Un exo : $k$ parfait. $G$ $k$-schéma en groupes fini commutatif

$$M = \mathbb{D}(G)$$

$$\ell_G \simeq [\underset{-1}{M} \xrightarrow{F} \underset{0}{M}]$$

$$\ell_{G^D}^{\vee} \simeq [\underset{0}{M} \xrightarrow{V} \underset{+1}{M}]$$

$\boxed{\text{Groupes } p\text{-divisibles}}$

__Définition.__ $S$ schéma - $p$ nombre premier

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau fppf de groupes abéliens

$$\mathcal{F}[p^n] := \ker(\mathcal{F} \xrightarrow{\times p^n} \mathcal{F})$$

~~(Si $p\mathcal{O}_S = 0$,~~ ~~$\mathcal{F}[F^n] := \ker(\mathcal{F} \xrightarrow{F^n} \mathcal{F}^{(p^n)})$~~ )

[ __Def:__ Un groupe $p$-divisible sur $S$ est un faisceau fppf de groupes abéliens $H$ vérifiant : 1) $H \xrightarrow{\times p} H$ est un épimorphisme (i.e. $H$ est "$p$-divisible")

2) $H$ est de $p$-torsion i.e. le mono. $\varinjlim_{n \geq 1} H[p^n] \hookrightarrow H$ est un isomorphisme (i.e. un épi)

3) $H[p]$ est un $S$-schéma en groupes fini localement libre

1) + 2) $\Rightarrow$ la propriété 4) suivante :

[ 4) $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ il y a une suite exacte $0 \to H[p^n] \to H[p^{n+m}] \xrightarrow{\times p^n} H[p^m] \to 0$ ]

* Alors, $\underset{\text{faisceau fppf de gr. ab.}}{H}$ est un groupe $p$-div. $\Longleftrightarrow$ vérifie 2) + 3) + 4)

* De plus, la propriété 4) couplée au fait que $H[p]$ est un schéma en groupes fini localement libre + le fait que la catégorie des schémas en groupes finis localement libres forme une sous-catégorie exacte (i.e. stable par extensions) de la catégorie des faisceaux fppf de groupes abéliens

$\Rightarrow$ Propriété $\left[\begin{array}{l} 5) : \forall n \geq 1, \ H[p^n] \text{ est un schéma en groupes fini localement libre.} \\ \quad \text{vérifiant } |H[p^n]| = |H[p]|^n \end{array}\right]$

* Alors, utilisant le fait que si $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3$ est une suite exacte de groupes finis loc. libres, la suite $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ est exacte ssi $|G_2| = |G_1| \cdot |G_3|$,

$$H \text{ groupe } p\text{-divisible} \Longleftrightarrow \text{satisfait aux propriétés 2) et 5)}$$

<u>Def</u> : * Si $G$ est un groupe fini localement libre annulé par une puissance de $p$, on note
$$ht(G) = \log_p |G| \in \mathbb{N}$$
* Si $H$ est un groupe $p$-divisible on note $\boxed{ht(H) = ht(H[p])}$

* La fonction $G \mapsto ht(G)$ est additive sur la catégorie des groupes finis loc. libres d'ordre une puissance de $p$.

# Isogénies.

**Déf.** Un morphisme $f: H_1 \to H_2$ de groupes $p$-divisibles est une isogénie si c'est un épimorphisme fppf de noyau un groupe fini localement libre.

**Lemme.** $H$ groupe $p$-divisible. $G \subset H$ un sous-groupe fini localement libre ($\Rightarrow G \subset H[p^N]$ pour $N \gg 0$). Alors, $H/G$ est un groupe $p$-divisible et donc $H \to H/G$ est une isogénie.

dém: $*$
$$\begin{tikzcd} H/G \arrow[r, "\times p"] \arrow[rr, bend left, phantom, ""] & H/G & \\ H \arrow[u, two heads, "\text{épi}"] \arrow[r, "\times p", "\text{épi}"'] & H/G \arrow[u, "\text{épi}"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \text{épi}$$

$*$ clairement de $p$-torsion

$*$ $(H/G)[p] = \underbrace{p^{-1}G}/G$

image réciproque de $G$ via $H \xrightarrow{\times p} H$

Si $G \subset H[p^N]$ pour $N \gg 0$

$$\begin{tikzcd} p^{-1}G \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & H[p^{N+1}] \arrow[d, "\times p", "\text{plat}"'] \\ G \arrow[r, hook] & H[p^N] \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} p^{-1}G \arrow[d, "\text{plat}"] \\ G \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow p^{-1}G$ schéma en groupes fini localement libre

$\Rightarrow p^{-1}G/G$ "                                        "

$\square$

<u>Exemples</u> * $A$ schéma abélien $/S$, $\varinjlim_{n\geq 1} A[p^n]$ est un groupe $p$-divisible de hauteur $2\dim(A/S)$

* $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \varinjlim_n \underbrace{p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}}_{\substack{\text{schéma en groupes} \\ \text{étale constant}}}$ est un groupe $p$-divisible

* Si $H$ est un groupe $p$-div., $H[p]$ étale $\Leftrightarrow \forall n$, $H[p^n]$ l'est

$$0 \to \underset{\text{étale}}{H[p^n]} \to H[p^{n+m}] \xrightarrow{\times p^n} \underset{\text{étale}}{H[p^m]} \to 0$$

$$\Rightarrow \text{étale}$$

Un tel groupe $p$-divisible est dit étale.

Groupes $p$-divisibles étales$/S \simeq \mathbb{Z}_p$-faisceaux étales lisses sur $S$

$$H \longmapsto \text{système projectif } H[p] \xleftarrow{\times p} H[p^2] \leftarrow \cdots \xleftarrow{\times p} H[p^n] \leftarrow \cdots$$

Si $S$ est connexe et $s$ est un point géométrique de $S$,

Groupes $p$-divisibles étales$/S \simeq$ Catégorie des $(T, \rho)$ où $T$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini et $\rho : \pi_1(S, s) \to GL_{\mathbb{Z}_p}(T)$

$$H \longmapsto \underbrace{T_p(H)}_{\text{module de Tate}}$$

où si $s = \mathrm{Spec}(k) \to S$ ($k$ séparablement clos), $T_p(H) = \varprojlim_{n\geq 1} H[p^n](k)$

* groupes $p$-div. étales = "formes tordues" de $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\oplus h}$

Donc, si $H$ = groupe $p$-divisible

$$\{ H \twoheadrightarrow H' \text{ isogénie} \}/\sim \ \xrightarrow{\sim} \{ \text{sous-groupes finis loc libres de } H \}$$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads] & H' \arrow[d, "\simeq"] \\ & H'' \end{tikzcd}$$

i.e. se donner une isogénie c'est essentiellement se donner un sg. plat fini de $H$, le noyau de l'isogénie.

<u>Prop</u>: Un morphisme de groupes $p$-divisibles $f : H_1 \to H_2$ est une isogénie ssi $\exists g : H_2 \to H_1$ tel que $f \circ g = p^N$ et $g \circ f = p^N$ pour un $N \in \mathbb{N}$.

<u>dem.</u> ($\Rightarrow$) $H_1/\ker f \xrightarrow{\sim} H_2$, $\ker f$ annulé par $p^N$ pour $N \gg 0$

$$\begin{tikzcd} H_1/\ker f \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\times p^N"] & H_2 \arrow[dl, dashed, "g"] \\ H_1 & \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) $f \circ g = p^N \Rightarrow f \circ g$ épi $\Rightarrow f$ épi.

$$\ker f \subset H_1[p^N] \Rightarrow \ker f = \ker\left( H_1[p^N] \xrightarrow{f_{|H_1[p^N]}} H_2[p^N] \right)$$

$\Rightarrow \ker f$ est un schéma en groupes fini de présentation finie.

$\begin{cases} f \circ g = p^N \\ g \circ f = p^N \end{cases} \Rightarrow \quad H_2[p^N] \xrightarrow{g} \ker f$ est un épimorphisme fppf

$\Longrightarrow \ker f$ plat $\Longrightarrow \ker f$ fini localement libre

$\uparrow$ cf. 1er cours : $G_1 \xrightarrow{f} G_2$ un morphisme de $S$-schémas en groupes plats de présentation finie. $f$ épi fppf $\Longrightarrow G_2$ plat$/S$

$\square$

<u>Def</u> : $f$ isogénie. $ht(f) = ht(\ker f)$.

<u>Exo</u> : $ht(f \circ g) = ht(f) + ht(g)$.

<u>Ex</u> : * $S = \mathbb{F}_p$-schéma $\quad F : H \to H^{(p)} \quad FV = p \quad \Longrightarrow F$ et $V$ isogénies

$V : H^{(p)} \to H \quad VF = p$

$\Longrightarrow \forall n$, $\ker F^n$ et $\ker V^n$ sont des schémas en groupes finis localement libres.

## Structure de la catégorie des groupes $p$-divisibles

* $\underbrace{\mathrm{pdiv}_S}_{\text{catégorie } \mathbb{Z}_p\text{-linéaire}}$ = sous-catégorie exacte de la catégorie des faisceaux fppf de groupes abéliens$/S$

Dans $\mathrm{pdiv}_S$, monomorphisme strict $\Leftrightarrow$ monomorphisme de faisceaux fppf

épimorphisme strict $\Leftrightarrow \forall n$, $H_1[p^n] \to H_2[p^n]$ est un épimorphisme.

* $\mathrm{pdiv}_S \otimes \mathbb{Q}$ = catégorie dont les objets sont les groupes $p$-divisibles$/S$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pdiv}_S \otimes \mathbb{Q}}(H_1, H_2) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{pdiv}_S}(H_1, H_2) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$

Ou encore $\mathrm{pdiv}_S \otimes \mathbb{Q}$ est obtenue à partir de $\mathrm{pdiv}_S$ par localisation en inversant les flèches $H \xrightarrow{\times p^n} H$, $n \in \mathbb{N}$, $H \in \mathrm{pdiv}_S$.

Un morphisme $f$ dans $\mathrm{pdiv}_S$ devient un isomorphisme dans $\mathrm{pdiv}_S \otimes \mathbb{Q}$

$$\Updownarrow$$

$f$ isogénie

$\rightsquigarrow$ $\underbrace{\mathrm{pdiv}_S \otimes \mathbb{Q}}_{\text{additive } \mathbb{Q}_p\text{-linéaire}}$ = catégorie des groupes $p$-divisibles "à isogénie près".

[* **Prop.** Si $S = \mathrm{Spec}(\text{corps})$ alors $\mathrm{pdiv}_S \otimes \mathbb{Q}$ est abélienne.]

$\longrightarrow$ Résulte des résultats généraux de Jouanolou sur les systèmes projectifs $J$-adiques (cf. SGA).

Par exemple, si $f : H_1 \to H_2$ est un morphisme de groupes $p$-divisibles, soit $\mathcal{G} = \underbrace{\ker f}_{\text{comme faisceau fppf}}$. On a $\mathcal{G} = \varinjlim_{n \geq 1} \underbrace{\mathcal{G}[p^n]}_{\ker(H_1[p^n] \xrightarrow{f} H_2[p^n]) = \text{schéma en groupes fini}}$

$$\cdots \overset{\times p}{\hookrightarrow} \mathcal{G}[p^{n+1}]/\mathcal{G}[p^n] \overset{\times p}{\hookrightarrow} \mathcal{G}[p^n]/\mathcal{G}[p^{n-1}] \overset{\times p}{\hookrightarrow} \cdots \overset{\times p}{\hookrightarrow} \mathcal{G}[p]$$

$\rightsquigarrow$ suite décroissante de sous-groupes finis de $\mathcal{G}[p]$ $\Rightarrow$ stationnaire pour $n \gg 0$.

$$\Rightarrow \exists N,\ n \geq N \Rightarrow \mathcal{G}[p^{n+1}]/\mathcal{G}[p^n] \xrightarrow[\sim]{\times p} \mathcal{G}[p^n]/\mathcal{G}[p^{n-1}]$$

On vérifie alors que $\mathcal{G}/\mathcal{G}[p^N]$ est un groupe $p$-divisible et

$$\mathcal{G}/\mathcal{G}[p^N] \xrightarrow{\times p^N} H_1 \text{ est un noyau de } f \text{ dans } p\text{div}_S \otimes \mathbb{Q}.$$

$\square$

Ex. Si $\mathrm{Car}(k)=0$, $p\mathrm{div}_k \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}_p$- faisceaux étales lisses sur $\mathrm{Spec}(k)$

Si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de $k$

$$p\mathrm{div}_k \otimes \mathbb{Q} \simeq \left\{ (V,\rho) \;\middle|\; \begin{array}{l} V = \mathbb{Q}_p\text{-e.v. de dimension finie} \\ \text{et } \rho : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to GL(V) \text{ continue} \end{array} \right\}$$

$$H \longmapsto \underbrace{V_p(H)}_{\text{module de Tate rationnel}} = T_p(H) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

* **Dualité de Cartier** : * $H \in p\mathrm{div}_S$, $H^D \in p\mathrm{div}_S$ est défini par

$$H^D = \varinjlim_n H[p^n]^D \quad \text{où } H[p^n]^D \hookrightarrow H[p^{n+1}]^D \text{ est}$$

Cartier dual à $H[p^{n+1}] \xrightarrow{\times p} H[p^n]$.

* $p\mathrm{div}_S \circlearrowleft$ dualité de Cartier = involution exacte

* $T_p(H^D) = T_p(H)^*(1)$ si $H$ est étale.

# Lissité formelle des groupes $p$-divisibles

**Th.** Supposons $p^N O_S = 0$ et soit $H$ un groupe $p$-divisible sur $S$.
Alors, $H$ est formellement lisse. De plus si $n \geq N$, l'inclusion
$H[p^N] \hookrightarrow H[p^n]$ induit un isomorphisme $\omega_{H[p^n]} \xrightarrow{\sim} \omega_{H[p^N]}$

**dem:** * Rappelons que si $G$ est fini loc. libre$/S$ on note $t_G = \mathcal{H}^0(\ell_G^\vee)$ et $v_G = \mathcal{H}^1(\ell_G^\vee)$.

$G \mapsto t_G$, $G \mapsto v_G$ sont covariants et si $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ est exacte alors

$$0 \to t_{G_1} \to t_{G_2} \to t_{G_3} \to v_{G_1} \to v_{G_2} \to v_{G_3} \to 0$$ est exacte.

* D'après le cours précédent il suffit de montrer que

$$\varinjlim_{n \geq 1} v_{H[p^n]} = 0$$

* Soit $n \geq 1$. L'inclusion $H[p^n] \hookrightarrow H[p^{n+N}]$ induit

$$v_{H[p^n]} \xrightarrow{\alpha} v_{H[p^{n+N}]}$$

Il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H[p^{n+N}] \arrow[d, "\times p^N"', "\text{épi.}"] \arrow[dr, "\times p^N"] & \\
H[p^n] \arrow[r, hook] \arrow[d] & H[p^{n+N}] \\
0 &
\end{tikzcd}$$

qui induit

$$\begin{tikzcd}
v_{H[p^{n+N}]} \arrow[d, "\text{surjectif d'après}"'] \arrow[dr, "\times p^N = 0"] & \\
v_{H[p^n]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & v_{H[p^{n+N}]} \\
0 &
\end{tikzcd}$$

$\times p^N = 0$ car $p^N O_S = 0$.

$\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow H$ formellement lisse.

* Si $n \geq N$, $0 \to H[p^N] \to H[p^n] \xrightarrow{\times p^N} H[p^{n-N}] \to 0$

$$\begin{tikzcd} H[p^n] \arrow[r, "\times p^N"] \arrow[dr, "\times p^N"'] & H[p^{n-N}] \arrow[d, hook] \\ & H[p^n] \end{tikzcd}$$

induit

$$\begin{tikzcd} & 0 & & \\ \omega_{H[p^{n-N}]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u] & \omega_{H[p^n]} \arrow[r] & \omega_{H[p^N]} \arrow[r] & 0 \\ \omega_{H[p^n]} \arrow[u] \arrow[ur, "\times p^N = 0 \text{ car } p^N \mathcal{O}_S = 0"'] & & & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \omega_{H[p^n]} \xrightarrow{\sim} \omega_{H[p^N]}$ $\square$

On note $\underbrace{\omega_H}_{\text{faisceau cohérent de } \mathcal{O}_S\text{-modules}} = \omega_{H[p^n]}$ pour $n \geq N$.

(on montrera plus tard qu'il est en fait fini loc. libre)

## Groupes de Lie formel

$$Sch/S \hookrightarrow \text{Sch formels}/S \hookrightarrow \text{faisceaux fppf}$$

Schémas en gp. $\hookrightarrow$ Schémas formels en groupes $\hookrightarrow$ faisceaux fppf en groupes

Ex. $\underbrace{\widehat{\mathbb{A}}^n_S}_{\substack{\text{Complété formel de } \mathbb{A}^n_S \\ \text{le long de l'origine}}} \overset{\text{comme faisceau fppf}}{=} \varinjlim_{k \geq 0} \operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}_S[X_1,\dots,X_n]/(X_1,\dots,X_n)^{k+1}\right)$

Si $U$ est un $S$-schéma, $\widehat{\mathbb{A}}^n_S(U) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{l'idéal engendré par} \\ \text{les } (x_i)_i \text{ est nilpotent} \end{array} \right\}$

$S = \mathrm{Spec}(A)$, $\widehat{\mathbb{A}}^n_S = \mathrm{Spf}(A[[X_1, \dots, X_n]])$

* Def : Un groupe de Lie formel est un schéma formel en groupes $\mathcal{G}$ / $\boxed{S}$

tq localement / $S'$, $\mathcal{G} \simeq \widehat{\mathbb{A}}^n_S$

section unité $\Longleftrightarrow$ origine $(0, \dots, 0)$

* Si $\mathcal{F}$ est un faisceau fppf de groupes ~~abéliens~~ notons $\mathrm{Inf}^k \mathcal{F}$ le faisceau associé au préfaisceau

immersion fermée définie par $J \subset \mathcal{O}_U$ tq. $J^{k+1} = (0)$.

$U \longmapsto \left\{ s \in \mathcal{F}(U) \;/\; \exists\, T \hookrightarrow U \text{ épaississement infinitésimal d'ordre} \leq k,\ s|_T = 0 \right\}$

$$\mathrm{Inf}^k(\mathcal{F}) = \left\{ s \in \mathcal{F}(U) \;/\; \exists \begin{array}{c} T \xhookrightarrow{\text{inf. d'ordre} \leq k} U' \\ \downarrow \text{recouvrement fppf} \\ U \end{array} \quad s|_T = 0 \right\}$$

$$\mathrm{Inf}^k \mathcal{F} \times \mathrm{Inf}^{k'} \mathcal{F} \xrightarrow{\times} \mathrm{Inf}^{k+k'} \mathcal{F}$$

$\Longrightarrow \boxed{\widehat{\mathcal{F}} := \varinjlim_{k \geq 0} \mathrm{Inf}^k \mathcal{F}}$ est un faisceau en groupes

Complété formel de $\mathcal{F}$ le long de ~~...~~ la section neutre

Ex. : * Si $G$ = $S$-schéma en groupes, $\widehat{G}$ = $S$-schéma formel en groupes

Car si $J \subset \mathcal{O}_G$ est l'idéal d'augmentation alors $\mathrm{Inf}^k G = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_G / J^{k+1})$

* Si $G$ est de plus lisse$/S$, $\widehat{G}$ = groupe de Lie formel.

Prop: Un faisceau fppf en groupes $\mathcal{F}$ est un groupe de Lie formel ssi il vérifie les conditions suivantes : * $\mathcal{F} = \widehat{\mathcal{F}}$

* $\forall k \geq 0$, $\mathrm{Inf}^k \mathcal{F}$ est représentable par un $S$-schéma de présentation finie

* $\mathcal{F}$ est formellement lisse

→ facile (classique)

Th: Si $H$ est un groupe $p$-div.$/S$ et $\exists N$, $p^N \mathcal{O}_S = 0$ alors $\widehat{H}$ est un groupe de Lie formel.

dem: Il suffit de voir que $\underbrace{\mathrm{Inf}^k H = \mathrm{Inf}^k H[p^{kN}]}$

clairement représentable par un $S$-schéma de présentation finie

Or, $G = H[p^n]$ pour un $n \in \mathbb{N}$, $G \xrightarrow{\times p^N} G$ induit $0$ sur $\omega_G$

$\Rightarrow$ si $f : \mathcal{O}_G \to \mathcal{O}_G$ est le comorphisme associé à $\times p^N$

et $J$ est l'idéal d'augmentation de $G$ alors

$$f(J) \subset J^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{k\text{-fois}}(J) \subset J^{k+1} \Rightarrow \mathrm{Inf}^k G \subset G[p^{kN}]$$

$\square$

7

Corollaire : Si $p^N \mathcal{O}_S = 0$ et $H$ est un groupe $p$-div. $/S$, $\omega_H$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang $\dim \hat{H}$.

$\omega_{H[p^n]} = \mathcal{O}_S / p^n \mathcal{O}_S$ - module localement libre de rang fini

$$\ell_{H[p^n]} \simeq \left[\underset{-1}{\omega_H} \xrightarrow{\times p^n} \underset{0}{\omega_H}\right]$$

plus généralement si $H_1 \xrightarrow{f} H_2$ est une isogénie,

$$\ell_{\ker f} \simeq \left[\omega_{H_2} \xrightarrow{f^*} \omega_{H_1}\right]$$

$\hat{H}$ est-il un groupe $p$-divisible ? - $p^N \mathcal{O}_S$ pour $N \gg 0$. $H$ $G$ $p$-div$/S$.

$\hat{H}$ est un groupe $p$-divisible $\Leftrightarrow$ $\widehat{H[p]}$ est un schéma fini loc. libre

$\widehat{H[p]} = \hat{H}[p]$

On remarque que $\forall s \in S$, $\left(\widehat{H[p]}\right)_s = H[p]^\circ_s$.

* Donc, si $\widehat{H[p]}$ est un schéma en groupes fini localement libre il est radiciel et $H[p]/\widehat{H[p]}$ est étale

$\Rightarrow$ Il y a une factorisation $H[p] \xrightarrow[\text{radiciel}]{\text{fini loc libre}} H[p]/\widehat{H[p]} \xrightarrow{\text{étale fini}} S$.

* Réciproquement :

**Prop** (Mestling) $X \to Y$ fini localement libre. $\exists$ factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd] \arrow[dr, "\text{fini loc. libre radiciel}"] & \\ & X' \arrow[dl, "\text{étale fini}"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

ssi la fonction $Y \ni y \longmapsto |\underbrace{\pi_0(X_y)}_{\text{schéma étale fini}/k(y)}| = |X_y(k(y)^s)|$ $\left(\begin{array}{c}\text{rang séparable}\\ \text{des fibres}\end{array}\right)$

est localement constante.

De plus si c'est le cas une telle factorisation de $X \to Y$ est déterminée à isomorphisme unique près.

$\Downarrow$

si $X$ = $Y$-schéma en groupes $X'$ = $Y$-schéma en gp. et $X \to X'$ est un morphisme de $Y$-schémas en groupes.

**Corollaire:** Soit $G$ un $S$-schéma en groupes fini loc. libre. Il existe une suite exacte $0 \to G^0 \to G \to G^{ét} \to 0$ de $S$-schémas en groupes finis loc. libres telle que $\forall s \in S$ elle fournit par spécialisation $0 \to (G_s)^0 \to G_s \to (G_s)^{ét} \to 0$

ssi la fonction $s \mapsto |\pi_0(G_s)|$ est localement constante.

Si c'est le cas une telle suite exacte est unique.

<u>Corollaire</u> : $H$ groupe $p$-divisible$/S$. Sont :

(i) $\hat{H}$ est un groupe $p$-divisible

(ii) Il existe une suite exacte de groupes $p$-divisibles

$$0 \to \underbrace{H^0}_{\text{formel}} \to H \to \underbrace{H^{\text{ét}}}_{\text{étale}} \to 0$$

i.e. $H^0 = \hat{H}^0$ ou encore $H^0[p]$ est radiciel$/S$ $\iff$ $H^0$ = groupe de Lie formel.

$\Updownarrow$

$\forall n$, $H^0[p^n]$ est radiciel

(iii) La fonction $S \ni s \mapsto ht(H_s^{\text{ét}})$ est localement constante.

Groupes de Lie formels $p$-divisibles = Groupes $p$-divisibles formels i.e. tq. $H[p]$ soit radiciel.

<u>Ex.</u> $E$ = Courbe elliptique universelle mod $p$, $\hat{E}$ = groupe de Lie formel non $p$-divisible.

<u>Classification de Dieudonné–Manin</u> – $k$ = Corps parfait de car. $p > 0$.

Du théorème de classification des groupes finis$/k$ on déduit.

<u>Th.</u> Le foncteur $H \mapsto \mathbb{D}(H) = \mathrm{Hom}(H, CW) = \varprojlim_n \mathbb{D}(H[p^n])$ induit une équivalence de catégories entre groupes $p$-divisibles$/k$ et les couples $(M, \varphi)$ où $M$ est un $W(k)$-module libre de rang fini et $\varphi : M \to M$ est $\sigma$-linéaire et vérifie $pM \subset \varphi(M) \subset M$.

$\varphi = F$, $V = p\varphi^{-1}$ $\Rightarrow$ on a pas besoin de spécifier V, déterminé par $\varphi$.

**Def**: Un isocristal est un couple $(N, \varphi)$ où $N$ est un $W(k)_{\mathbb{Q}}$-e.v. de dimension finie et $\varphi : N \xrightarrow{\sim} N$ un iso. $\sigma$-linéaire.

Théo précédent $\Rightarrow$ $\left[ p\text{div}_k \otimes \mathbb{Q} \simeq \text{Isocristaux } (N, \varphi) \text{ possédant un réseau } M \subset N \text{ tq } pM \subset \varphi M \subset M. \right]$

[ **Def**: Un isocristal $(N, \varphi)$ est isocline de pente $\lambda \in \mathbb{Q}$ s'il existe un réseau $M \subset N$, des entiers $d \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{N}$ telsque $\lambda = \frac{d}{h}$ et $\varphi^h M = p^d M$.

↳ on peut prendre $(d, h) = 1$ si l'on veut dans la définition.

$(N, \varphi)$ Isocristal $\begin{cases} ht(N, \varphi) = \dim_{W(k)_{\mathbb{Q}}} N \\ \dim(N, \varphi) = \underbrace{[M : \varphi(M)]}_{\substack{= \text{long}(M/\varphi M) \text{ si } \varphi M \subset M \\ = \text{long}(M/p^N \varphi M) - N \text{ pour } N >> 0 \text{ en général}}} \text{ pour n'importe quel réseau } M \text{ de } N \end{cases}$

* $(N, \varphi)$ isocline de pente $\lambda \Rightarrow \lambda = \dfrac{\dim(N, \varphi)}{ht(N, \varphi)}$

~~* $ht(\mathbb{D}(H)_{\mathbb{Q}}) = ht H$~~

~~$\dim(N, \varphi) =$~~

* $\boxed{\begin{aligned} & ht(\mathbb{D}(H)_{\mathbb{Q}}) = ht\, H \\ & \dim(\mathbb{D}(H)_{\mathbb{Q}}) = \dim H \text{ car } M/\varphi M \simeq \omega_H \end{aligned}}$

Rem: $H$ groupe $p$-div$/S$ avec $p$ loc. nilpotent$/S$. Alors $\dim H \leq \mathrm{ht}\, H$.

$\rightarrow \dim H = \mathrm{ht}(F)$ $\qquad FV = VF = p \Rightarrow \boxed{\dim H + \dim H^D = \mathrm{ht}\, H}$

on peut supposer que $p\,\mathcal{O}_S = 0$ $\qquad \mathrm{ht}(F) + \mathrm{ht}(V) = \mathrm{ht}(p)$

**Th** (D. M.). * Si $\mathcal{I}soc$ désigne la catégorie des isocristaux et pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{I}soc_\lambda$ celle des isocristaux isoclines de pente $\lambda$ on a une décomposition de la catégorie abélienne,

$$\mathcal{I}soc = \underset{\lambda \in \mathbb{Q}}{\overset{\perp}{\bigoplus}} \underbrace{\mathcal{I}soc_\lambda}_{\text{sous-catégorie abélienne}}$$

$\perp$ ← pas de Hom, pas de $\mathrm{Ext}^1$

* Lorsque $k$ est algébriquement clos $\mathcal{I}soc$ est une catégorie semi-simple et $\forall \lambda \in \mathbb{Q}$ $\exists !$ objet simple de pente $\lambda$, $N_\lambda \simeq \mathcal{D}_\mathbb{Q} / \mathcal{D}_\mathbb{Q}(F^{h-d} - V^d)$

où $\mathcal{D}$ = anneau de Dieudonné

$$\mathcal{D}_\mathbb{Q} = W(k)_\mathbb{Q}[F, V] \Big/ \left( FV - p,\ VF - p,\ F\lambda - \lambda^\sigma F,\ V\lambda - \lambda^{\sigma^{-1}} V \right)_{\lambda \in W(k)_\mathbb{Q}}$$

$\mathrm{End}(N_\lambda)$ = algèbre à division$/\mathbb{Q}_p$ d'invariant $\overline{\lambda} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p)$.

**Corollaire:** $p\text{-div}_k \otimes \mathbb{Q} \simeq$ Isocristaux à pentes dans $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

$p\text{-div}^{\text{formels}}_k \otimes \mathbb{Q} \simeq$ " " $]0,1] \cap \mathbb{Q}$

**Corollaire:** Si $k$ est algébriquement clos, $p\text{-div}_k \otimes \mathbb{Q}$ est semi-simple et $\forall H \in p\text{-div}_k \otimes \mathbb{Q}$

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, ~~tq~~ $H$ isogène à $\bigoplus_{i=1}^{r} H_{\lambda_i}$

où si $\lambda = \frac{d}{h}$, $H_\lambda = \ker\left( CW \xrightarrow{F^{h-d} - V^d} CW \right)$ est un groupe $p$-divisible.

$$H_\lambda(A) = \left\{ [a_i]_{i\geq 0} \in CW(A) \;/\; \forall i,\ a_{i-d} = a_i^{p^{h-d}} \right\}$$

$$= \left\{ [\underbrace{\ldots, a_{-d+1}^{p^{h-d}}, \ldots, a_0^{p^{h-d}}}_{\text{suite périodiques}}, a_{-d+1}, \ldots, a_0] \in CW(A) \;/\; a_0, \ldots, a_{-d+1} \in A \right\}$$

Lorsque $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow H_\lambda$ pas étale, dans ~~$CW(k[[x_1, \ldots, x_d]])$~~ $CW(k[[x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d]])$

$H_\lambda$ formel

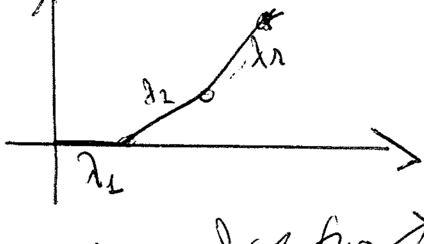
$$[\ldots, x_1^{p^{h-d}}, \ldots, x_d^{p^{h-d}}, x_1, \ldots, x_d] + [\ldots, y_1^{p^{h-d}}, \ldots, y_d^{p^{h-d}}, y_1, \ldots, y_d]$$

$$= [\ldots, F_1(\underline{x}, \underline{y})^{p^{h-d}}, \ldots, F_d(\underline{x}, \underline{y})^{p^{h-d}}, F_1(\underline{x}, \underline{y}), \ldots, F_d(\underline{x}, \underline{y})]$$

où $F_1(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d), \ldots, F_d(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d)$ définissent la loi d'addition du groupe de Lie formel $H_\lambda = \mathrm{Spf}(k[[x_1, \ldots, x_d]])$

Rem: $\mathrm{Isoc}_k$ pas semi-simple en général. Par ex. si $k = \mathbb{F}_p$. $(V, u)$, $V = \mathbb{Q}_p$-e.v. $u \in GL(V)$

* Polygone de Newton: $(N, \varphi)$ isocristal de pentes $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_r$




~~...~~ Si $k = \mathbb{F}_q$ est un corps fini. ~~...~~

$A$ variété abélienne $/\mathbb{F}_q$

$\Pi_A \in \mathrm{End}(A)$ l'endo. de Frobenius.

$\mathrm{Newt}(A[p^\infty]) =$ polygone de Newton de $\underbrace{\chi_{\Pi_A}}_{\text{polynôme caractéristique de } \Pi_A}$ renormalisé

en divisant les pentes par $r$ si $q = p^r$.

$\begin{cases} \varphi = \text{Frobenius cristallin} = \text{Frob. absolu} \quad F : A \to A^{(p)} \\ \Pi_A = \varphi^r. \end{cases}$

<u>Sur la catégorie Tannakienne des isocristaux</u>

$k$ algébriquement clos. $\mathrm{Isoc} =$ catégorie Tannakienne $\mathbb{Q}_p$-linéaire.
- pas neutre -

$*$ Foncteur fibre canonique. $\mathrm{Isoc} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{W(k)_\mathbb{Q}}$

$(N, \varphi) \longmapsto N$

$*$ En fait, $\mathrm{Isoc}$ possède un foncteur fibre sur $\mathbb{Q}_p^{nr} \subset W(k)_\mathbb{Q}$

$$(N, \varphi) \longmapsto \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \bigcup_{h \gg 1} N^{\varphi^h = p^{h\lambda}}$$

Les automorphismes de ce foncteur fibre sont le pro-tore $\mathbb{D} = \varprojlim_{\underbrace{\mathbb{N}^*}_{\text{ordonné par la divisibilité}}} \mathbb{G}_m$ sur $W(k)_{\mathbb{Q}}$

$$\mathbb{G}_m \xleftarrow{\times m} \mathbb{G}_m \xleftarrow{\times m} \mathbb{G}_m$$

$X^*(\mathbb{D}) = \mathbb{Q}$ - $\mathrm{Rep}_{W(k)_{\mathbb{Q}}}^{\otimes} \mathbb{D} \simeq W(k)_{\mathbb{Q}}$-e.v. + $\mathbb{Q}$-graduation.

- $\mathbb{D}$ donne la graduation par les pentes sur un isocristal.

$\underbrace{\mathbb{D}}_{\text{Lien}}$ abélien $\Rightarrow$ descend canoniquement à $\mathbb{Q}_p$ en $\mathbb{D}/\mathbb{Q}_p$

sous-catégorie Tannakienne

* $\mathrm{Isoc} = \bigcup_{h \geq 1} \underbrace{\mathrm{Isoc}^{(h)}}_{\text{isocristaux à pentes } \in \frac{1}{h}\mathbb{Z}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^{(h)} : \mathrm{Isoc}^{(h)} \longrightarrow \mathbb{Q}_{p^h}\text{-e.v.} \\ (N, \varphi) \longmapsto \bigoplus_{\lambda \in \frac{1}{h}\mathbb{Z}} N^{\varphi^h = p^{h\lambda}} \end{array} \right.$$

classe de la gerbe de foncteurs fibre associée

$\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^{(h)}) = \mathbb{G}_m$ et $\mathrm{Isoc}^{(h)} \longleftrightarrow$ classe fondamentale de la théorie du c.d.c. local dans

$$H^2(\mathbb{Q}_{p^h}/\mathbb{Q}_p, \mathbb{G}_m) = \frac{1}{h}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

# Groupes $p$-divisibles / $Spf(A)$ ou sur $Spec(A)$

Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel, $\mathfrak{X} = \varinjlim_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{X_i}_{\text{schéma}}$) par définition un groupe $p$-divisible sur $\mathfrak{X}$ est un système compatible de groupes $p$-divisibles sur les $X_i$ i.e. $p\mathrm{div}_{\mathfrak{X}} = 2\text{-}\varprojlim_{i \geq 0} p\mathrm{div}_{X_i}$.

<u>Exo</u>: Si $A$ est un anneau $I$-adique alors $p\mathrm{div}_{/Spec(A)} \xrightarrow{\sim} p\mathrm{div}_{/Spf(A)}$.

$$H \longmapsto \left(H \otimes_A A/I^n\right)_{n \geq 1}$$

<u>Ex</u>: Soit $A$ un anneau $p$-adique sans $p$-torsion. Soit $H$ un groupe $p$-divisible sur $Spf(A)$ tq. $H \bmod p$ soit formel. Alors, $H$ est un groupe de Lie formel sur $A$ et

$\underbrace{H \otimes_A A[\tfrac{1}{p}]}_{\text{comme groupe de Lie formel}} \simeq \widehat{\mathbb{G}}_a^{\dim H}$ ← donné par les logarithmes du groupe formel ) objets du type de Rham log. = filtration de Hodge

Mais si l'on voit $H$ comme groupe $p$-divisible sur $Spec(A)$, $H \otimes_A A[\tfrac{1}{p}]$ est un gp. $p$-div. étale $\longleftrightarrow$ Module de Tate de $H \otimes_A A[\tfrac{1}{p}]$ ) Représentations galoisiennes

les 2 points de vue font la richesse de la théorie