Rappels de la dernière fois.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \\ S \arrow[u, bend right, "e"'] \end{tikzcd}$$ un schéma en groupes

$\begin{matrix} \mathcal{I} \\ \cap \\ \mathcal{O}_G \end{matrix}$ = idéal d'augmentation de G. $\omega_{G/S} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = e^* \Omega^1_{G/S}$

$$\Omega^1_{G/S} = \pi^* \omega_{G/S}$$
$$\omega_{G/S} = \left(\pi_* \Omega^1_{G/S}\right)^G = \text{formes diff. invariantes}$$

Si $\mathcal{D}iff^{\leq n}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G)$ = op. diff. d'ordre $\leq n$ sur G.

$$e^* \mathcal{D}iff^{\leq n}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_G/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{O}_S) = \text{distributions sur } G \text{ à support dans } V(\mathcal{I}^{n+1})$$
$$= \left(\pi_* \mathcal{D}iff^{\leq n}\right)^G = \text{op. diff. invariants}$$
$$\mathcal{D}iff^{\leq n}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G) = \pi^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_G/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{O}_S).$$

Composition des op. diff., $\mathcal{D}iff^{\leq n} \times \mathcal{D}iff^{\leq m} \longrightarrow \mathcal{D}iff^{\leq n+m}$ induit sur les op. diff. invariants.

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_G/\mathcal{I}^{n+1}, \mathcal{O}_S) \times \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_G/\mathcal{I}^{m+1}, \mathcal{O}_S) \xrightarrow[\text{Convolution}]{*} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_G/\mathcal{I}^{n+m+1}, \mathcal{O}_S)$$

Critère de lissité d'un schéma en groupes

Prop: k corps. G un k-schéma en groupes de type fini. Sont équivalents:

* G est lisse
* G est géo. réduit
* $\mathcal{O}_{G,e} \otimes_k \bar{k}$ est réduit

$\rightarrow$ Se déduit du fait que si k alg. clos, X = k-schéma réduit de type fini alors X^{lisse} = ouvert Zariski dense

+ translations par un élément de $G(\bar{k})$ $\square$

$\Rightarrow$ S-schémas en groupes lisses = S-schémas en groupes plats de présentation finie à fibres géo. réduites.

Lissité des schémas en groupes sur des bases de car. 0

Th (Cartier) Soit S un $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q})$-schéma et G un S-schéma en groupes plat de présentation finie. Alors, G/S est lisse.

dem: On peut supposer que $S = \operatorname{Spec}(k)$ avec $\operatorname{car}(k) = 0$.

Soit $n \geq 1$. Soient $x_1, \dots, x_d \in \underbrace{J_G}_{\text{idéal d'aug. de } G}/J_G^{n+1}$ tels que $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \in J_G/J_G^2 = \omega_{G/S}$

soit une base de $\omega_{G/S}$.

Soit $(\delta_1, \dots, \delta_d) \in \omega_{G/S}^*$ la base duale : $\langle \delta_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

$$(\delta_1, \dots, \delta_d) \longleftrightarrow (D_1, \dots, D_d) \in \left(\operatorname{Diff}^{\leq 1}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G)^{\text{invariants à gauche}}\right)^d$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ notons $D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d} \in \operatorname{Diff}^{\leq |\alpha|}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_G)^{\text{invariant}}$

$$D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d} : \mathcal{O}_G/J_G^{|\alpha|+1} \longrightarrow \mathcal{O}_S = k$$

On vérifie alors que si $|\alpha| \leq n$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$

$$\langle D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}, x_1^{\beta_1} \cdots x_d^{\beta_d} \rangle = \underbrace{\alpha_1! \cdots \alpha_d!}_{\neq 0 \text{ car } \mathrm{car}(k)=0} \delta_{\alpha,\beta}$$

Donc, $\mathrm{car}(k)=0 \Rightarrow \left(x_1^{\beta_1}, \dots, x_d^{\beta_d}\right)_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta| \leq n}} =$ base de I_G / I_G^{n+1}

Cela étant vrai pour tout n on en déduit que $\widehat{\mathcal{O}_{G,e}} = \varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{O}_G / I_G^{n+1}$ est régulier

$\Rightarrow \mathcal{O}_{G,e}$ régulier $\Rightarrow \square$

<u>Rappel</u>: Morphisme de Frobenius.

* $\begin{array}{c} S \\ \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \end{array}$ schéma. $\mathcal{F}$ = faisceau qcoh sur S.

$S \xrightarrow{\mathrm{Frob}_S} S$ Frobenius absolu

$\boxed{\mathcal{F}^{(p)} = \mathrm{Frob}_S^* \mathcal{F}}$. Si $\begin{array}{c} U \\ \downarrow \alpha \\ S \end{array}$ est un S-schéma notons $U^{[p]} = U$ vu comme S-schéma via $\alpha \circ \mathrm{Frob}_U$.

```tikzcd
U^{[p]} = U \arrow[r, "\mathrm{Frob}_U"] \arrow[dr] & U \arrow[d, "\alpha"] \\
& S
```

Frob_U : morphisme de S-schémas entre $U^{[p]}$ et U.

$$\mathcal{F}^{(p)}(T) = \mathcal{F}(T^{[p]})$$

$$F_{\mathcal{F}/S} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{(p)}$$ morphisme de faisceaux fppf

tel que
$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{F}(T) \longrightarrow \mathcal{F}^{(p)}(T) = \mathcal{F}(T^{[p]}) \\ \quad s \longmapsto \mathrm{Frob}_T^* s \end{array}\right.$$

* Lorsque $\mathcal{F} = X$ est représentable, $F_{X/S}$ est donné par le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "F_{X/S}"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{Frob}_X"] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & X^{(p)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ & S \arrow[r, "\mathrm{Frob}_S"] & S \end{tikzcd}$$

* Si $G = S$-schéma en groupes $F_{G/S} : G \to G^{(p)}$ est un morphisme de schémas en groupes.

– Fin du rappel –

Th : k corps de caractéristique p. $G = k$-schéma en groupes annulé par Frobenius
($i.e.$ $F_G = 0 \Leftrightarrow$ si $G = \mathrm{Spec}(k \oplus \underset{\sim}{I})$ alors $\forall x \in I$, $x^p = 0$). Alors, comme k-schéma
idéal d'augmentation

$$G \simeq \mathrm{Spec}\left(k[T_1, \dots, T_d]/(T_1^p, \dots, T_d^p)\right)$$

<u>dem</u>: Même démo. que pour montrer que $car(k)=0 \Rightarrow G$ lisse.

Utilise le fait que si $(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$ et $\forall i,\ \alpha_i<p$ alors $\alpha_1!\cdots\alpha_d!\neq 0\in k$. □

<u>Rem</u>. Pour étudier les schémas en gp. non annulés par F on aura besoin des puissances divisées...

~~Th (Raynaud)~~

* <u>Rappel</u>: Schémas en groupes radiciels. G/S schéma en groupes tel que $|G|\xrightarrow{\sim}|S| \Leftrightarrow$ si $J\subset\mathcal{O}_G$ est l'idéal définissant la section unité, alors J est un nil-idéal.

* <u>Th (Raynaud)</u>: k = corps de caractéristique p, parfait. G = k-schéma en groupes radiciel $\boxed{\text{fini}}$. Alors, comme k-schéma,

$$G\simeq \mathrm{Spec}\left(k[T_1,\dots,T_d]/\left(T_1^{p^{a_1}},\dots,T_d^{p^{a_d}}\right)\right)$$

pour $d=\dim_k\omega_G$ et des entiers $a_1,\dots,a_d\geq 1$.

<u>Principe de la démo.</u>: G = k-schéma en groupes fini.

G radiciel $\Leftrightarrow$ annulé par une puissance de F.

On connaît déjà le résultat si $F_G=0$. Récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ tel que $F_G^n=0$.

$$0\to \underbrace{\ker F}_{\substack{\text{résultat}\\ \text{connu par}\\ \text{le th. précédent}}}\to G\to \underbrace{\mathrm{Im}\,F}_{\substack{\text{résultat}\\ \text{connu par}\\ \text{hyp. de récurrence}}}\to 0 \qquad \to \text{Cf. Demazure Gabriel.}$$

plat de présentation finie, localement intersection complète

S-schémas syntomiques

cf. EGA IV chap. 19.

<u>Déf.</u> $X \xrightarrow{f} S$ est syntomique s'il est plat de présentation finie et <u>localement sur X</u> il existe un plongement

immersion fermée régulière

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[dl, "\text{lisse}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

où immersion fermée régulière = immersion fermée localement définie par une suite régulière.

Th: Soit $f : X \to S$ plat de présentation finie. Sont équivalents :

* f est syntomique
* $\forall U$ ouvert de X, $\forall$

immersion fermée

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & Y \arrow[dl, "\text{lisse}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

, i est une immersion régulière

* $\forall s \in S$, $f_s : X_s \to \mathrm{Spec}(k(s))$ est syntomique
* $\forall s \in S$, $\forall x \in X_s$, $\widehat{\mathcal{O}_{X_s,x}}$ = quotient d'un anneau local régulier par une suite régulière.

Syntomicité des schémas en groupes

Th: Tout S-schéma en groupes plat de présentation finie est syntomique.

dém: D'après le critère fibre à fibre ~~a~~ précédent on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(k)$, k corps.
La propriété d'être syntomique est locale pour la topologie plate$/S$.
$\Rightarrow$ on peut supposer k algébriquement clos.
G k-schéma en groupes $+$ k parfait $\Rightarrow$ $G_{red} \subset G$ est un sous-k-schéma en groupes lisse$/k$ (car G_{red} réduit $+$ k parfait $\Rightarrow$ $G_{red} \times G_{red} = (G \times G)_{red}$)

$$1 \to \underbrace{G_{red}}_{\text{lisse}} \to G \to \underbrace{G/G_{red}}_{\substack{k\text{-schéma en groupes} \\ \text{fini radiciel}}} \to 1$$

fini radiciel $\Rightarrow$ syntomique$/k$
$\uparrow$ théorème de Raynaud précédent

G_{red} lisse $\Rightarrow$ $G \xrightarrow{\text{lisse}} G/G_{red}$ car $G = G_{red}$-torseur au dessus de G/G_{red}.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\text{lisse}"] \arrow[rr, bend right] & G/G_{red} \arrow[r, "\text{syntomique}"] & \mathrm{Spec}(k) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ syntomique

(le composé de 2 morphismes syntomiques est syntomique) $\square$

Corollaire: $f: G_1 \to G_2$ épi. $\Leftrightarrow$ fidèlement plat $\Leftrightarrow$ recouvrement syntomique.

Dualité de Cartier

* $\mathcal{C}$ = cat. des S-schémas en groupes finis loc. libres commutatifs

cat. exacte

* $\mathcal{C}$ est munie d'une involution exacte.

Ψ

G $\quad \boxed{G^D := \underline{\mathrm{Hom}}(G, \mathbb{G}_m)}$ comme faisceau fppf

G^D est représentable. Si $G = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ = $\mathcal{O}_S$-algèbre de Hopf cocommutative

alors $\boxed{G^D = \mathrm{Spec}(\mathcal{A}^\vee)}$ $\quad \Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}$ la comultiplication

induit $\mathcal{A}^\vee \otimes \mathcal{A}^\vee = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^\vee \longrightarrow \mathcal{A}^\vee$

qui définit la structure d'algèbre sur $\mathcal{A}^\vee$

la loi de mult. de l'alg. $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

induit $\mathcal{A}^\vee \to (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^\vee = \mathcal{A}^\vee \otimes \mathcal{A}^\vee$ qui est la comultiplication de $\mathcal{A}^\vee$

* Cette description de G^D montre que le morphisme de bidualité $G \to (G^D)^D$ est un isomorphisme.

* Si $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ est exacte alors $0 \to G_3^D \to G_2^D \to G_1^D \to 0$ l'est également.

En effet, $0 \to G_3^D \to G_2^D \to G_1^D$ est clairement une suite exacte de faisceaux fppf par application de $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{G}_m)$. De plus $|G_2| = |G_1|\,|G_3| \Rightarrow |G_2^D| = |G_1^D| \cdot |G_3^D|$

$G_2^D / G_3^D \hookrightarrow G_1^D$ immersion fermée de S-schémas

finis loc. libres de même rang $\Rightarrow$ iso. $\square$

Exo : Montrer qu'en fait $\forall G \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbb{G}_m) = 0$.

Ordre d'un schéma en groupes finis loc. libre

$$G \in \mathcal{C}, \quad G \xrightarrow{\pi} S, \quad \boxed{|G| = rg_{\mathcal{O}_S}(\pi_* \mathcal{O}_G)} \in \{\text{fonctions loc. constantes } |S| \to \mathbb{N}\}$$

* $\mathcal{C} \to \{ - \}$ est une fonction multiplicative.

$G \mapsto |G|$

i.e. si $0 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{f} G_3 \to 0$ est exacte alors $\boxed{|G_2| = |G_1| \cdot |G_3|}$

f = finie loc. libre

En effet, la suite est scindée au dessus du recouvrement $G_2 \to G_3$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & G_1 & \to & G_2 \times_{G_3} G_2 & \to & G_2 & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & \square & \downarrow f & & \\
0 & \to & G_1 & \to & G_2 & \xrightarrow{f} & G_3 & \to & 0
\end{array}$$

$$G_2 \times_{G_3} G_2 \simeq G_1 \times_S G_2$$

$$\Downarrow$$

$$(1) \quad \underbrace{rg(f)^2 \cdot |G_3|}_{rg(G_2 \times_{G_3} G_2 / S) = rg(G_2 \times_{G_3} G_2 / G_3) \cdot |G_3|} = |G_1| \cdot |G_2|$$

Mais
$$\begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{f} & G_3 \\ & \searrow \swarrow & \\ & S & \end{array} \Rightarrow rg(f) \cdot |G_3| = |G_2| \quad (2)$$

$(1) + (2) \Rightarrow$ résultat. $\square$

* $\boxed{\text{Th (Deligne). Si } G \in \mathcal{C} \text{ alors } G \text{ est annulé par } |G|.}$ $\to$ cf. Oort-Tate (utilise le morphisme trace en coho. plate)

$\Rightarrow$ si $|G| = \prod_{p \text{ premier}} p^{v_p(|G|)}$

$$G = \bigoplus_p \underbrace{G[p^{v_p(|G|)}]}_{\text{finis loc. libre d'ordre } p^{v_p(|G|)}}$$

Verschiebung :

A = anneau tel que $pA = 0$.

* M = A-module

$$s : M^{\otimes p} \longrightarrow \left(M^{\otimes p}\right)^{\mathfrak{S}_p}$$ opérateur de symmétrisation

$$m_1 \otimes \dots \otimes m_p \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} m_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes m_{\sigma(p)}$$

Il y a un morphisme de ~~A-modules~~ groupes $f : M \longrightarrow \left(M^{\otimes p}\right)^{\mathfrak{S}_p} / s\left(M^{\otimes p}\right)$ (Exo.)

$$m \longmapsto m \otimes \dots \otimes m$$

De plus, $f(am) = a^p f(m) \Rightarrow$ si $M^{(p)} = M \otimes_{A, \mathrm{Frob}} A$ il induit un morphisme de A-modules

$$M^{(p)} \longrightarrow \left(M^{\otimes p}\right)^{\mathfrak{S}_p} / s\left(M^{\otimes p}\right)$$

Prop : Si M est plat sur A alors le morphisme précédent est un isomorphisme

$\rightarrow$ facile si M est libre de rang fini (calcul explicite sur des bases)
+ tout module plat est $\varinjlim$ filtrante de modules libres de rang fini.

* Si B = A-algèbre $B^{(p)} \longrightarrow \left(B^{\otimes p}\right)^{\mathfrak{S}_p} / s\left(B^{\otimes p}\right)$ est un morphisme d'algèbres

qui est donc un iso. d'algèbres si $A \to B$ est plat.

* Si $X \xrightarrow{f} \underset{\text{Spec}(\mathbb{F}_p)\text{-schéma}}{\underbrace{S}}$ est affine et plat considérons $X^{[p]} = X^p / \mathfrak{S}_p$

$$:= \operatorname{Spec}\left(\left(f_*\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \cdots \otimes_{\mathcal{O}_S} f_*\mathcal{O}_X \right)^{\mathfrak{S}_p} \right)$$

D'après les considérations précédentes, il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\Delta = \text{diagonale}"] \arrow[d, "F_{X/S'}"'] & X^p \arrow[d, "\text{proj}"] \\ X^{(p)} \arrow[r, hook] & X^{[p]} \end{tikzcd}$$

* Soit maintenant G un S-schéma en groupes plat affine commutatif.

G commutatif $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} & G^p \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d] & G \\ G^{(p)} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\boxed{V_{G/S'}}"'] & G^p/\mathfrak{S}_p \arrow[ur, "\exists!\ \text{factorisation}"'] & \end{tikzcd}$$

$\parallel$ morphisme de S-schémas en groupes = Verschiebung.

Diagramme précédent $\Longrightarrow$ $\boxed{V \circ F = p}$ car $p = \Sigma \circ \Delta$

* Si G/S est fini localement libre alors V = Cartier dual de F.

Plus précisément, $F_{G^D} : G^D \to (G^D)^{(p)} = (G^{(p)})^D$

induit $V_G = (F_{G^D})^D : G^{(p)} = ((G^{(p)})^D)^D \to (G^D)^D = G$.

Donc, dans ce cas là $\begin{cases} FV = p \\ VF = p. \end{cases}$

Ex: * $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ~~$F_G$ isomorphisme, $V_G \neq 0$~~ $F_G = \mathrm{Id}$, $V_G = 0$

$G^D = \mu_p$, $F_{\mu_p} = 0$, $V_{\mu_p} = \mathrm{Id}$

* $G = \alpha_p$, $G^D = G$, $F_G = V_G = 0$.

Schémas en groupes étales

Lemme: G/S plat de type fini est étale $\iff \omega_{G/S} = 0$

dém: $\Omega^1_{G/S} = \pi^* \omega_{G/S}$ si $\pi : G \to S$

$\Omega^1_{G/S} = 0 \iff G/S$ non ramifié □

* S = schéma $\underbrace{\text{annulé par une puissance de } p}_{p^N \mathcal{O}_S = 0 \text{ pour } N \gg 0}$. G/S = schéma en groupes fini localement libre commutatif.

Lemme: $(|G|, p) = 1 \Rightarrow G$ étale.

dém: $G \xrightarrow{\times |G|} G$ est le morphisme nul $\Rightarrow \omega_G \xrightarrow{\times |G|} \omega_G$ est le morphisme nul

$\Rightarrow \omega_G = 0$. □

$|G| \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$

Corollaire. $G \simeq \underbrace{G_1}_{\text{d'ordre une puissance de } p} \oplus \underbrace{G_2}_{\text{étale}}$

$\Rightarrow$ Les seuls schémas en groupes commutatifs finis loc. libres / bases annulées par des puissances de p qui sont "intéressants" sont ceux d'ordre une puissance de p.

~~Si S schéma connexe, s point géométrique de S~~

* S schéma -

$$\text{S-schémas en groupes étales finis} \simeq \text{Faisceaux en groupes étales localement constants de fibres des groupes finis.}$$

Si S connexe, s = point géométrique de S,

$$\text{S-schémas en groupes étales finis} \simeq (\Gamma, \rho) \quad \text{gp. finis + action discrète du } \pi_1.$$

où Γ = groupe fini et $\rho : \pi_1(S, s) \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Ex: k corps de clôture séparable k^s.

$$\begin{array}{ccc} k\text{-schémas en groupes étales} & & G \\ \wr & & \downarrow \\ (\Gamma, \rho),\ \Gamma \text{ groupe fini et } \rho : \mathrm{Gal}(k^s|k) \to \mathrm{Aut}(\Gamma) & & G(k^s) \circlearrowleft \mathrm{Gal}(k^s|k). \end{array}$$

Composantes connexes

k corps. $G = k$-schéma en groupes de type fini.

$$G \text{ connexe} \underset{\underset{G(k)\neq\emptyset}{\uparrow}}{\Longleftrightarrow} G \text{ géo. connexe} \Longleftrightarrow G \text{ irréductible}$$

G^0 = composante connexe de $e \in G(k)$
= sous-schéma en groupes ouvert fermé de G, $G^0 \triangleleft G$.

Déf. $\underline{\pi_0}(G) = G/G^0 = k$-schéma en groupes étales.

Si k^s est une clôture séparable de k, $\underline{\pi_0}(G)(k^s) = \underbrace{\pi_0(G \otimes_k k^s) \circlearrowleft \mathrm{Gal}(k^s/k)}_{\text{Caractérise complètement } \underline{\pi_0}(G)}$

* Si G est affine, $\underline{\pi_0}(G) = \mathrm{Spec}(\text{plus grande sous-algèbre étale de } \Gamma(G, \mathcal{O}_G))$.
* Si $G = k$-schéma en groupes fini, $\boxed{G \text{ connexe} \Leftrightarrow G \text{ radiciel}}$

Dévissage $1 \to \underbrace{G^0}_{\text{radiciel}} \to G \to \underbrace{\underline{\pi_0}(G)}_{\text{étale}} \to 1$

Si de plus k est parfait, $G_{red} \subset G$ est un sous-schéma en gp. étale

et $G_{red} \hookrightarrow G \twoheadrightarrow \underline{\pi_0}(G)$ —
$$G_{red} \xrightarrow[\text{iso.}]{\simeq} \underline{\pi_0}(G)$$

$\Longrightarrow$ la suite exacte précédente est canoniquement scindée.

$$G \simeq G^0 \times \pi_0(G).$$

Le morphisme α_G

S schéma. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_S$-module quasicohérent il définit un faisceau fppf $\underline{\mathcal{F}}$ tel que si $U \xrightarrow{f} S$, $\Gamma(U, \underline{\mathcal{F}}) = \Gamma(U, f^*\mathcal{F})$.

* En général, $\underline{\mathcal{F}}$ n'est pas représentable. Cependant, si $\mathcal{F}$ est localement libre de rang fini alors $\underline{\mathcal{F}}$ est représentable par la réalisation géométrique du fibré associé, $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}^\vee)$. Donc, dans ce cas là, $\underline{\mathcal{F}}$ est loc. isomorphe à $\mathbb{G}_a^{\oplus \text{finie}}$

Def : G fini loc. libre commutatif $/S$

$$\begin{array}{cccc} \alpha_G : & G & \longrightarrow & \underline{\omega}_{G^D} \\ & \| & & \cup \\ & \mathcal{H}om(G^D, \mathbb{G}_m) & & \\ & \cup & & \\ & x & \longmapsto & x^* \frac{dT}{T} \\ & & & \in \omega_{\mathbb{G}_m} \end{array}$$

Prop: α_G est universel pour les morphismes vers les faisceaux de la forme $\underline{\mathcal{M}}$.

$\forall \mathcal{M} = \mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent, α_G induit

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\omega_{G^D}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G, \underline{\mathcal{M}})$$

dem: ~~Soit ...~~

~~Soit $\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{M}$ l'algèbre des ...~~

Soit $\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{M}$ l'algèbre augmentée obtenue en posant $\forall x \in \mathcal{M}, x^2 = 0$.

$$\begin{array}{c} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{M}) \\ \downarrow \pi \\ S \end{array}$$

$\pi_* \mathbb{G}_m$ = restriction des scalaires à la Weil de $\mathbb{G}_m$ (pas nécessairement représentable ici car $\mathcal{M}$ pas forcément loc. libre)

Il y a une résolution $0 \to \underline{\mathcal{M}} \to \pi_* \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0$ (scindée)

donnée par si $T \xrightarrow{f} S$, $0 \to \Gamma(T, f^*\mathcal{M}) \to \left(\Gamma(T, \mathcal{O}_T) \oplus \Gamma(T, f^*\mathcal{M})\right)^\times \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^\times \to 0$

$$x \longmapsto (1, x)$$
$$(a, b) \longmapsto a$$

Appliquant $\underline{\mathrm{Hom}}(G, -)$ à cette suite exacte scindée on obtient

$0 \to \mathrm{Hom}(G, \underline{\mathcal{M}}) \to \underbrace{\mathrm{Hom}(G, \pi_* \mathbb{G}_m)}_{\pi_* \mathrm{Hom}(\pi^* G, \mathbb{G}_m) = \pi_* G^D} \to G^D \to 0$. Il suffit de vérifier que

$\ker(\pi_* G^D \to G^D) \simeq \underline{\omega}_{G^D}$.

$\square$

Classification des schémas en groupes annulés par F

S = $\mathbb{F}_p$-schéma.

$\mathcal{C}$ = S-schémas en groupes commutatifs finis localement libres

<u>Prop</u>: Soit $G \in \mathcal{C}$ tel que $F_G = 0$. Alors, ω_G est localement libre de rang fini.

De plus, localement sur S on a $G \simeq \mathrm{Spec}\left(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S}\omega_G / \mathrm{Sym}^{\geq p}_{\mathcal{O}_S}\omega_G\right)$.

<u>dém</u>: Soit $s \in S$. On sait que $G_s \simeq \mathrm{Spec}\left(k(s)[T_1,\dots,T_d]/(T_1^p,\dots,T_d^p)\right)$ où

$d = \dim_{k(s)} \omega_{G_s}$. Donc, $|G| = p^d$.

Soit $G = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{I})$, $\mathcal{I}$ = idéal d'augmentation. Soient $x_1,\dots,x_d \in \mathcal{I}_{G,s}$

tels que leur image dans $\omega_{G_s} = \mathcal{I}_{G,s}/\mathcal{I}^2_{G,s} \underset{\mathcal{O}_{S,s}}{\otimes} k(s)$ forment une base.

$F_G = 0 \Rightarrow \forall i,\ x_i^p = 0$. Alors, d'après le lemme de Nakayama le morphisme

$$\mathcal{O}_{S,s}[T_1,\dots,T_d]/(T_1^p,\dots,T_d^p) \longrightarrow \mathcal{O}_{G,s}$$
$$T_i \longmapsto x_i$$

est surjectif. C'est donc un iso. puisque les deux $\mathcal{O}_S$-modules ont même rang. $\square$

* Soit $\mathcal{D}$ la catégorie des $G \in \mathcal{C}$ tels que $V_G = 0$ (classifier les $G \in \mathcal{C}$ annulés par V
$\Updownarrow$ dualité Cartier
" " " F)

Soit $\mathcal{E}$ la catégorie formée des couples $(\mathcal{M}, \psi)$ où :

* $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rg. fini
* $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{(p)}$ est un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules

$\mathcal{M}^{(p)} = \mathrm{Frob}_S^* \mathcal{M}$

ψ : "morphisme σ^{-1}-linéaire de $\mathcal{M}$ dans lui même"

* Si $G \in \mathcal{D}$ le morphisme $F : G \to G^{(p)}$ induit $F_* : \omega_{G^D} \to \omega_{(G^{(p)})^D} = \omega_{G^D}^{(p)}$

($G \mapsto \omega_{G^D}$ est covariant, $V_* = 0$ car F_{G^D} induit 0 sur ω_{G^D}). Notons $\psi_G = F_*$.

Cela induit un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ G &\longmapsto (\omega_{G^D}, \psi_G) \end{aligned}$$

* Soit $(\mathcal{M}, \psi) \in \mathcal{E}$. Notons $G(\mathcal{M}, \psi) = \ker\left(\underline{\omega}_{G^D} \xrightarrow{F - \psi} \underline{\omega}_{G^D}^{(p)} \right)$

$\underline{\omega}_{G^D}$: faisceau fppf

$$0 \to G(\mathcal{M}, \psi) \to \underline{\omega}_{G^D} \xrightarrow{F - \psi_G} \underline{\omega}_{G^D}^{(p)} \to 0$$

$\underline{\omega}_{G^D}$, $\underline{\omega}_{G^D}^{(p)}$: loc. fppf isomorphe à $\mathbb{G}_a^{\oplus \text{finie}}$

$G(\mathcal{M},\psi)$ est un S-schéma en groupes fini localement libre.

En effet, localement sur S, après choix d'une base de $\mathcal{M}$ si $A=(a_{ij})_{i,j}$ est la matrice de ψ

$G(\mathcal{M},\psi) \subset \mathbb{A}^n$ est les solutions de
$$\begin{cases} x_1^p = \sum_j a_{1j} x_j \\ \vdots \\ x_n^p = \sum_j a_{nj} x_j \end{cases} \quad \text{i.e. } X^{(p)} = AX \quad \text{où } X \in \mathbb{A}^n$$

De plus $G(\mathcal{M},\psi)$ est annulé par V car loc. $/S$, $G(\mathcal{M},\psi) \hookrightarrow \mathbb{G}_a^{\oplus n}$, or $V_{\mathbb{G}_a}=0$.

Donc $G(\mathcal{M},\psi) \in \mathcal{D}$. Cela définit un foncteur
$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ (\mathcal{M},\psi) &\longmapsto G(\mathcal{M},\psi). \end{aligned}$$

* Pour $G \in \mathcal{D}$, la composée $G \xrightarrow{\alpha_G} \underline{\omega}_{G^D} \xrightarrow{F-\psi_G} \underline{\omega}_{G^D}^{(p)}$ est nulle i.e.

$F\alpha_G = \psi_G \alpha_G$. (Cela résulte de ce que si $\frac{dT}{T} \in \omega_{\mathbb{G}_m}$ alors $V^* \frac{dT}{T} = \frac{dT}{T}$)

d'où un morphisme $G \xrightarrow{\alpha_G} G(\omega_{G^D},\psi_G)$.

$\underline{\text{Th}}$: Les deux foncteurs précédents induisent des équivalences inverses de catégories et $\alpha_G : G \xrightarrow{\sim} G(\omega_{G^D},\psi_G)$.

$\underline{\text{dem}}$:

* On vérifie par un calcul explicite que $(\omega_{G(\mathcal{L},\psi)}, \psi_{G(\mathcal{L},\psi)}) = (\mathcal{L},\psi)$

Canoniquement.

Il suffit donc de voir que ~~α_G~~ $\alpha_G : G \to G(\omega_{G^D}, \psi_G)$ est un iso.

Puisque $|G| = |G(\omega_{G^D}, \psi_G)|$ il suffit de montrer que $\alpha_G : G \to G(\omega_{G^D}, \psi_G)$ est une immersion fermée ou encore que $\alpha_G : G \hookrightarrow \omega_{G^D}$ est un monomorphisme.

Or
$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha_G} & \omega_{G^D} \\ \| & & \| \\ \mathrm{Hom}(G^D, \mu_p) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\omega_{\mu_p}, \omega_{G^D}) \\ & f \longmapsto f^* & \end{array}$$

Il suffit donc de voir que si G_1 et G_2 sont dans $\mathcal{C}$ annulés par F alors
$$\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\omega_{G_2}, \omega_{G_1})$$
$$f \longmapsto f^*$$

Mais si $f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, $f^* : \omega_{G_2} \to \omega_{G_1}$ est nul alors $f_* : \omega_{G_1}^\vee \to \omega_{G_2}^\vee$ est nul

$\Rightarrow \forall D$ opérateur diff. invariant sur G_1 d'ordre 1, $D \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{G_1}/\mathcal{I}_{G_1}^2, \mathcal{O}_S)$ $f_* D = 0$

$\Rightarrow$ $\forall D$ op. diff. d'ordre quelconque $f_* D = 0$
↑ Composition des op. diff. invariants

$\Rightarrow f = 0$ car si loc./S, $D_1, \dots, D_d$ = base de $\omega_G^\vee$ $(D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d})_{\forall i, \alpha_i < p}$ est une base duale de $\mathcal{I}_G$. $\square$

__Ex.__ : * Schémas en groupes étales finis $\simeq \{(\mathcal{V}, \psi) \mid \psi$ est un iso.$\}$

* " " loc./s isomorphes à $\bigoplus_{\text{finie}} \alpha_p \simeq \{(\mathcal{V}, \psi) \mid \psi = 0\}$

Si A = matrice à coeff. dans $\mathcal{O}_S$ le système d'équations $\begin{pmatrix} x_1^p \\ \vdots \\ x_n^p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est étale si et seulement si A inversible.

Classification de Dieudonné des schémas en groupes finis / Corps parfait

k = Corps de caractéristique $p > 0$.

$\mathcal{C}$ = Catégorie abélienne des k-schémas en groupes commutatifs finis d'ordre une puissance de p

[$\mathcal{C}$ est artinienne et noethérienne i.e. $\boxed{\text{dans } \mathcal{C} \text{ tout objet est de longueur finie.}}$

__Objets simples__ : Soit $G \in \mathcal{C}$ un objet simple. Alors, $F_G = 0$ ou bien $\underbrace{F_G \text{ est un iso.}}_{\Downarrow\ G \text{ étale } \mathcal{C}}$

$V_G = 0$ ou bien $\underbrace{V_G \text{ iso.}}_{\Downarrow\ G^D \text{ est étale}}$

De plus, d'après le théo. de classification précédent $F_G = V_G = 0 \Leftrightarrow G \simeq \alpha_G^{\oplus \text{ finie}}$

Déf. Schémas en groupes de type multiplicatif = loc. iso. pour la top. étale à $\bigoplus_{i \in I} \mu_{p^{n_i}}$

$\Updownarrow$

G^D est étale

Donc, objets simples = { groupes étales simples, groupes de type mult. simples, α_p }

en bijections avec les classes d'éq. de rep. irréductibles $Gal(k^s|k) \to GL_n(\mathbb{F}_p)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Lorsque k est alg. clos = $\{ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mu_p, \alpha_p \}$

Cartier duaux

Cartier autodual.

* Si $G \in \mathcal{C}$, G étale $\iff JH(G_{\bar{k}}) = \{ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \}$

G de type mult. $\iff JH(G_{\bar{k}}) = \{ \mu_p \}$

G biconnexe $\iff JH(G_{\bar{k}}) = \{ \alpha_p \}$

G et G^D connexes

* Lorsque k est parfait tout $G \in \mathcal{C}$ s'écrit canoniquement sous la forme

$$G = G^{ét} \oplus G^{mult} \oplus G^{bi}$$

<u>Def.</u> G est unipotent si V_G est nilpotent sur G

D'après le th. de classification des G - annulés par V ceux-ci se plongent dans $\bigoplus_{\text{finie}}$ de G_a. De plus $V_{G_a} = 0$. On en déduit que :

$$G \text{ unipotent} \iff \text{possède une filtration } 0 = G_0 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$$
$$\text{tq. } \forall i,\ G_i / G_{i-1} \hookrightarrow G_a^{\oplus \text{fini}}$$