Application de Hodge-Tate

$K|\mathbb{Q}_p$, $v : K \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $\overline{K}$, $v(p)=1$

$G/\mathcal{O}_K$ fini et plat

$$\begin{array}{rcl} \alpha_G : G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) & \longrightarrow & \omega_{G^D}\otimes\mathcal{O}_{\overline{K}} \\ \| & & \\ \mathrm{Hom}(G^D_{\mathcal{O}_{\overline{K}}}, \mathbb{G}_m) & & \\ \Psi & & \\ x & \longmapsto & x^*\frac{dT}{T} \end{array}$$

$$\alpha_G\otimes 1 : G(\mathcal{O}_{\overline{K}})\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \omega_{G^D}\otimes\mathcal{O}_{\overline{K}}$$

$$\boxed{\text{Th: } \mathrm{Coker}(\alpha_G\otimes 1) \text{ est annulé par } p^{\frac{1}{p-1}}.}$$

$\longrightarrow$ résultat de théorie de Hodge p-adique

Application du théorème précédent : $\varepsilon\in v(\overline{K})^*$, $\varepsilon>0$

$$m_{\overline{K},\varepsilon} = \{x\in\mathcal{O}_{\overline{K}} \mid v(x)\geq\varepsilon\}$$

$$\boxed{\mathcal{O}_{\overline{K},\varepsilon} = \mathcal{O}_{\overline{K}}/m_{\overline{K},\varepsilon}}$$

Par exemple, $\mathcal{O}_{\overline{K},1} = \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$

$$\begin{tikzcd} \alpha_{G,\varepsilon} : G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\alpha_{G,\varepsilon}"'] & \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\overline{K}} \arrow[r, two heads] & \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\overline{K},\varepsilon} \end{tikzcd}$$

Prop. $G = H[p]$ où H est un groupe p-divisible$/\mathcal{O}_K$.

Alors, pour $\frac{1}{p-1} < \varepsilon \leq 1$, $\dim_{\mathbb{F}_p} \ker(\alpha_{G,\varepsilon}) \leq d = \dim H$.

$G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = \mathbb{F}_p$-e.v. de dimension $\mathrm{ht}\, H = \mathrm{ht}\, G$.

Utilise le lemme suivant :

Lemme : Soit M un $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module de présentation finie et $N \subset M$ un sous-module de type fini.
Si M peut être engendré par r éléments il en est alors de même pour N.

dem : $\mathcal{O}_{\overline{K}}^r \overset{u}{\twoheadrightarrow} M$, $u^{-1}(N)$ est un sous module de type fini de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^r$

$\Rightarrow \exists (e_1, \ldots, e_r)$ base de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^r$, $\exists a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$
$u^{-1}(N) = \langle a_1 e_1, \ldots, a_r e_r \rangle$

$\square$

Dem de la proposition :

$$\frac{1}{p-1} < \varepsilon \leq 1 \,, \qquad \alpha_{G,\varepsilon} : \underset{\mathbb{F}_p^h}{\overset{}{G(O_{\bar{K}})}} \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes O_{\bar{K},\varepsilon} \simeq O_{\bar{K},\varepsilon}^{h-d}$$

où $h = \mathrm{ht}\, H$, $d = \dim H$ car $\omega_{G^D} \simeq O_{\bar{K},1}^{h-d}$

$$p^{\frac{1}{p-1}} \omega_{G^D} \otimes O_{\bar{K},\varepsilon} \subset \mathrm{Im}(\alpha_{G,\varepsilon} \otimes 1) = O_{\bar{K},\varepsilon} \cdot \mathrm{Im}(\alpha_{G,\varepsilon})$$

$$p^{\frac{1}{p-1}} \omega_{G^D} \otimes O_{\bar{K},\varepsilon} \simeq \left(O_{\bar{K},\, \varepsilon - \frac{1}{p-1}}\right)^{h-d}$$

← ne peut pas être engendré par strictement moins de $h-d$ éléments comme $O_{\bar{K}}$-module

Lemme précédent $\Rightarrow$ $O_{\bar{K}} \cdot \mathrm{Im}(\alpha_{G,\varepsilon})$ n'est pas engendré par strictement moins de $h-d$ éléments

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{F}_p}(\mathrm{Im}\, \alpha_{G,\varepsilon}) \geq h-d$

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{F}_p}(\ker \alpha_{G,\varepsilon}) \leq d.$

$\square$

Une application du théorème d'approximation d'Elkik

Notation: $M = \mathcal{O}_{\overline{K}}$-module de présentation finie de torsion.

$$\deg(M) = \sum_{i \in I} v(a_i) \quad \text{si } M \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{\overline{K}} / a_i \mathcal{O}_{\overline{K}}$$

deg = fonction additive sur les $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-mod. de prés. finie de torsion.

Par exemple, $\deg(G) = \deg(\omega_G)$.

On note $M_\varepsilon = M \otimes \mathcal{O}_{\overline{K},\varepsilon}$

Prop. $M = \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ - module libre de rang n muni d'un morphisme $\psi : M \longrightarrow M^{(p)}$ ~~sat~~ satisfaisant

$$w := \deg(\mathrm{Coker}\, \psi) < \frac{1}{2}.$$

Soit $N = \{x \in M \mid \psi(x) = x \otimes 1\} \subset M$
$\quad$ sous $\mathbb{F}_p$-e.v.

Alors : 1) Soit $V = \mathrm{Im}(N \longrightarrow M_{1-w})$. On a $\dim_{\mathbb{F}_p} V = n$

et $\forall \varepsilon$ vérifiant $\frac{w}{p-1} < \varepsilon \leq 1-w$, $V \xhookrightarrow{\text{injecte}} M_\varepsilon$

2) Si $v_1, \ldots, v_n$ = base de V, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{O}_K^n$ sont tels que

$$\sum_i \lambda_i v_i \text{ dans } M_\varepsilon \text{ pour } \underbrace{\frac{w}{p-1}}_{\boxed{\text{un } \varepsilon \text{ quelconque}}} < \varepsilon \leq 1-w$$

Alors, $\forall i$, $v(\lambda_i) > 0$

3) $\forall \varepsilon$, $\frac{w}{p-1} < \varepsilon \leq 1-w$ on a $\deg\left(M_\varepsilon / \mathcal{O}_{\overline{K}} \cdot \mathrm{Im}(V \to M_\varepsilon)\right) = \frac{w}{p-1}$

$\rightarrow$ Si $w=0$ il s'agit du lemme de Hensel ((M,ψ) = cristal unité)

Construction du sous-groupe canonique $\boxed{p \neq 2.}$

Prop. $G = H[p]$, H groupe p-divisible de dimension d sur O_K tel que

$$w := Ha(H) < \frac{1}{2}$$

Alors, pour $\frac{w}{p-1} < \varepsilon \leq 1-w$ on a

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \ker(\alpha_{G,\varepsilon}) = d$$

dem. * Proposition précédente (n'utilise pas $Ha(H)$)

$$+ \quad 1-w > \frac{1}{p-1} \Rightarrow \dim_{\mathbb{F}_p}(\ker \alpha_{G,1-w}) \leq d$$

$$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Im}(\alpha_{G,1-w}) \geq h-d$$

* $\psi_G : \omega_{G^D} \to \omega_{G^D}^{(p)}$

$$\mathrm{Im}(\alpha_G) \subset \{k \in \omega_{G^D} \mid \psi_G(k) = k \otimes 1\}$$

* $M = \omega_{G^D} \supset N = \{k \mid \psi_G(k) = k \otimes 1\}$

$\mathrm{Im}(N \to M_{1-w}) = \mathbb{F}_p$-e.v. de dimension $h-d$ (Prop. précédente)

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Im}(\alpha_{G,1-w}) \leq h-d$$

* Donc, $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Im}(\alpha_{G,1-w}) = h-d$

* De plus, d'après la prop. précédente, $\frac{w}{p-1} < \varepsilon \leq 1-w \Rightarrow \mathrm{Im}(N \to M_{1-w}) \xhookrightarrow{\text{injecte}} M_\varepsilon$

Donc, $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Im}(\alpha_{G,\varepsilon}) = \dim_{\mathbb{F}_p}(\alpha_{G,1-w}) = h-d$ $\square$

<u>Déf</u>: Pour $w = Ha(H) < \frac{1}{2}$ on note $C \subset G$ l'adhérence schématique de $\ker(\alpha_{G,1-w})$. C = sous-groupe canonique.

$ht\, C = d$.

<u>Calcul de $\deg(G/C)$</u>

$\boxed{\underline{\text{Th}}: \deg(G/C) = w}$ (lorsque $w = Ha(H) < \frac{1}{2}$) $(p \neq 2,3)$

Tout d'abord :

<u>Prop</u>: Soit M un $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-module de présentation finie muni d'une filtration croissante

$$0 = \mathrm{Fil}_0 M \subsetneq \mathrm{Fil}_1 M \subsetneq \dots \subsetneq \mathrm{Fil}_n M = M$$

dont les gradués sont monogènes. Supposons donné une collection d'éléments $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de M t.q. $x_i \in \mathrm{Fil}_i M$ et vérifiant pour $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i, v(\lambda_i) > 0$$

Alors, pour $1 \leq i \leq n$ l'image de x_i dans $\mathrm{Fil}_i M / \mathrm{Fil}_{i-1} M$ est non nulle et

$$\deg\left(M / \sum_{i=1}^{n} O_K . x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \deg\left((\mathrm{Fil}_i M / \mathrm{Fil}_{i-1} M) / O_K . \bar{x}_i\right)$$

<u>démo du théorème</u>: On peut, quitte à remplacer K par $\widehat{\bar{K}}$, supposer que $K = \bar{K}$.

C = sous-groupe canonique. $C(O_{\bar{K}}) = \ker(\alpha_G, \varepsilon)$ pour $\frac{w}{p-1} < \varepsilon \leq 1-w$.

$E = G/C$

* Il y a une suite exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C(O_K) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_C"] & G(O_K) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_G"] & E(O_K) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega_{C^D} \arrow[r] & \omega_{G^D} \arrow[r] & \omega_{E^D} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\omega_{G^D} \simeq (O_K / p O_K)^{h-d}$$

$$C \subset \ker(\alpha_G, 1-w) \Rightarrow m_{K,w} . \mathrm{Im}(\alpha_C \otimes 1) = 0$$

$$\Downarrow \longleftarrow p^{\frac{1}{p-1}} . \mathrm{Coker}(\alpha_C \otimes 1) = 0$$

$$\boxed{m_{K, w+\frac{1}{p-1}} . \omega_{C^D} = 0}$$

* Soit maintenant ε tel que $\frac{w}{p-1} < \varepsilon \leq 1-w$ et $\varepsilon \leq 1 - \frac{1}{p-1} - w$ (possible car $p \neq 2,3$)

La projection $\omega_{G^D} \twoheadrightarrow \omega_{E^D}$ induit un isomorphisme

$$\omega_{G^D,\varepsilon} \xrightarrow{\sim} \omega_{E^D,\varepsilon}$$

* Soit $(e_1, \dots, e_{h-d})$ une base du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $E(O_K)$.
Notons $E_i \subset E$ l'adhérence schématique de $\langle e_1, \dots, e_i \rangle$. On a donc une filtration $(0) = E_0 \subsetneq \dots \subsetneq E_{h-d} = E$

dont les gradués sont des schémas en groupes de Oort-Tate i.e. de hauteur 1.
Elle induit une filtration

$$0 = \omega_{E_0^D} \subset \dots \subset \omega_{E_{h-d}^D} = \omega_{E^D}$$

telle que $\quad \omega_{E_i^D} / \omega_{E_{i-1}^D} = \omega_{(E_i/E_{i-1})^D} =$ O_K-module monogène car $ht(E_i/E_{i-1}) = 1$

Posons $(\mathrm{Fil}_i\, \omega_{E^D,\varepsilon})_{0 \le i \le h-d}$ la filtration image de $\omega_{E^D,\varepsilon}$.

$$\mathrm{Fil}_i\, \omega_{E^D,\varepsilon} = \mathrm{Im}\left(\omega_{E_i^D,\varepsilon} \longrightarrow \omega_{E^D,\varepsilon} \right).$$

Pour $1 \leq i \leq h-d$ il y a une surjection

$$q_i : \omega_{(E_i/E_{i-1})^D, \varepsilon} \twoheadrightarrow \mathrm{Fil}_i\, \omega_{E^D, \varepsilon} / \mathrm{Fil}_{i-1}\, \omega_{E^D, \varepsilon}$$

* Point (2) de la proposition utilisant le théorème d'approximation d'Elkik

$\Rightarrow$ si $x_i = \alpha_{E,\varepsilon}(e_i)$ alors $\sum_i \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i, v(\lambda_i) > 0$

De plus, $x_i \in \mathrm{Fil}_i\, \omega_{E^D, \varepsilon}$.

La proposition précédent le théorème implique donc que

$$0 \neq \overline{x_i} \in \mathrm{Fil}_i\, \omega_{E^D, \varepsilon} / \mathrm{Fil}_{i-1}\, \omega_{E^D, \varepsilon}$$

* Or, $\overline{x_i} = q_i\left(\alpha_{E_i/E_{i-1}, \varepsilon}(\overline{e_i})\right)$ où $\overline{e_i} \in (E_i/E_{i-1})(\mathcal{O}_K) = \mathbb{F}_p \cdot \overline{e_i}$

Donc, $\alpha_{E_i/E_{i-1}, \varepsilon}(\overline{e_i}) \neq 0 \Longrightarrow \deg\left(\omega_{(E_i/E_{i-1})^D, \varepsilon} / \mathcal{O}_K \cdot \alpha_{E_i/E_{i-1}, \varepsilon}(\overline{e_i})\right)$

Calcul explicite sur les schémas en groupes de Oort-Tate

$$= \frac{\deg E_i/E_{i-1}}{p-1}$$

Mais puisque q_i est surjective entre modules monogènes et $q_i\left(\alpha_{E_i/E_{i-1}, \varepsilon}(\overline{e_i})\right) \neq 0$

On a

$$\deg\left(\left(\mathrm{Fil}_i / \mathrm{Fil}_{i-1}\right) \Big/ O_K \cdot \bar{x}_i\right) = \deg\left(\omega_{E_i/E_{i-1}, 1, \varepsilon}^{D} \Big/ O_K \cdot \alpha_{E_i/E_{i-1}, \varepsilon}(\bar{e}_i)\right)$$

$$= \frac{\deg\left(E_i / E_{i-1}\right)}{p-1}$$

* Maintenant, d'après le point (3) de la prop. utilisant Elkik,

$$\deg\left(\omega_{E^D, 1, \varepsilon} \Big/ \sum_{i=1}^{h-d} O_K \cdot x_i\right) = \frac{w}{p-1}$$

$\Vert$ ⟵ Proposition précédent le théorème.

$$\sum_{i=1}^{h-d} \deg\left(\left(\mathrm{Fil}_i / \mathrm{Fil}_{i-1}\right) \Big/ O_K \cdot \bar{x}_i\right) = \sum_i \frac{\deg\left(E_i / E_{i-1}\right)}{p-1}$$

$$= \frac{\deg E}{p-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\deg E = w} \qquad \square$$

Résumé de ce que l'on a démontré :

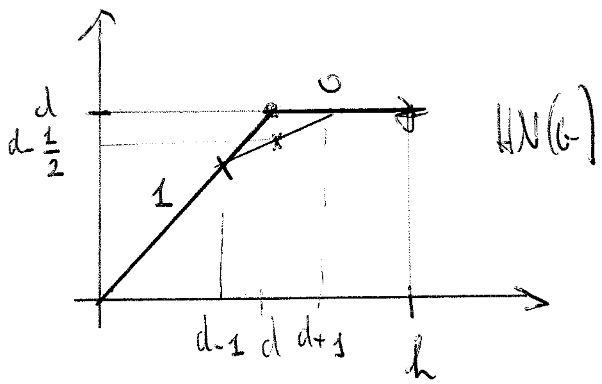
H groupe p-div. $/O_K$ - $G = H[p]$. $w = Ha(H)$. $\boxed{p \neq 2,3}$

Si $\boxed{w < \frac{1}{2}}$ alors pour $\boxed{\frac{w}{p-1} < \varepsilon \leq 1-w}$, $\dim_{\mathbb{F}_p} \ker(\alpha_{G,\varepsilon}) = d$

et si C = adhérence schématique de $\ker(\alpha_{G,\varepsilon})$ alors $\deg(G/C) = w$.

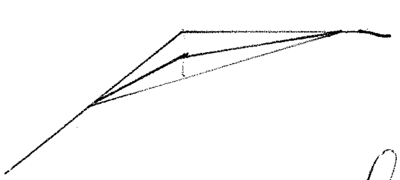
Théorème : C est un membre de la filtration de H.N. de G.

dém :



$HN(G) \leq Hdg(G)$ = polygone de pentes 1 et 0 avec m̂ pt. terminal que $HN(G)$.

$\deg(G/C) = w < \frac{1}{2} \Rightarrow$ automatiquement $HN(G)$ a un point de rupture en l'abscisse d.



Soit alors C' le ~~en~~ membre de la filtration de H.N de G de hauteur d.

Il faut montrer que $C' = C$.

On a $\deg(C') \geq \deg(C) \Rightarrow \deg(G/C') \leq \deg(G/C) = w$

$\deg(G/C') = \deg(\omega_{C'^D}) \leq w \Rightarrow \omega_{C'^D}$ est annulé par $m_{K,w}$

$\Rightarrow$ l'application composée $C'(O_{\bar{K}}) \xrightarrow{\alpha_{C'}} \omega_{C'^D} \otimes O_{\bar{K}} \hookrightarrow \omega_{G^D} \otimes O_{\bar{K}}$

$\downarrow$

$\omega_{G^D} \otimes O_{\bar{K},1-w}$

est nulle $\Rightarrow C'(O_{\bar{K}}) \subset \underbrace{\ker(\alpha_{G,1-w})}_{C(O_{\bar{K}})}$

$\Rightarrow C' = C$ $\square$

même hauteur.

$$\boxed{\underline{\text{Th}}.\quad C \otimes_{O_K} O_{K,1-w} = \ker F_{G \otimes O_{K,1-w}}}$$

$\underline{\text{dem}}$. Si $G_0 = G \otimes O_K / p O_K$ on a une suite exacte

$$0 \to \ker F_{G_0} \to G_0 \xrightarrow{\alpha_{G_0}} \omega_{G^D} \xrightarrow{F - \Psi_G} \omega_{G^D} \to 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker F \arrow[r] & G\otimes \mathcal{O}_{K,1-w} \arrow[r, "\alpha"] & \omega_{G^D}\otimes \mathcal{O}_{K,1-w} \\
& & C\otimes \mathcal{O}_{K,1-w} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\alpha"] & \omega_{C^D}\otimes \mathcal{O}_{K,1-w} \arrow[u, "="']
\end{tikzcd}$$

Car $\deg(G/C) = \deg(\omega_{C^D})$
$= w$

$\Downarrow$

ω_{C^D} est annulé par $m_{K,w}$

$\Rightarrow C\otimes \mathcal{O}_{K,1-w} \subset \ker F \Rightarrow$ égalité car ils ont m hauteur.

Le cas des points de p^n-torsion

Variation de l'invariant de Hasse sous l'isogénie canonique

Prop: $H/\mathcal{O}_K$ groupe p-divisible tel que $Ha(H) < \frac{1}{p+1}$ $\left(\Rightarrow Ha(H) < \frac{1}{2}\right)$

Soit $C \subset H[p]$ le sous-groupe canonique construit précédemment. Alors,

$$Ha(H/C) = p\, Ha(H).$$

dém : ~~...~~ Si S = schéma de car. p et H_0 groupe p-div$/S$

$$\psi_{H_0} : \omega_{H_0^D} \to \omega_{H_0^D}^{(p)} \text{ induit par Frob.}$$

$$\leadsto \det \psi_{H_0} \in \Gamma\left(S, \left(\det \omega_{H_0^D}\right)^{\otimes(p-1)}\right) \text{ invariant de Hasse.}$$

Si $H_1 = H_0 / \ker F_{H_0} = H_0^{(p)}$

$$\det \psi_{H_1} \in \Gamma\Big(S, \big(\underbrace{\det \omega_{H_1^D}}_{(\det \omega_{H_0^D})^{\otimes p}}\big)^{\otimes(p-1)}\Big) = \Gamma\left(S, \left(\det H_0^D\right)^{\otimes(p-1)p}\right)$$

Alors, $\det \psi_{H_1} = \left(\det \psi_{H_0}\right)^{\otimes p}$.

$*$ On sait que $C \otimes \mathcal{O}_{K, 1-w} = \ker(\mathrm{Frob})$. Donc, d'après le raisonnement précédent, où $w = Ha(H)$

$$\inf\{1-w, Ha(H/C)\} = \inf\{1-w, p\, Ha(H)\}$$

$$w < \frac{1}{p+1} \Rightarrow 1-w > pw \Rightarrow \qquad \square$$

Le sous-groupe canonique en niveau quelconque

Un critère de liberté – $H/\mathcal{O}_K$ groupe p-div. $n \geq 1$. $d = \dim H$. $K = \widehat{K}$.

Prop: $G = H[p^n]$. $C \subset G$ un sous-groupe plat fini de hauteur nd. Supposons que $\deg(C) > nd - 1$. Alors, $C(\mathcal{O}_K)$ est un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module libre de rang d.

$\Updownarrow$
$\deg(G/C) < 1$.

Lemme: M un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module de longueur nd. Alors, si $1 \leq b < n$ on a $\lg(p^b M) \leq (n-b)d$. De plus, M est libre ssi les inégalités précédentes sont des égalités pour tout b vérifiant $1 \leq b < n$.

dém de la proposition: $1 \leq b < n$. E = adhérence schématique dans G de $C(\mathcal{O}_K)[p^b]$ et F celle de $p^b C(\mathcal{O}_K)$. Il y a une suite de groupes plats finis

$$0 \to E \to C \xrightarrow{\times p^b} F \to 0$$

qui est exacte en fibre générique

$$\Rightarrow \deg(C) \leq \deg E + \deg F$$

$$\begin{cases} E \subset G[p^b] \Rightarrow \deg E \leq \deg G[p^b] = bd \\ \deg F \leq \operatorname{ht} F \end{cases}$$

Donc, $nd-1 < \deg C \leq bd + \mathrm{ht} F$

$\Rightarrow \mathrm{ht} F > (n-b)d - 1$

$\Rightarrow \mathrm{ht} F = (n-b)d$ $\square$

d'après le lemme précédent.

~~Sur l'application de H.T. des points de p^n-torsion~~

~~* Prop: $G = H[p^n]$. $d = \dim H$. Alors, pour $0 \leq \varepsilon < 1 - \frac{1}{p-1}$)~~
~~$\ker(\alpha_{G, n-\varepsilon})$ est engendré par moins de d éléments.~~

~~* Prop:~~

Théo: $G = H[p^n]$. $h = \mathrm{ht} H$. $d = \dim H$. $K = \widehat{K}$

$$w := \mathrm{Ha}(H) < \frac{1}{2p^{n-1}}$$

1) La filtration de H.N. de G possède un cran C tel que $C(O_K)$ soit un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module libre de rang d

2) La formule suivante est vérifiée : $\deg(G/C) = \frac{p^n - 1}{p-1} \mathrm{Ha}(G)$

3) Pour $1 \leq b < n$ si C_b = adhérence schématique de $C(O_K)[p^b]$ dans G, C_b est le cran de hauteur bd

de la filtration de H.N. de $G[p^b]$

4) $1 \leq b < n$ $\quad Ha(H/C_b) = p^b\, Ha(H)$

et C/C_b est le cran de hauteur $(n-b)$ de la filtration de H.N. de $(H/C_b)[p^{n-b}]$

5) $C(G_K) = \ker\left(\alpha_{G,n - \frac{p^n - 1}{p-1} Ha(H)}\right)$

<u>dem.</u> Par récurrence sur n. $D \subset H[p]$ le sous-groupe canonique

$$Ha(H/D) = p\, Ha(H) < \frac{1}{2p^{n-2}}$$

$\Rightarrow$ on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à H/D

$\Rightarrow \exists\, C \subset H[p^n]$ tq. $D \subset C$ et C/D = le gp. canonique de $(H/D)[p^{n-1}]$

+ il faut travailler $\rightarrow$ cf. article.