induit un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ G & \longmapsto & (\omega_G, \psi_G) \end{array}$$

* Soit $(\mathcal{R}, \psi) \in \mathcal{E}$. Notons $G(\mathcal{R}, \psi) = \ker \left(\omega_G \xrightarrow{F-\psi} \omega_G^{(F)} \right)$

$$0 \rightarrow G(\mathcal{R}, \psi) \rightarrow \omega_G \xrightarrow{F-\psi} \omega_G^{(F)} \rightarrow 0$$

\uparrow (sur ω_G)
 \uparrow (sur $\omega_G^{(F)}$)
 loc. isomorphisme $G \oplus^{finie} G_a$

$G(\mathcal{R}, \Psi)$ est un S -schéma en groupes fini localement libre.

En effet, localement sur S' , après choix d'une base de \mathcal{R} si $A = (a_{ij})_{ij}$ est la matrice de Ψ

$$G(\mathcal{R}, \Psi) \subset \mathbb{A}^m \text{ est les solutions de } \begin{cases} x_1^{\uparrow} = \sum_j a_{1j} x_j \\ \vdots \\ x_m^{\uparrow} = \sum_j a_{mj} x_j \end{cases} \quad \text{i.e. } X^{\uparrow} = AX \quad \text{ou } X \in \mathbb{A}^m$$

De plus $G(\mathcal{R}, \Psi)$ est annihilé par V car loc./ S' , $G(\mathcal{R}, \Psi) \hookrightarrow \mathbb{G}_a^{\oplus m}$, or $V_{\mathbb{G}_a} = 0$.

Donc $G(\mathcal{R}, \Psi) \in \mathcal{D}$. Cela définit un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ (\mathcal{R}, \Psi) &\longmapsto G(\mathcal{R}, \Psi). \end{aligned}$$

* Pour $G \in \mathcal{D}$, la composée $G \xrightarrow{\alpha_G} \underline{C}_{G^0} \xrightarrow{F = \Psi_G} \underline{C}_{G^0}$ est nulle (i.e.

$$F \circ \alpha_G = \Psi_G \circ \alpha_G. \quad (\text{Cela résulte de ce que si } \frac{dT}{T} \in \underline{C}_{G_m} \text{ alors } V^* \frac{dT}{T} = \frac{dT}{T})$$

d'où un morphisme $G \rightarrow G(\underline{C}_{G^0}, \Psi_G)$.

Th. Les deux foncteurs précédents induisent des équivalences inverses de catégories et $\alpha_G: G \xrightarrow{\sim} G(\underline{C}_{G^0}, \Psi_G)$.

dem.

* On vérifie par un calcul explicite que $(\omega_{G(x,\psi)}, \psi_{G(x,\psi)}) = (x, \psi)$

Canoniquement.

Il suffit donc de voir que ~~$\alpha_G: G \rightarrow G$~~ $\alpha_G: G \rightarrow G(\omega_G, \psi_G)$ est un iso.

Puisque $|G| = |G(\omega_G, \psi_G)|$ il suffit de montrer que $\alpha_G: G \rightarrow G(\omega_G, \psi_G)$ est une immersion fermée. ou encore que $\alpha_G: G \hookrightarrow \omega_G$ est un monomorphisme.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha_G} & \omega_G \\ \text{"} & & \text{"} \\ \text{Hom}(G, \mathbb{R}^d) & \rightarrow & \text{Hom}(\omega_G, \omega_G) \\ f \mapsto f^* & & \end{array}$$

Il suffit donc de voir que si G_1 et G_2 sont dans \mathcal{C} annelés par F alors

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(G_1, G_2) & \hookrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}_3}(\omega_{G_1}, \omega_{G_2}) \\ f \mapsto f^* & & \end{array}$$

Mais si $f \in \text{Hom}(G_1, G_2)$, $f^*: \omega_{G_1} \rightarrow \omega_{G_2}$ est nul alors $f^*: \omega_{G_1}^V \rightarrow \omega_{G_2}^V$ est nul

$\Rightarrow \forall D$ opérateur diff. invariant sur G_1 d'ordre 1, $D \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_3}(\mathcal{S}_{G_1} / \mathcal{S}_{G_1}^2, \mathcal{C}_3)$ $f^* D = 0$

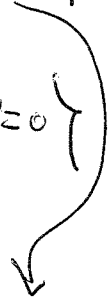
~~$\Rightarrow \forall D$~~ $\Rightarrow \forall D$ op. diff. d'ordre quelconque $f^* D = 0$
 \uparrow Composition des op. diff. invariants

$\Rightarrow f = 0$ car si loc. $\mathcal{S}_1, D_1, \dots, D_n =$ base de ω_G^V $(D_1 \dots D_n)_{\forall i, \alpha_i \in \mathbb{R}}$
 est une base duale de \mathcal{S}_G . \square

Ex. * Schémas en groupes étalés finis $\simeq \{(\mathcal{G}, \psi) \mid \psi \text{ est un iso.}\}$

* "

"loc.-isomorphes à $\bigoplus_{\text{finie}} \mathcal{O}_F \simeq \{(\mathcal{G}, \psi) \mid \psi = 0\}$



Si $A =$ matrice d'coeff. dans \mathcal{O}_S le système d'équations $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ est étalé si et seulement si A inversible.

Classification de Dieudonné des schémas en groupes finis / Corps parfait

$k =$ Corps de caractéristique $p > 0$.

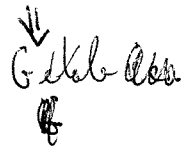
$\mathcal{C} =$ catégorie abélienne des k -schémas en groupes commutatifs finis ~~de~~ d'ordre

une puissance de p

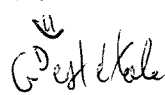
\mathcal{C} est artiniennne i.e. dans \mathcal{C} tout objet est de longueur finie.

et noethérienne

Objets simples : Soit $G \in \mathcal{C}$ un objet simple. $F_G = 0$ ou bien F_G est un iso.



$V_G = 0$ ou bien V_G iso.



De plus, d'après le théo. de classification, précédent $F_G = V_G = 0 \iff G \simeq \mathcal{O}_G^{\oplus \text{finie}}$

Def. Schémas en groupes de type multiplicatif = loc. iso. pour la top étale à

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{A}^1$$

$$\updownarrow$$

G^D est étale

Donc, objets simples = { groupes étales simples, groupes de type mult. simples, \mathcal{O}_F }

↓ ↓
 en bijection avec les classes
 d'éq. de rep. irréductibles $\text{Gal}(k^s/k) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$
 pour $n \in \mathbb{N}$.

Lorsque k est alg. clos = { $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, \mathbb{A}^1 , \mathcal{O}_F }
 Cartan dual
 Cartan autodual.

* Si $G \in \mathcal{C}$, G étale $\Leftrightarrow \text{JH}(G_{\bar{k}}) = \{ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \}$
 G de type mult. $\Leftrightarrow \text{JH}(G_{\bar{k}}) = \{ \mathbb{A}^1 \}$
 G biennere $\Leftrightarrow \text{JH}(G_{\bar{k}}) = \{ \mathcal{O}_F \}$
 ↓
 G et G^D connexes

* Lorsque k est parfait tout $G \in \mathcal{C}$ s'écrit canoniquement sous la forme

$$G = G^{\text{ét}} \oplus G^{\text{mult}} \oplus G^{\text{bi}}$$

Def. G est unipotent si V_G est nilpotent sur G

D'après le th. de classification des $G \in \text{Lannuels par } V$ ceux-ci se plongent dans $\bigoplus_{\text{finie}} \mathbb{G}_a$. De plus $V_{\mathbb{G}_a} = 0$. On en déduit que :

$$G \text{ unipotent} \iff \text{possède une filtration } 0 = G_0 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$$
$$k \cdot \forall i, G_i/G_{i-1} \hookrightarrow \mathbb{G}_a^{\oplus \text{finie}}$$

