 Cours n°3

Rappels de la dernière fois $S = \mathbb{F}_p$-schéma

$\mathcal{D}$ = Catégorie des S-schémas en groupes finis localement libres commutatifs annulés par V

$\mathcal{E}$ = Catégorie des couples $(\mathcal{M}, \psi)$ où $\mathcal{M} = \mathcal{O}_S$-module localement libre de rang fini et $\psi : \mathcal{M} \to \underbrace{\mathcal{M}^{(p)}}_{\mathrm{Frob}_S^* \mathcal{M}}$

2 foncteurs

$\mathcal{D} \to \mathcal{E}$

$G \mapsto (\omega_{G^D}, \psi_G)$ où $\psi_G = F^* : \omega_{G^D} \to \omega_{G^D}^{(p)}$ avec $F : G \to G^{(p)}$

$\mathcal{E} \to \mathcal{D}$

$(\mathcal{M}, \psi) \mapsto \ker\left(\underline{\mathcal{M}} \xrightarrow{F-\psi} \underline{\mathcal{M}}^{(p)}\right) =: G(\mathcal{M}, \psi)$

1 flèche d'adjonction : $\alpha_G : G \to \underline{\omega}_{G^D}$ induit $\alpha_G : G \to G(\omega_{G^D}, \psi_G)$

* $G(\mathcal{M}, \psi) \hookrightarrow \underline{\mathcal{M}} = \mathrm{Spec}\left(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}^\vee\right)$

On calcule facilement que la cogèbre de $G(\mathcal{M}, \psi)$ est donnée par $\bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathrm{Sym}^i \mathcal{M}^\vee$

comme $\mathcal{O}_S$-module et $\forall x \in \mathcal{M}^\vee = \mathrm{Sym}^1 \mathcal{M}^\vee$, $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$

$\forall x \in \mathrm{Sym}^i \mathcal{M}^\vee$, $\forall y \in \mathrm{Sym}^j \mathcal{M}^\vee$, si $i+j < p$ alors $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$.

On calcule alors que $\omega_{G(\mathcal{M}, \psi)^D} = \mathcal{M}$ naturellement.

[**Th**: Les deux foncteurs précédents induisent des équivalences inverses de catégories et $G \xrightarrow{\sim} G(\omega_{G^D}, \psi_G)$]

dem: Commençons par montrer que si $G_1, G_2 \in \mathcal{D}$

$$\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\omega_{G_1^D}, \omega_{G_2^D})$$

est injectif i.e. le foncteur $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$ est fidèle.

Il faut montrer que si G_1 et G_2 sont annulés par F alors

$$\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\omega_{G_2}, \omega_{G_1}) = \mathrm{Hom}(\omega_{G_1}^\vee, \omega_{G_2}^\vee)$$

Or si G est annulé par F soit localement$/S$ $D_1, \dots, D_d$ une base d'op. diff. d'ordre 1 sur $\mathcal{O}_G$ qui est une base de $\omega_G^\vee$.

Alors, $(D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d})_{0 \le \alpha_i < p}$ est une base de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}_S)$

(cf. structure des schémas en groupes annulés par F)

Tout morphisme de schémas en groupes induit une application sur les opérateurs diff. invariants compatible à la composition des op. diff.

Donc, si un morphisme entre groupes annulés par F est trivial sur les op. diff. d'ordre 1 il est trivial.

(Rem: En caractéristique 0 le m̂ argument montre que si $f : G_1 \to G_2$ entre S-schémas en groupes lisses ~~[illegible]~~ est tel que $\mathrm{Lie}\, f = 0$ alors $\hat{f} : \hat{G}_1 \to \hat{G}_2$ est nul.)

complété formel le long de e

* $G \xrightarrow{\alpha_G} G(\omega_{G^D}, \psi_G)$ est un isomorphisme si et seulement si c'est un monomorphisme (i.e. immersion fermée) car $|G| = |G(\omega_{G^D}, \psi_G)|$.

Il suffit donc de montrer que $\alpha_G : G \to \underline{\omega_{G^D}}$ est un monomorphisme.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\omega_{G^D}} = & Hom(G^D, \mu_p) = & Hom_{\mathcal{C}}(\omega_{\mu_p}, \omega_{G^D}) \\ & f & \longmapsto f_* : \omega_{\mu_p} \to \omega_{G^D} \end{array}$$

C'est donc un monomorphisme d'après la propriété précédente. $\square$

<u>Ex.</u> G étale $\Leftrightarrow$ ψ_G isomorphisme

$$\left\{\begin{array}{l}\text{groupes étales finis} \\ \text{commutatifs annulés par } p\end{array}\right. \simeq \{(\mathcal{M}, \psi) \mid \psi \text{ iso.}\}$$

systèmes locaux étales $\longleftrightarrow$ cristaux unités.

<u>Classification de Dieudonné des schémas en groupes finis/corps parfait</u>

k = corps de caractéristique $p > 0$

$\mathcal{C}$ = catégorie abélienne des k-schémas en groupes finis (commutatifs) $\underbrace{\text{d'ordre une puissance de } p.}_{\text{les seuls intéressants.}}$

$\mathcal{C}$ est artinienne et noethérienne i.e. dans $\mathcal{C}$ tout objet est de longueur finie (cela résulte de la multiplicativité de la fonction

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{N}^* \qquad + \text{ le fait que si } G_1 \subset G_2 \text{ et } |G_1| = |G_2| \text{ alors}$$
$$G \longmapsto |G| \qquad\qquad G_1 = G_2 .$$
)

<u>Objets simples</u>: Soit $G \in \mathcal{C}$ un objet simple. Alors,

$$F_G = 0 \text{ ou } F_G \text{ est un iso}$$
$$\Updownarrow$$
$$G \text{ étale}$$

$$V_G = 0 \text{ ou } V_G \text{ iso}$$
$$\Updownarrow$$
$$G^D \text{ étale}$$

De plus, d'après le théo. de classification précédent des schémas en groupes finis annulés par V, $F_G = V_G = 0 \iff G = \alpha_p^{\oplus \text{ finie}}$ et donc $G = \alpha_p$ si G est simple.

Déf. : Schéma en groupes fini loc. libre de type multiplicatif = loc. isomorphe pour la topologie étale à $\bigoplus_{i \in I} \mu_{p^{n_i}}$

$$\Updownarrow$$
$$G^D \text{ étale}$$

Donc, objets simples = $\{$groupes étales simples, groupes de type mult. simples, $\alpha_p\}$

en bijection avec les classes d'équivalence de représentations irréductibles $\mathrm{Gal}(k^s|k) \longrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p)$, $n \in \mathbb{N}$.

Lorsque k est alg. clos $= \{\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mu_p}_{\text{Cartier duaux}}, \underbrace{\alpha_p}_{\text{Cartier autodual}}\}$

$*$ Si $G \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$,

G étale $\Longleftrightarrow JH(G_{\bar{k}}) = \{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$

G de type mult. $\Longleftrightarrow JH(G_{\bar{k}}) = \{\mu_p\}$

G biconnexe $\Longleftrightarrow JH(G_{\bar{k}}) = \{\alpha_p\}$

i.e. extensions successives de tels objets

(biconnexe) i.e. G et G^D sont connexes

$*$ Lorsque k est parfait tout $G \in \mathcal{C}$ s'écrit canoniquement sous la forme

$$G = G^{ét} \oplus G^{mult} \oplus G^{bi}$$

$$\boxed{\mathcal{C} = \mathcal{C}^{ét} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{C}^{mult} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{C}^{bi}}$$

Déf. G est unipotent si V_G est nilpotent sur G.

D'après le théo. de classification précédent des $G \in \mathcal{C}$ annulés par V ceux-ci se plongent dans $\bigoplus_{\text{finie}} \mathbb{G}_a$. De plus $V_{\mathbb{G}_a} = 0$. Donc,

G unipotent $\Longleftrightarrow$ possède une filtration $0 = G_0 \subsetneq \cdots \subsetneq G_n = G$ tq. $\forall i$, $G_i/G_{i-1} \hookrightarrow \mathbb{G}_a^{\oplus \text{finie}}$

$\Updownarrow$

Idem avec $G_i/G_{i-1} \hookrightarrow \mathbb{G}_a$

$\Updownarrow$

$JH(G_{\bar{k}}) \subset \{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \alpha_p\}$

Covecteurs de Witt unipotents

k = Corps parfait de car. $p > 0$

* W_n = groupe des vecteurs de Witt tronqués de longueur n.
  = schéma en groupes lisse$/k$

$W_n = \mathbb{A}^n$ comme k-schéma

$= \{[x_0, \dots, x_{n-1}]\}$

$\boxed{W_1 = \mathbb{G}_a}$

$W_n^{(p)} = W_n$ car $W_n = \mathbb{A}^n$ défini$/\mathbb{F}_p$

$F, V : W_n \to W_n$ sont décrits par

$$V[x_0, \dots, x_{n-1}] = [0, x_0, \dots, x_{n-2}] \qquad \boxed{FV = VF = p}$$

$$F[x_0, \dots, x_{n-1}] = [x_0^p, \dots, x_{n-1}^p]$$

* Pour $1 \leq n < m$ il y a une suite exacte (de préfaisceaux)

$$0 \to W_n \to W_m \to W_{m-n} \to 0$$

$$[x_0, \dots, x_{n-1}] \mapsto [0, \dots, 0, x_0, \dots, x_{n-1}]$$

$$[x_0, \dots, x_{m-1}] \mapsto [x_0, \dots, x_{m-n-1}]$$

Si on écrit $W_n = W/V^n W$ ce n'est rien d'autre que la suite exacte

$$0 \to W/V^n W \xrightarrow{V^{m-n}} W/V^m W \to W/V^{m-n} W \to 0$$

* En particulier, prenant $n=1$ on voit que W_n est une extension successives de $\mathbb{G}_a$.

$$\boxed{\underline{\text{Def}}: \ CW^u = \varinjlim_{n\geq 1} W_n}$$

Covecteurs de Witt unipotents

$\longleftarrow$ faisceau fppf = ind-schéma en groupes ind-lisse.

$$CW^u = \{ \underbrace{[\ldots, x_i, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0]}_{\text{suites infinies à gauche}} \ / \ x_i = 0 \text{ pour } i \lll 0 \}$$

$F \circlearrowleft \ \circlearrowright V$

$$W_n \hookrightarrow CW^u$$

$$[x_0, \ldots, x_{n-1}] \longmapsto [\ldots 0, \ldots 0, x_0, \ldots, x_{n-1}]$$

$$\begin{cases} F[x_i]_{i\leq 0} = [x_i^p]_{i\leq 0} \\ V[x_i]_{i\leq 0} = [x_{i-1}]_{i\leq 0} \quad \text{(décalage vers la droite)} \end{cases}$$

CW^u = foncteur k-algèbres $\longrightarrow$ $W(k)$-modules + action σ-linéaire de F
+ action σ^{-1} linéaire de V
où $\sigma = F$ de $W(k)$

$$CW^u(k) = W(k)\left[\tfrac{1}{p}\right]/W(k)$$

$\underline{\text{Idée}}$: CW^u = "module dualisant"

Soit $\mathcal{C}^u$ = k-schémas en groupes finis (commutatifs) unipotents = catégorie abélienne

Def : $G \in \mathcal{C}^u$ on pose $\mathbb{D}(G) = \mathrm{Hom}(G, CW^u) = \mathrm{Hom}(G, W_n)$ pour $n >> 0$

$\circlearrowleft$ $W(k), F, V$

car G est annulé par V^n pour $n>>0$

$\Downarrow$

si $f: G \to CW^u$, $\mathrm{Im} f \subset \ker V^n_{CW^u}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad W_n$

$\mathbb{D}(G) = W(k)$-module de torsion (annulé par une puissance de p)

+ $F, V : \mathbb{D}(G) \to \mathbb{D}(G)$

F σ-linéaire, V σ^{-1}-linéaire

vérifiant $FV = VF = p$ et $V^n \mathbb{D}(G) = 0$ pour $n >> 0$.

Concrètement, si $G = \mathrm{Spec}(A)$, $\Delta : A \to A \otimes_k A$ est la comultiplication

$$\mathbb{D}(G) = \left\{ x \in CW^u(A) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{si } x = [x_i]_{i \leq 0} \text{ alors} \\ \qquad\; \hat{A} \\ [\Delta x_i]_{i \leq 0} = [x_i \otimes 1]_{i \leq 0} + [1 \otimes x_i]_{i \leq 0} \\ \text{dans } CW^u(A \otimes_k A) \end{array} \right\}$$

Def : * Un module de Dieudonné est un $W(k)$-module de longueur finie + opérateurs σ-linéaire F et σ^{-1}-linéaire V tels que $FV = VF = p$.

* Il est dit unipotent si $V^n = 0$ pour $n >> 0$.

<u>Th.</u> * Le foncteur $\mathbb{D}(-)$ induit une antiéquivalence de catégories entre la catégorie abélienne $\mathcal{C}^u$ et celle des modules de Dieudonné unipotents.

* Un inverse est donné par $(M, F, V) \longmapsto \underbrace{\mathrm{Hom}_{W(k), F, V}(M, CW^u)}$

foncteur qui à la k-algèbre A associe

$$\left\{ f \in \mathrm{Hom}_{W(k)}(M, CW^u(A)) \;\middle|\; \begin{matrix} fF = Ff \\ fV = Vf \end{matrix} \right\}$$

* <u>Rem:</u> On connaît déjà un cas particulier de ce théorème, le cas des objets $G \in \mathcal{C}^u$ annulés par V. En effet, si $V_G = 0$ alors $\mathrm{Hom}(G, CW^u) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$

$$= \omega_{G^D}^{\vee} \circlearrowleft F = \psi_G^{\vee}$$
$$\text{via } \alpha_G \circlearrowleft_{V=0}$$

i.e. $\mathbb{D}(G) = \text{dual de } (\omega_{G^D}, \psi_G)$

Si $(\mathcal{V}, \psi)$ où $\mathcal{V}$ est un k-ev. de dim finie et $\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^{(p)}$ i.e. ψ : opérateur σ^{-1}-linéaire de $\mathcal{V}$ dans lui même alors $(\mathcal{V}^{\vee}, \psi^{\vee})$ = module de Dieudonné unipotent en posant $V = 0$, $F = \psi^{\vee}$.

$$\mathrm{Hom}_{W(k), F, V}\left((\mathcal{V}^{\vee}, \psi^{\vee}), CW^u\right) = \mathrm{Hom}_{W(k), F}\left((\mathcal{V}^{\vee}, \psi^{\vee}), \mathbb{G}_a\right)$$
$$= \underbrace{(\mathcal{V} \otimes \mathbb{G}_a)}_{\underline{\mathcal{V}} \text{ comme faisceau fppf}}{}^{\psi \otimes \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \otimes F} = \ker\left(\underline{\mathcal{V}} \xrightarrow{F - \psi} \underline{\mathcal{V}}^{(p)}\right)$$

* On peut étendre le théorème précédent à tous les schémas en groupes finis commutatifs $/k$

On peut le faire de façon ad hoc en utilisant $\mathcal{C} = \mathcal{C}^u \oplus \mathcal{C}^{mult}$

et en classifiant les objets de $\mathcal{C}^{mult}$ (facile).

On peut également utiliser les covecteurs de Witt définis par Fontaine

$$CW^u \subset CW$$

$$CW(A) = \{[a_i]_{i\geq 0} \;/\; a_i \in A \text{ et } \exists N, \sum_{i\leq N} A.a_i \text{ est un idéal nilpotent}\}$$

$$\mathbb{D}(G) = \mathrm{Hom}(G, CW)$$

Alors, $\mathbb{D} : \mathcal{C} \to \{W(k)\text{-modules de longueur finie } M$
$\qquad + F, V : M \to M, \; FV = VF = p\}$

$\mathcal{C}^u \to$ ceux annulés par une puissance de V.

* Si $G \in \mathcal{C}$, $\mathbb{D}(G^D) = \mathrm{Hom}_{W(k)}(\mathbb{D}(G), W(k)[\frac{1}{p}]/W(k))$

où si $f : \mathbb{D}(G) \to W(k)_{\mathbb{Q}}/W(k)$

$$\begin{cases} V.f = V \circ f \circ F \\ F.f = F \circ f \circ V \end{cases}$$

$\to$ utilise l'exponentielle d'Artin-Hasse $\widehat{W} \to \widehat{\mathbb{G}}_m$

$$0 \to \widehat{W} \xrightarrow{V - Id} \widehat{W} \to \widehat{\mathbb{G}}_m \to 0$$

Calcul différentiel symplectique

Rappels sur le calcul différentiel lisse.

X/S lisse $\quad \Omega^1_{X/S} = \mathcal{O}_X$-module localement libre de rang $\dim(X/S)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\text{lisse}"'] & Y \arrow[d, "\text{lisse}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

f lisse $\Rightarrow$ suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini

$$0 \to \underbrace{f^*\Omega^1_{Y/S} \to \Omega^1_{X/S}}_{} \to \underbrace{\Omega^1_{X/Y}}_{} \to 0$$

application entre les fibrés cotangents de Y/S et X/S
$\alpha \mapsto f^*\alpha$

fibré cotangent relatif de la submersion $X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\text{lisse}"'] & Y \arrow[d, "\text{lisse}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

i = immersion fermée d'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_Y$

X/S et Y/S lisses $\Rightarrow$ i immersion régulière

$\Rightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 = \mathcal{O}_X$-module loc. libre de rg. fini

$$0 \to \underbrace{\mathcal{J}/\mathcal{J}^2}_{\text{fibré conormal}} \to i^*\Omega^1_{Y/S} \to \Omega^1_{X/S} \to 0$$

Le cas des schémas en groupes lisses :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \\ S \arrow[u, bend left, "e"] \end{tikzcd}$$

schéma en groupes lisse

$$\begin{cases} \Omega^1_{G/S} = \pi^* \omega_{G/S} \\ \omega_{G/S} = e^* \Omega^1_{G/S} \\ \operatorname{Lie} G := \omega^\vee_{G/S} \end{cases}$$

Si $0 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{f} G_3 \to 0$

est une suite exacte de S-schémas en groupes lisses (au sens fppf)

alors, $\left|\begin{array}{l} G_2 \text{ étant un } G_1\text{-torseur au dessus de } G_3, \\ G_1 \text{ étant lisse}/S \end{array}\right.$ f est lisse.

Il y a donc une suite exacte associée au diagramme

$$\begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & G_3 \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

$$0 \to f^* \Omega^1_{G_3/S} \to \Omega^1_{G_2/S} \to \Omega^1_{G_2/G_3} \to 0$$

Si $\begin{tikzcd} G_2 \arrow[d] \\ S \arrow[u, bend right, "e_{G_2}"'] \end{tikzcd}$, appliquant $e^*_{G_2}$ à la suite exacte précédente on obtient une suite exacte de $\mathcal{O}_S$-modules loc. libres

$$0 \to \underbrace{e^*_{G_2} f^* \Omega^1_{G_3/S}}_{\substack{(f e_{G_2})^* \Omega^1_{G_3/S} \\ \| \\ e^*_{G_3} \Omega^1_{G_3/S} = \omega_{G_3}}} \to \underbrace{e^*_{G_2} \Omega^1_{G_2/S}}_{\substack{\| \\ \omega_{G_2}}} \to e^*_{G_2} \Omega^1_{G_2/G_3} \to 0$$

Il y a un diagramme

$$\begin{tikzcd} S \arrow[dr, "e_{G_1}"] \arrow[drr, bend left, "e_{G_2}"] \arrow[dd, equal, bend right] & & \\ & G_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G_2 \arrow[d] \\ & S \arrow[r, "e_{G_3}"] & G_3 \end{tikzcd}$$

carré cartésien $\Rightarrow \alpha^* \Omega^1_{G_2/G_3} = \Omega^1_{G_1/S}$

$$\Rightarrow e_{G_2}^* \Omega^1_{G_2/G_3} = e_{G_1}^* \Omega^1_{G_1/S} = \omega_{G_1/S}$$

D'où une suite exacte de $\mathcal{O}_S$-modules loc. libres

$$0 \to \omega_{G_3} \to \omega_{G_2} \to \omega_{G_1} \to 0$$

qui induit une suite exacte d'algèbres de Lie en $\mathcal{O}_S$-mod. loc. libres

$$0 \to \operatorname{Lie} G_1 \to \operatorname{Lie} G_2 \to \operatorname{Lie} G_3 \to 0$$

Calcul diff. syntomique.

Th (Illusie): $\forall X/S$ syntomique il existe $\mathbb{L}^\cdot_{X/S} \in \underbrace{\mathbb{D}^{[-1,0]}_{parf}(\mathcal{O}_X)}$

muni d'une augmentation $\mathbb{L}^\cdot_{X/S} \to \Omega^1_{X/S}$ induisant

$$\mathcal{H}^0(\mathbb{L}^\cdot_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{X/S}$$

tel que :

Complexes parfaits d'amplitude $\subset [-1,0]$
i.e. complexes $C^\cdot \in \mathbb{D}^-(\mathcal{O}_X)$ tq. localement/X, $C^\cdot \simeq [\underset{-1}{\mathcal{E}_1} \to \underset{+0}{\mathcal{E}_2}]$
où $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres.

* Si U est un ouvert de X muni d'une immersion régulière dans un

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & Y \arrow[dl, "\text{lisse}"] \\ S & \end{tikzcd}$$

S-schéma lisse Y, $\mathcal{J}$ = idéal de U dans Y alors

$$\mathbb{L}_{X/S}|_U \simeq \Big[\underset{-1}{\mathcal{J}/\mathcal{J}^2} \longrightarrow \underset{0}{i^*\Omega^1_{Y/S}} \Big]$$

* Si
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\text{syntomique}"'] & & Y \arrow[dl, "\text{syntomique}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$
avec f syntomique

il y a un triangle distingué
$$\begin{tikzcd} f^*\mathbb{L}_{Y/S} \arrow[r] & \mathbb{L}_{X/S} \arrow[d] \\ & \mathbb{L}_{X/Y} \arrow[ul, "+1"] \end{tikzcd}$$

* Si
$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\text{syntomique}"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$
$T_0 \hookrightarrow T$ est une immersion fermée définie par un idéal de carré nul $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_T$

Alors l'obstruction à compléter le diagramme

$$\in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{T_0}}\left(f^*\mathbb{L}_{X/S}, \mathcal{I}\right) = H^1\left(T_0, f^*\mathbb{L}^\vee_{X/S} \underset{\mathcal{O}_{T_0}}{\otimes} \mathcal{I}\right)$$

* X/S syntomique est lisse $\iff \mathbb{L}_{X/S} \to \Omega^1_{X/S}$ est un isomorphisme (i.e. $\mathcal{H}^{-1}(\mathbb{L}_{X/S}) = 0$) et $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre de rang fini

Application aux schémas en groupes plats de présentation finie

* Si X est un S-schéma on peut former (Illusie) $\mathbb{L}_{X/S} \in D^-_{qcoh}(X, \mathcal{O}_X)$ qui n'est pas parfait en général. Si de plus X/S est muni d'une action du S-schéma en groupes G on peut former un complexe ~~de~~ cotangent équivariant

$$\mathbb{L}^G_{X/S}$$

dans la catégorie dérivée équivariante qui redonne $\mathbb{L}_{X/S}$ muni de son action de G.

Lorsque $G \curvearrowright \begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ S \end{array}$ est un G-torseur on a donc qu'il existe $\ell_{E/S} \in D^-_{qcoh}(\mathcal{O}_S)$

tel que $\begin{cases} \mathbb{L}^G_{E/S} = \pi^* \ell_{E/S} \\ \text{si } \begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ S \end{array} \text{ possède une section } \begin{array}{c} E \\ \downarrow \uparrow s \\ S \end{array} \text{ alors } \ell_{E/S} = s^* \mathbb{L}_{E/S}. \end{cases}$

* En particulier, si G est un S-schéma en groupes plat de présentation finie

$$\boxed{\begin{aligned} \ell_{G/S} &:= e^*\mathbb{L}_{G/S} \in \mathbb{D}^{[-1,0]}_{parf}(\mathcal{O}_S) \\ \text{et } \mathbb{L}_{G/S} &= \pi^*\ell_{G/S} \quad \text{où } \pi : G \underset{\curvearrowleft e}{\to} S \end{aligned}}$$

Def. $\ell_{G/S}$ = Complexe de G-Lie

$\ell^\vee_{G/S}$ = Complexe de Lie

$$\boxed{H^0(\ell_{G/S}) = \omega_{G/S}} = \text{faisceau cohérent de } \mathcal{O}_S\text{-modules}$$

$$\shortparallel$$

On notera $n_G = H^{-1}(\ell_{G/S})$

* Si $0 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{f} G_3 \to 0$

est une suite exacte de S-schémas en groupes plats de présentation finie, puisque G_2 est un G_1-torseur au dessus de G_3 et G_1/S est syntomique, f est syntomique.

Il y a alors un triangle exact de complexes parfaits associé à

$$\begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G_3 \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f^*\mathbb{L}_{G_3/S} \arrow[r] & \mathbb{L}_{G_2/S} \arrow[dl] \\ \mathbb{L}_{G_2/G_3} \arrow[u, "+1"] & \end{tikzcd}$$

Appliquant $e^*_{G_2}$ on en déduit un triangle dans $\mathbb{D}^{[-1,0]}_{parf}(\mathcal{O}_S)$

$$\boxed{\begin{tikzcd} \ell_{G_3/S} \arrow[r] & \ell_{G_2/S} \arrow[dl] \\ \ell_{G_1/S} = e^*_{G_2}\mathbb{L}_{G_2/G_3} \arrow[u, "+1"] & \end{tikzcd}}$$

même argument que précédemment dans le cas lisse

$$\boxed{\begin{tikzcd} \ell_{G_3} \arrow[r] & \ell_{G_2} \arrow[dl] \\ \ell_{G_1} \arrow[u, "+1"] & \end{tikzcd}}$$

qui induit une suite exacte longue

$$\left[0 \to n_{G_3} \to n_{G_2} \to n_{G_1} \to \omega_{G_3} \to \omega_{G_2} \to \omega_{G_1} \to 0 \right]$$

<u>Rem</u> : * Supposons G/S lisse sur un ouvert schématiquement dense de S.

Alors $\mathcal{H}^{-1}(\ell_{G/S}) = 0$. En effet, localement sur S, $\ell_{G/S} \simeq [\mathcal{E}^{-1} \xrightarrow{u} \mathcal{E}^{0}]$

loc. libres de rg. fini

si $\ker u$ est nul sur un ouvert schématiquement dense il est donc nul.

* Ainsi si $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ est une suite exacte de groupes plats de prés. finie lisses sur un ouvert schématiquement dense il y a une suite exacte

$$0 \to \omega_{G_3} \to \omega_{G_2} \to \omega_{G_1} \to 0$$

* Si S est noethérien la condition précédente se réduit en : $\forall s \in S$ qui est le point générique d'une composante irréductible ou immergée de S, i.e. $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{S,s}) = 0$, G_s est un $k(s)$-schéma en groupes lisse

* Par exemple, si A est un anneau p-adiquement complet sans p-torsion tout S-schéma en groupes plat de présentation finie $/ \mathrm{Spec}(A)$ satisfait la condition précédente.

* On peut définir le rang d'un complexe parfait comme fonction localement constante, $rg\left(\left[\mathcal{E}^{-1} \to \mathcal{E}^{0}\right]\right) = rg(\mathcal{E}^{0}) - rg(\mathcal{E}^{-1})$

loc. libres
de rg. fini

Alors, $\boxed{rg\left(\ell_{G/S}\right) = \dim\left(G/S\right)}$

* Si

$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & G \arrow[d, "\text{plat de prés. finie}"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

$T_0 \hookrightarrow T$ est un ss. défini par un idéal de carré nul $I \subset \mathcal{O}_T$

$T_0 \xrightarrow{u} S$ est le morphisme structural

obstruction à relever $\in H^1\left(T_0, f^*\mathbb{L}^\vee_{G/S} \otimes_{\mathcal{O}_{T_0}} I\right)$

$$\| $$

$$\left[H^1\left(T_0, \underbrace{u^*\ell^\vee_{G/S}}_{\ell^\vee_{G_{T_0}/T_0}} \otimes_{\mathcal{O}_{T_0}} I\right) \right]$$

$$\| $$

$$H^1\left(T_0, \ell^\vee_{G_{T_0}/T_0} \otimes_{\mathcal{O}_{T_0}} I\right)$$

~~Si T_0 est affine~~

Notons $t_G = H^0(\ell_G^\vee)$ et $V_G = H^1(\ell_G^\vee)$

$\| $

$\mathrm{Lie}\, G$

$$\begin{tikzcd} & t_G \\ G \arrow[ur, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ & \nu_G \end{tikzcd}$$

sont covariants et si ~~0~~ $1 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 1$

est exacte alors

$$0 \to t_{G_1} \to t_{G_2} \to t_{G_3} \to \nu_{G_1} \to \nu_{G_2} \to \nu_{G_3} \to 0$$

l'est également.

* Notons $C = \ell^{\vee}_{G_{T_0}/T_0} \otimes_{G_{T_0}} \mathcal{J} \in \mathbb{D}^{[0,1]}_{coh}(G_{T_0})$

Il y a une suite exacte

~~[illegible]~~

$$0 \to H^1(T_0, \mathcal{H}^0(C)) \to H^1(T_0, C) \to H^0(T_0, \mathcal{H}^1(C)) \to H^2(T_0, \mathcal{H}^0(C))$$

~~[illegible]~~ Donc, si T_0 est affine

$$H^1(T_0, C) \xrightarrow{\sim} H^0(T_0, \mathcal{H}^1(C)) = H^0(T_0, u^*\nu_G) \underset{\Gamma(T_0, G_{T_0})}{\otimes} H^0(T_0, \mathcal{J})$$

où $u : T_0 \to S'$

ψ

obstruction que l'on regarde

* De cela on déduit le critère de lissité formelle suivant :

Prop. 1 : Soit $G_1 \to G_2 \to \cdots \to G_i \to \cdots$ un système inductif de S-schémas en groupes plats de présentation finie. Soit $\mathcal{G} = \varinjlim_{i \geq 1} G_i$ comme faisceau fppf. Alors, si $\varinjlim_{i \in \mathbb{N}} \nu_{G_i} = 0$, $\mathcal{G}$ est formellement lisse.

Calcul du Complexe de Co-Lie des schémas en groupes plats finis

* **Théorème** (Raynaud) : Soit G un S-schéma en groupes commutatif plat de présentation finie. Alors, localement sur S il existe un schéma abélien projectif A et un plongement $G \hookrightarrow A$.

Idée de la preuve : Soit $s \in S$, on peut supposer $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$.

Notons $k = k(s)$, $\mathrm{Spec}(k) \to S$.

Il suffit de construire un $\underbrace{G^D\text{-torseur}}_{\text{fppf}}$ $\begin{array}{c} Y \circlearrowleft G^D \\ \downarrow \\ X \end{array}$ où X est une S-courbe projective lisse et $\underbrace{\Gamma(Y_k, \mathcal{O}_{Y_k}) = k}$

garanti par le fait que Y_k = intersection complète de dim >0 globalement dans un $\mathbb{P}^n$.

En effet un tel torseur fournit un morphisme

$$u : G = \underline{\mathrm{Hom}}(G^D, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X/S)$$
$$f \longmapsto \underbrace{Y \overset{G^D \curvearrowright f}{\wedge} \mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m\text{-torseur obtenu par contraction}}$$

Puisque $\mathrm{Pic}(X/S)/\mathrm{Pic}^0(X/S) = \mathbb{Z}$ et G est de torsion (annulé par $|G|$)

$$u : G \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X/S)$$

u mono $\Leftrightarrow$ immersion fermée. Soit $H = \ker u$, un S-schéma en groupes fermé dans $\underset{\substack{\wedge \\ \text{(pas nécessairement plat)}}}{G}$. D'après le lemme de Nakayama, H trivial $\Leftrightarrow$ $H_k = \ker(u_k)$ trivial

$\searrow S = \mathrm{Spec}$ (anneau local)

$$\text{où } u_k : G_k \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_k)$$

$$\begin{array}{c} Y_k \circlearrowleft G_k^D \\ \downarrow \\ X_k \end{array} \quad \text{Par définition de } u_k, \quad \underbrace{Y_k \overset{G_k^D}{\wedge} H_k^D}_{\text{torseur trivial}} \simeq X_k \times H_k^D$$

$$\left(\text{où } H_k \hookrightarrow G_k \text{ induit } G_k^D \twoheadrightarrow H_k^D\right)$$

D'après le théorème de quotient par une relation d'éq. finie et plate de Grothendieck,

$$\Gamma\Big(\underbrace{Y_k \overset{G_k^D}{\wedge} H_k^D}_{(Y_k \times H_k^D)/G_k^D \text{ action diagonale}}, \mathcal{O}\Big) = \Big(\underbrace{\Gamma(Y_k, \mathcal{O}_{Y_k})}_{k \text{ par hypothèse}} \otimes_k \Gamma(H_k^D, \mathcal{O}_{H_k^D})\Big)^{G_k^D}$$

$$= \Gamma(H_k^D, \mathcal{O}_{H_k^D})^{G_k^D} = k$$

Or ceci est égal à $\Gamma(X_k, \mathcal{O}_{X_k}) \otimes_k \Gamma(H_k^D, \mathcal{O}_{H_k^D})$. Donc $\Gamma(H_k^D, \mathcal{O}_{H_k^D}) = k$

$\Rightarrow H_k^D = \{0\} \Rightarrow H_k = \{0\}$. $\square$

* Pour un tel plongement $G \subset \overset{\text{schéma ab. projectif}}{\underset{\sim}{A}}$, $B = A/G$ est un schéma abélien

$$0 \to G \to A \xrightarrow{f} B \to 0 \qquad f = \text{isogénie de noyau } G.$$

$$\ell_G \simeq \big[\underset{-1}{\omega_B} \xrightarrow{f^*} \underset{0}{\omega_A}\big]$$

* <u>Résolution lisse canonique</u> : $\begin{array}{c} G \\ \downarrow \pi \\ S \end{array}$ dun S-schéma en gp. commutatif fini localement libre.

* Résolution canonique de faisceaux fppf

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{Z}[G\times G] \to \mathbb{Z}[G] \to G \to 0 \\ [g_1,g_2] \mapsto [g_1+g_2]-[g_1]-[g_2] \\ \qquad\qquad\qquad [g] \mapsto g \end{array}\right.$$

Où si X = S-schéma, $\mathbb{Z}[X]$ = faisceau fppf de groupes ab. tq. $\forall \mathcal{F}$ = fx fppf de groupe ab.

$$\mathrm{Hom}_{\text{groupe}}(\mathbb{Z}[X], \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X).$$

= faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathbb{Z}[X(U)]$

* Si $f : X \to S$, $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[X], \mathbb{G}_m) = f_* \mathbb{G}_m$. Lorsque f est fini localement libre

$$f_* \mathbb{G}_m = \underbrace{\mathrm{Res}_{X/S}\, \mathbb{G}_m}_{S\text{-schéma en groupes lisse}} \quad \text{restriction des scalaires à la Weil}$$

* Appliquant $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathbb{G}_m)$ à la résolution précédente de G^D et utilisant $G = (G^D)^D$ on obtient une résolution

$$0 \to G \to \mathrm{Res}_{G^D/S'}\, \mathbb{G}_m \to \mathrm{Res}_{G^D \times_S G^D/S'}\, \mathbb{G}_m$$

S-schémas en groupes lisses

Si U est un S-schéma, évaluée sur U il s'agit de la résolution

morphismes de faisceaux d'ensembles i.e. de schémas

$$0 \to \underset{\mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(G^D_U, \mathbb{G}_m)}{\underset{\|}{G(U)}} \to \underbrace{\mathrm{Hom}_U(G^D_U, \mathbb{G}_m)}_{\Gamma(U, G^D_U)^\times} \to \underbrace{\mathrm{Hom}_U(G^D_U \times G^D_U, \mathbb{G}_m)}_{\Gamma(U, G^D_U \times_U G^D_U)^\times}$$

$$f \longmapsto \left[(g_1, g_2) \mapsto f(g_1+g_2) - f(g_1) - f(g_2)\right]$$

* $0 \to G \to G' \to G'' \to 0$ où $G' = \mathrm{Res}_{G^D/S}\, \mathbb{G}_m$ et $G'' = G'/G \hookrightarrow \mathrm{Res}_{G^D \times G^D/S}\, \mathbb{G}_m$

lisses

Alors $\ell_{G/S} \simeq [\underset{-1}{\omega_{G''}} \to \underset{0}{\omega_{G'}}]$ } description globale de $\ell_{G/S}$ sur tout S contrairement à celle de Raynaud qui était locale$/S'$.

Formule de dualité de Grothendieck

Utilisant la résolution précédente + $\underline{Hom}(G,\underline{M}) \simeq Hom_{O_S}(\omega_{G^D}, M)$ + $\mathcal{E}xt^1(G, \mathbb{G}_m) = 0$

on montre (cf. Mazur-Messing, appendice)

Prop (Groth.) : $\tau_{\leq 1} R\underline{Hom}(G, \underline{M}) \simeq RHom_{O_S}(\ell_{G^D}, M)$

dans $D^+_{qcoh}(O_S)$ où M = O_S-module quasi-cohérent

et $\underline{M}$ = faisceau fppf associé.

$$\Longrightarrow \boxed{\tau_{\leq 1} R\underline{Hom}(G, \mathbb{G}_a) \simeq RHom_{O_S}(\ell_{G^D}, O_S) = \ell_{G^D}^\vee}$$

* Si G possède une résolution $0 \to G \to A \to B \to 0$

où A et B sont des schémas abéliens alors,

$$\underline{Hom}(A, \mathbb{G}_a) = 0 \text{ et } \mathcal{E}xt^1(A, \mathbb{G}_a) = Lie(\underbrace{\mathcal{E}xt^1(A, \mathbb{G}_m)}_{A^\vee}) = Lie(A^\vee)$$

schéma abélien dual

$$\Longrightarrow \tau_{\leq 1} R\underline{Hom}(A, \mathbb{G}_a) \simeq Lie(A^\vee)[-1]$$

* Appliquant $\underline{Hom}(-, \mathbb{G}_m)$ à la suite exacte $0 \to G \to A \to B \to 0$ on obtient ($\underline{Hom}(A, \mathbb{G}_m) = \underline{Hom}(B, \mathbb{G}_m) = 0$ et $\mathcal{E}xt^1(G, \mathbb{G}_m) = 0$)

$0 \to G^D \to B^\vee \to A^\vee \to 0$ isogénie duale $\Rightarrow \ell_{G^D} \simeq [\underset{-1}{\omega_{A^\vee}} \to \underset{0}{\omega_{B^\vee}}]$

$\Longrightarrow \tau_{\leq 1} R\underline{Hom}(G, \mathbb{G}_a) \simeq [\underset{0}{Lie\, B^\vee} \to \underset{+1}{Lie(A^\vee)}]$

Cohérent avec la formule précédente