Cours n°7

La filtration de H.N. des schémas en groupes finis et plats en famille

Familles : * $F|\mathbb{Q}_p$ valué complet de valuation discrète

$\mathfrak{X}$ = $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F)$-schéma formel localement formellement de type fini

i.e. $\mathfrak{X}$ = schéma formel localement noethérien tel que $\mathfrak{X}_{red}$ soit un k_F-schéma localement de type fini

$$\Updownarrow$$

localement sur $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \simeq \mathrm{Spf}\left(\mathcal{O}_F[[x_1,\dots,x_n]]\langle y_1,\dots,y_m\rangle / I\right)$

↑ idéal de définition $= (\pi, x_1,\dots,x_n)$

* $\mathfrak{X}^{an}$ = fibre générique de $\mathfrak{X}$ comme F-espace analytique de Berkovich

→ si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\left(\mathcal{O}_F[[x_1,\dots,x_n]]\langle y_1,\dots,y_m\rangle / I\right)$ boule ouverte

$$\text{alors } \mathfrak{X}^{an} = \underbrace{V(I)}_{\substack{\text{fermé analytique}\\ \text{défini par } I}} \hookrightarrow \mathring{\mathbb{B}}^n \times \mathbb{B}^m$$

boule fermée

* $|\mathfrak{X}^{an}|$ = espace topologique localement compact localement connexe par arcs

* Si $K|F$ est une extension valuée complète pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\mathfrak{X}(\mathcal{O}_K) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}^{an}(K)$$

De plus $\forall x \in \mathfrak{X}^{an}$, $\mathcal{K}(x)$ = Corps résiduel en x
= Corps valué complet$/F$

et il y a un élément canonique associé dans $\mathfrak{X}^{an}(\mathcal{K}(x))$.

Donc, $\forall x \in \mathfrak{X}^{an}$, morphisme canonique $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathcal{K}(x)}) \longrightarrow \mathfrak{X}$

* $\mathfrak{X}^{rig}$ = fibre générique au sens de Berthelot comme espace rigide classique

$$\begin{array}{c} |\mathfrak{X}^{rig}| \\ \| \\ \{x \in \mathfrak{X}^{an} \mid [\mathcal{K}(x):F] < +\infty\} \end{array} \subset |\mathfrak{X}^{an}|$$

loc. connexe par arcs

totalement discontinu

* Soit G un $\mathfrak{X}$-schéma formel en groupes fini et plat, commutatif d'ordre une puissance de p.

Rem: Si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, A = anneau adique

Schémas en groupes finis loc. libres$/\mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{\sim}$ Sch. formels en gp. finis loc. libres sur $\mathrm{Spf}(A)$

$$G \longmapsto \widehat{G}$$

(Cas particulier très simple du théorème d'algébrisation de Grothendieck)

$\forall x \in \mathfrak{X}^{an}$, tirant en arrière G via le morphisme canonique $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathcal{K}(x)}) \to \mathfrak{X}$ on obtient G_x = schéma en groupes fini et plat$/\mathcal{O}_{\mathcal{K}(x)}$.

$\rightsquigarrow (G_x)_{x\in\mathcal{X}^{an}}$ collection de schémas en gr. finis et plats sur des anneaux de valuation p-adiques

Variation du polygone de H.N. en familles

Th. 1) La fonction

$$\begin{tikzcd} {|\mathcal{X}^{an}|} \arrow[r] & \{\text{polygones } [0, \mathrm{ht}\, G] \to \mathbb{R}_+ \text{ à points de rupture d'abscisse entière}\} \\ x \arrow[r, mapsto] & HN(G_x) \end{tikzcd}$$

est continue

2) $\forall P$ polygone $\{x \in \mathcal{X}^{rig} \mid HN(G_x) \leq P\}$ est un ouvert admissible de $\mathcal{X}^{rig}$ et $\{x \in \mathcal{X}^{an} \mid HN(G_x) \leq P\}$ est un domaine analytique fermé.

1) = Continuité du polygone de H.N. pour la topologie de Berkovich

2) = Semi-continuité pour la topologie de Grothendieck des ouverts admissibles.

Rem: Si $F \subset |\mathcal{X}^{an}|$ est un fermé alors en général F n'a pas de structure analytique, par exemple $\{x\}$ avec $x \in \mathcal{X}^{an}$ et $[K(x) : F] = +\infty$, mais si F provient d'un ouvert admissible de $\mathcal{X}^{rig}$, F est un domaine analytique et possède alors une structure d'espace analytique.

Ex: Si $G = H[p]$, H groupe p-div. 2) $\Rightarrow \{x \mid G_x \text{ semi-stable}\}$ est un ouvert admissible.

dém: * On se ramène au cas où $\mathfrak{X}$ = schéma formel admissible quasicompact au sens de Raynaud

= schéma formel topologiquement de type fini sans p-torsion.

$$= \bigcup_{\text{finie}} \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F\langle x_1, \dots, x_n\rangle / \text{Idéal})$$

* $G^{an} \longrightarrow \mathfrak{X}^{an}$ espace analytique en groupes étale fini.

$\Rightarrow$ $\exists$ revêtement étale fini surjectif $\begin{array}{c} Y \\ \downarrow f \\ \mathfrak{X}^{an} \end{array}$ tel que $f^* G^{an}$ soit constant

(on trivialise la monodromie)

i.e. $f^* G^{an} \simeq \underline{M}$, où M = groupe abélien fini "abstrait", sur chaque composante connexe de Y.

Raynaud $\Rightarrow$ $\exists\ \mathcal{Y} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{X}$ morphisme de schémas formels admissibles induisant $Y \to \mathfrak{X}^{an}$ en fibres génériques.

De plus f étale $\Rightarrow$ $f : |Y| \to |\mathfrak{X}^{an}|$ est ouvert. Donc, pour montrer que

$|\mathfrak{X}^{an}| \to \{\text{polygones}\}$ est $\mathcal{C}^0$ il suffit de montrer que sa composée avec f l'est.

De m̂, $\mathcal{Y}^{rig} \to \mathfrak{X}^{rig}$ étale $\Rightarrow$ image d'un ouvert admissible est admissible.

$\Rightarrow$ Quitte à remplacer, $\mathfrak{X}$ par $\mathcal{Y}$ et G par $\pi^* G$ on peut supposer que G^{an} est constant.

* Quitte à faire un éclatement formel admissible de $\mathfrak{X}$ on peut supposer que

$$\{\text{sous-groupes plats finis de } G\} \xrightarrow{\sim} \{\text{ss groupes étales finis de } G^{an}\}$$
$$H \subset G \longmapsto H^{an} \subset G^{an}$$

est une bijection

* Quitte à remplacer $\mathfrak{X}^{an}$ par une de ses composantes connexes et $\mathfrak{X}$ par une composante (connexe) d'un éclatement formel admissible on peut supposer $\mathfrak{X}^{an}$ connexe.

* Soit $A = \{\text{sous-groupes plats finis de } G\}$ = ensemble fini

Puisque $\mathfrak{X}^{an}$ est connexe, G^{an} constant, et $\{\text{ss gp de } G\} \xrightarrow{\sim} \{\text{ss gp de } G^{an}\}$.

$$\forall x \in \mathfrak{X}^{an}, \quad A \xrightarrow{\sim} \{\text{ss groupes plats finis de } G_x\}$$
$$H \subset G \longmapsto H_x \subset G_x.$$

* On a donc $HN(G_x)$ = plus grand polygone concave au dessus des points $(ht(H_x), \deg(H_x))_{H \in A}$.

Pour voir que $x \mapsto HN(G_x)$ est continue il suffit alors de montrer que $\forall H \in A$,

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathfrak{X}^{an}| \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \deg(H_x) \end{array} \right. \quad \text{est continue}$$

* On peut supposer $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(R)$ affine avec $R = \mathcal{O}_F$-algèbre topologiquement de type fini sans p-torsion.

H schéma en groupes fini et plat $/ R$.

$\delta_H =$ diviseur de Cartier sur $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Div}(\ell_H)$.

trivial après inversion de p.

Alors, $\deg(H_x) = v_x(\delta_H)$ valuation du diviseur.

$x \longmapsto v_x(\delta_H)$ est une fonction continue.

Car localement sur $\mathrm{Spf}(R)$, $\delta_H = (f)$ où $f \in R$ et il s'agit de la fonction $|\mathcal{X}^{an}| \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$x \longmapsto v_x(f)$$

$\Longrightarrow$ Continuité.

Dem, $\{x \in \mathcal{X}^{rig} / v_x(\delta_H) \leq C\}$ est un ouvert admissible

Car si $f \in R$, $f \in R[\frac{1}{p}]^\times$, $\{x \in \mathcal{X}^{rig} / v(f(x)) \leq C\}$ est un ouvert admissible.

$\square$

La filtration en famille

Th. $\mathfrak{X}$ schéma formel admissible quasi-compact réduit / $\mathcal{O}_F$.
$G/\mathfrak{X}$ de hauteur constante.
Supposons qu'il existe $i_0 \in \mathbb{N} \cap]0, ht\,G[$ tel que $\forall x \in \mathfrak{X}^{an}$, $HN(G_x)$ possède un point de rupture en l'abscisse i_0.
$\exists$ alors $\tilde{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$ éclatement formel admissible et un unique sous-groupe plat fini $G' \subset G \underset{*}{\times_{\mathfrak{X}}} \tilde{\mathfrak{X}}$ $\boxed{\text{de hauteur } i_0}$ tel que $\forall x \in \mathfrak{X}^{an}$, $G'_x \subset G_x$ soit l'élément de hauteur i_0 de la filtration de H.N. de G_x.

Corollaire. $\mathfrak{X}$ localement formellement de type fini réduit V. $G/\mathfrak{X}$ tq. $\forall x \in \mathfrak{X}^{an}$,
$HN(G_x)$ possède un point de rupture en l'abscisse i_0.
$\exists$ alors un unique sous-groupe étale fini $G' \subset G^{an}$ induisant fibre à fibre le saut correspondant de la filtration de H.N.

$\Rightarrow$ Ex. Si $G \longleftrightarrow \pi_1(\mathfrak{X}^{an}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{point géo. de } \mathfrak{X}^{an}}}{x}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ M = groupe fini abélien

$\exists\, M' \subset M$ invariant sous l'action du π_1
$\Rightarrow$ la représentation de monodromie est réductible.

Le sous-groupe canonique

Introduction : * $K/\mathbb{Q}_p$ complète $v : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$g \geq 1$, A var. abélienne de dimension $g / \mathcal{O}_K$ à réduction ordinaire

$$0 \to \underbrace{A[p^n]^{\circ}}_{\substack{\text{de type multiplicatif} \\ \text{d'ordre } p^{ng}}} \to A[p^n] \to A[p^n]^{ét} \to 0$$

sous-groupe canonique

* Les filtrations précédentes se mettent en famille :

$$\begin{tikzcd} & \text{ouverts admissibles} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \underbrace{S^{ord}}_{\substack{\text{lieu de} \\ \text{bonne réduction} \\ \text{ordinaire}}} \arrow[r, hook] & \underbrace{S}_{\substack{\text{lieu de} \\ \text{bonne réduction}}} \arrow[r, hook] & \begin{pmatrix} \text{Siegel genre } g\text{, niveau} \\ \text{premier à } p/\mathbb{Q}_p \end{pmatrix}^{rig} \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{P_n}_{\text{sous-groupe de congruence}} = \left\{ k \in GSp_{2g}(\mathbb{Z}_p) \;\middle|\; k \equiv \begin{array}{c|c} \overset{g}{} & \overset{g}{} \\ \end{array} \begin{pmatrix} X & X \\ \hline 0 & X \end{pmatrix} \begin{matrix} \}g \\ \}g \end{matrix} \bmod p^n \right\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & S_{p^n} \arrow[d, "\text{étale fini}"] & \text{Siegel en niveau } p^n \arrow[l] \\
S_{ord} \arrow[ur, "\text{section canonique}"] \arrow[r, hook] & S &
\end{tikzcd}$$

* Invariant de Hasse numérique

$$\underbrace{Ha}_{} : S \to [0,1]$$

valuation "tronquée" de la forme automorphe de poids $p-1$ modulo p, invariant de Hasse

$$S_{ord} = Ha^{-1}(\{0\})$$

Questions : 1) Pour n donné, $\exists\, \varepsilon_n > 0$ explicite tq. la section précédente sur S_{ord} du revêtement $S_{p^n} \to S$ s'étende au voisinage tubulaire $Ha^{-1}([0,\varepsilon_n[)$ de S_{ord} ? Surconvergen

2) Pour une telle section, comprendre le morphisme "quotient par un sous-groupe canonique"

$$\begin{tikzcd}
 & S_{p^n} \arrow[dl, "\text{revêtement précédent}"'] \arrow[dr, "(A,C) \mapsto A/C"] & \\
Ha^{-1}([0,\varepsilon_n[) \subset S \arrow[rr, bend left=60, "?"] & & S
\end{tikzcd}$$

Pb. plus général concernant les groupes p-divisibles (pour application à d'autres variétés de Shimura).

* Katz et Lubin . le cas des Courbes elliptiques (① et ②)

groupes formels de dimension 1 → polygones de Newton

① * Abbes-Mokrane : var. ab., $n=1$ → Cycles evanescents p-adiques
+ filtrations de Bloch-Kato
+ filtration de ramification d'Abbes-Saito

* Tian : groupes p-divisibles, $n=1$ → dévissage

* Andreatta-Gasbarri : retrouvé le résultat d'Abbes-Mokrane par d'autres méthodes

* Kisin-Lai
* Goren-Payman
} ont traité en détails le cas des variétés modulaires de Hilbert.

~~**Invariant de Hasse** : $K|\mathbb{Q}_p$ valuée complète $v : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$~~

~~H groupe p-divisible$/\mathcal{O}_K$~~

Groupes p-divisibles ordinaires / invariant de Hasse

$K|\mathbb{Q}_p$. $v : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

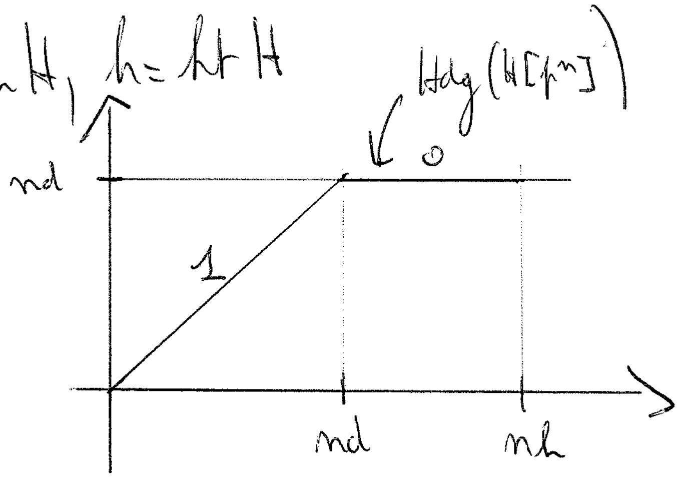
Déf. H est ordinaire $\Longleftrightarrow$ $H[p]$ est une extension d'un groupe étale par un groupe de type multiplicatif (i.e. $H[p]^{\circ}$ est de type multiplicatif)

$\Longleftrightarrow$ $\forall n$ il en est de m̂ pour $H[p^n]$

H ordinaire $\Rightarrow$ $0 \to \underbrace{H^{\circ}}_{\text{de type multiplicatif}} \to H \to H^{ét} \to 0$

Traduction en termes de polygone de H.N. :

$d = \dim H$, $h = \operatorname{ht} H$



On a toujours $\left\{ \begin{array}{l} HN(H[p^n]) \leq \mathrm{Hdg}(H[p^n]) \quad \text{avec égalité ssi } H \text{ ordinaire} \\ \widehat{\text{m}} \text{ points terminaux} \end{array} \right.$

Si c'est le cas alors $\underbrace{H^{\circ}[p^n]}_{\text{ss. groupe canonique}} =$ cran de la filtration de H.N. de hauteur nd de $H[p^n]$

Invariant de Hasse

$G = H[p]$, $G_0 = G \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$

$\omega_{G^D} = \omega_{G_0^D} = \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ - module libre de rang $h-d$

$F : G_0 \to G_0^{(p)}$ induit $\varphi_G : \omega_{G_0^D} \to \omega_{G_0^D}^{(p)}$

Via la classification des groupes annulés par Frobenius

$$(\omega_{G^D}, \varphi_G) \longleftrightarrow \ker(F : G_0 \to G_0^{(p)})$$

$$0 \to \ker F \to G_0 \xrightarrow{\alpha_G} \underline{\omega_{G^D}} \xrightarrow{F-\varphi_G} \underline{\omega_{G^D}}^{(p)} \to 0$$ suite exacte

Def. $\underbrace{Ha(H)}_{} = \inf\{1, \sum_i v(a_i)\}$ si $\mathrm{Coker}\,\varphi_G \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}_K/a_i\mathcal{O}_K$

valuation de l'invariant de Hasse, ne dépend que de $H[p] \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$.

$$\boxed{Ha(H) = 0 \iff \ker F \text{ de type multiplicatif} \iff H \text{ ordinaire}}$$

Le théorème : énoncé

Th : $p \neq 2,3$. $H/\mathcal{O}_K$ groupe p-divisible de dimension d vérifiant

$$\boxed{w := Ha(H) < \frac{1}{2p^{n-1}}}$$

Alors, la filtration de H.N de $H[p^n]$ possède un cran C de hauteur nd vérifiant :

- * $C(O_{\bar K})$ est un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module libre de rang d

Répond à la question ①

- * $\boxed{\deg(G/C) = \frac{p^n-1}{p-1} w}$
- * C modulo $\{x \in O_K / v(x) \geq 1 - p^{n-1} w\} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Frob}^n$

Pour $1 \leq b < n$, si C_b = adhérence schématique de $C_\eta[p^b]$ on a :

Répond à la question ②

- * C_b = cran de la filtration de H.N. de $H[p^b]$ de hauteur bd
- * $Ha(H/C_b) = p^b Ha(H)$ $\left(< \frac{1}{2p^{(n-b)}} \right)$
- * C/C_b est le cran de hauteur $(n-b)d$ de la filtration de H.N. de $(H/C_b)[p^{n-b}]$

C = sous-groupe canonique.

Rem. Pour $n=1$ on peut montrer que C = saut de la filtration d'Abbes-Saito de $H[p]$ $\longrightarrow$ retrouve le résultat d'Abbes-Mokrane par d'autres méthodes.

* Couplé avec les résultats sur les mises en famille de filtrations de H.N. $\Rightarrow$ résultats pour les espaces de modules de variétés abéliennes.

Démonstration : le cas des points de p-torsion.

Application de Hodge-Tate

G schéma en groupes fini et plat$/O_K$

$\alpha_G : G \longrightarrow \underline{\omega}_{G^D}$ morphisme de faisceaux fppf

induit:

$$\begin{tikzcd} \alpha_G : G(O_{\bar K}) \arrow[r, "\circlearrowleft \, Gal(\bar K|K)"] \arrow[d, phantom, "\|"] & \omega_{G^D} \otimes O_{\bar K} \\ Hom(G^D_{O_{\bar K}}, \mathbb{G}_m) & \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[u, phantom, "\in"] & x^* \frac{dT}{T} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \alpha_G \otimes 1 : G(O_{\bar K}) \otimes O_{\bar K} \arrow[r] & \omega_{G^D} \otimes O_{\bar K} \\ \arrow[u] O_{\bar K}\text{-modules de présentation finie de torsion} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Idée: H groupe p-divisible$/O_K$, $G = H[p]$, $G_0 = G \otimes O_K/pO_K$

suite exacte $0 \to \ker F \to G_0 \xrightarrow{\alpha_{G_0}} \underline{\omega}_{G^D} \xrightarrow{F-\Psi_G} \underline{\omega}_{G^D}^{(p)} \to 0$

on veut relever $\ker F$ de G_0 à G ~~ms~~ regarder $\ker(\alpha_G : G(O_{\bar K}) \to \omega_{G^D} \otimes O_{\bar K})$

Un résultat clef de théorie de Hodge p-adique

$$\boxed{\textbf{Th:}\ \forall G,\ \mathrm{Coker}(\alpha_G \otimes 1) \text{ est annulé par } p^{\frac{1}{p-1}}}$$

→ dévissage au cas des groupes p-divisibles (prendre une résolution).

Si H est un groupe p-divisible il y a une application de Hodge-Tate

$$\alpha_H : T_p(H) \longrightarrow \omega_{H^D} \otimes \mathcal{O}_{\hat{\bar{K}}}$$

obtenue en passant à la $\underleftarrow{\lim}$ les applications de H.T. des $(H[p^n])_{n\geq 1}$

$$\begin{tikzcd}
\alpha_{H[p^n]} : H[p^n](\mathcal{O}_{\bar{K}}) \arrow[r] & \omega_{H[p^n]^D} \otimes \mathcal{O}_{\hat{\bar{K}}} \\
T_p(H)/p^n T_p(H) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[r, "\alpha_H \bmod p^n"] & (\omega_{H^D} \otimes \mathcal{O}_{\hat{\bar{K}}})/p^n(\omega_{H^D} \otimes \mathcal{O}_{\hat{\bar{K}}}) \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

et une suite

$$0 \rightarrow \omega_H^* \otimes \mathcal{O}_{\hat{\bar{K}}}(1) \xrightarrow{{}^t(\alpha_{H^D} \otimes 1)(1)} T_p(H) \otimes \mathcal{O}_{\hat{\bar{K}}} \xrightarrow{\alpha_H \otimes 1} \omega_{H^D} \otimes \mathcal{O}_{\hat{\bar{K}}} \rightarrow 0$$

Th : La suite exacte précédente est un complexe dont la cohomologie est annulée par $p^{\frac{1}{p-1}}$.

Rem. * Si K est de valuation discrète la suite ~~es~~ précédente est exacte scindée après inversion de p (Tate).

* Fontaine a montré que lorsque K est de valuation discrète à corps résiduel parfait la cohomologie du complexe précédent est annulée par $p^{\frac{1}{p-1} + v(\mathcal{D}_{K/K_0})}$

Preuve du théorème précédent utilise le th. suivant de Faltings : si E = évaluation du cristal covariant de H sur $A_{cris} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} O_{\hat{\bar K}}$

Version entière des théorèmes de Comparaison de Fontaine

il y a une application des périodes qui est un iso

$$T_p(H) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Fil}^0 E)^{\varphi=p}$$

filtration de Hodge

et tq. $tE \subset T_p(H) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \subset E$

strictement compatible aux filtrations.

+ le fait suivant : $t \in \mathrm{Fil}^1 A_{cris}$. $\mathrm{gr}^1 A_{cris} \simeq O_{\hat{\bar K}}$ i.e. est un $O_{\hat{\bar K}}$- module libre de rang 1.

Alors, $\mathrm{gr}^1 A_{cris} / O_{\hat{\bar K}} . \underline{t}$ est d'annulateur $p^{\frac{1}{p-1}}$.

image de t dans $\mathrm{gr}^1 A_{cris}$

Application du théorème sur le Conoyau de H.T.

G/O_K $\quad O_{\bar K,\varepsilon} = O_{\bar K}/\mathfrak{m}_{\bar K,\varepsilon}$ où $\mathfrak{m}_{\bar K,\varepsilon} = \{x \in O_{\bar K} \mid v(x) \geq \varepsilon\}$

$$\begin{tikzcd} G(O_{\bar K}) \arrow[r, "\alpha_G"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_{G,\varepsilon}"'] & \omega_{G^D} \otimes O_{\bar K} \arrow[r, two heads] & \omega_{G^D} \otimes O_{\bar K,\varepsilon} \end{tikzcd}$$

Prop: $G = H[p]$ où H est un groupe p-divisible$/\mathcal{O}_K$.

Alors, si $\frac{1}{p-1} < \varepsilon \leq 1$ on a

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \ker\left(\alpha_{G,\varepsilon}\right) \leq d = \dim H.$$

Lemme: Soit M un $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-module de présentation finie et $N \subset M$ un sous-module de type fini. Si M peut être engendré par r éléments alors N peut également être engendré par r éléments

dem: $\mathcal{O}_{\bar{K}}^{r} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M$, $\pi^{-1}(N) =$ sous-$\mathcal{O}_{\bar{K}}$-module de type fini de $\mathcal{O}_{\bar{K}}^{r}$.

$\Rightarrow \exists$ base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\mathcal{O}_{\bar{K}}^{r}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ tels que

$\pi^{-1}(N) = \langle \lambda_1 e_1, \dots, \lambda_r e_r \rangle$. $\square$