

La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats

Cours n°5

1

Discriminant et Différente

Notation: Serre "Corps locaux" chapitre III

K Corps valué complet de valuation discrète
 L/K séparable de degré fini telle que k_L/k_K soit séparable.
 $\nwarrow \nearrow$
Corps résiduels

Alors, $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K$ -algèbre homogène
 $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[T]/(f(T))$ où f est unitaire] les particular d'algèbre symétrique finie
génériquement étale

* De plus, $\Omega_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^1 = \mathcal{O}_K[T]/(f'(T))$. dT est un \mathcal{O}_L -module homogène de torsion

Notons $\Delta_{L/K} = \text{Ann}_{\mathcal{O}_L}(\Omega_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^1)$, $\Omega_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^1 \cong \mathcal{O}_L/\Delta_{L/K}$
Idéal discriminant

* Soit $\mathcal{D}_{L/K}^{-1} = \{x \in \mathcal{O}_L / \forall y \in \mathcal{O}_L, \text{tr}_{L/K}(xy) \in \mathcal{O}_K\}$ la codifférente
Idéal fractionnaire de \mathcal{O}_L

et $\mathcal{D}_{L/K}$ son inverse, la différentielle.

Alors, $\boxed{\mathcal{D}_{L/K} = \Delta_{L/K}}$

Question: y-a-t-il un tel type d'énoncé plus généralement pour des algèbres symétriques finies génériquement étales?

Ex: * Si b_L/b_K n'est plus séparable, O_L n'est pas nécessairement une O_K -algèbre monogène mais est tout de même synthétique génériquement étale

($f: X \rightarrow Y$ morphisme plat de type fini de schémas réguliers)
 \Downarrow
 f synthétique

* Par exemple, si S est un trait $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme fini de S -schémas plats de type fini, $f_h: X_h \rightarrow Y_h$ est étale, X et Y sont normaux, X_S et Y_S intègres et $f_S: X_S \rightarrow Y_S$ dominant alors

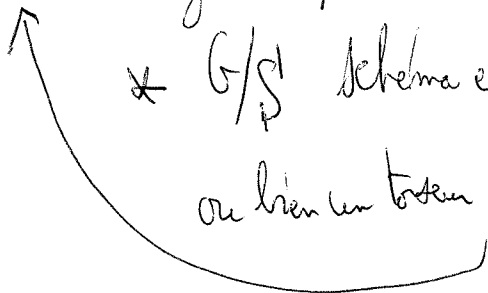
$$\underbrace{O_{Y,S}}_{O_K} \hookrightarrow \underbrace{O_{X,S}}_{O_L}$$

est une extension de ce type précédent. L'extension de O_K s réductuels n'est pas séparable si $f_S: X_S \rightarrow Y_S$ n'est pas génériquement étale.

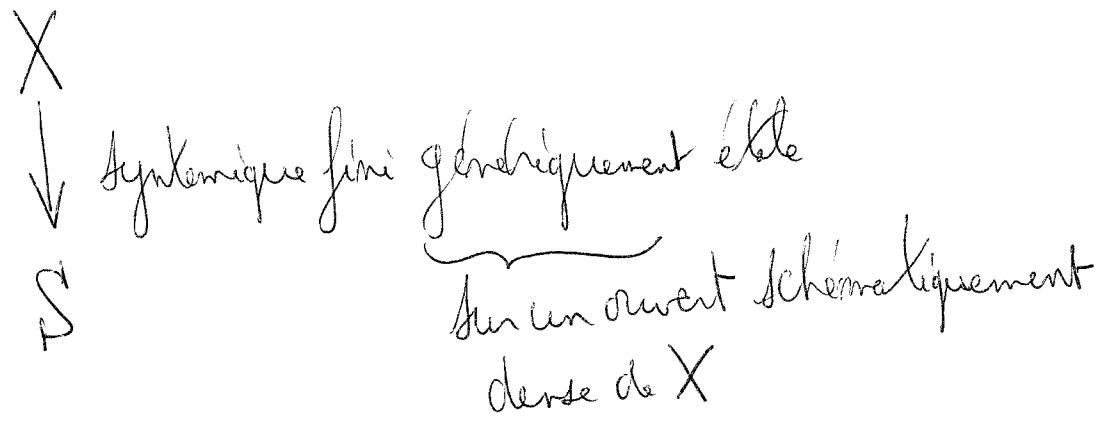
* Par exemple, si $f: A \rightarrow B$ est une \mathbb{Z} -généralisation de schémas abéliens / S ^{trait} génériquement étale mais éventuellement ramifiée en fibre spéciale

* G/S schéma en groupes plat fini génériquement étale
 ou bien un totem sous un tel schéma en groupes

O_L/O_K
 est un totem



Discriminant



En particulier, X/S est fini localement libre.

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{X/S} \in \mathbb{D}_{\text{perf}}^{[-2,0]}(\mathcal{O}_X), \text{rg}(\mathbb{L}_{X/S}) = 0$$

X/S g\u00e9n\u00e9riquement \u00e9tale $\Rightarrow \mathcal{H}^{-1}(\mathbb{L}_{X/S}) = 0$ et $\mathbb{L}_{X/S}$ est g\u00e9n\u00e9riquement acyclique.

* Diviseurs de Cartier effectifs sur X :

$\text{Div}^+(X) = \{(\mathcal{L}, s)\} / \sim$ o\u00f9 \mathcal{L} fibre en droites/ X
 $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ induit une k\u00e9r\u00e9lisation g\u00e9n\u00e9rique de \mathcal{L}
 sur un ouvert sch\u00e9matiquement dense

On a \u00e9galement $\text{Div}^+(X) = \{ \text{Sous-} \mathcal{L} \subset \mathcal{O}_X \text{ localement libres de rang } 1 \}$

$$(\mathcal{L}, s) \longmapsto \text{id\u00e9al } \mathcal{I}_s(\mathcal{L}^{\vee} \xrightarrow{s^{\vee}} \mathcal{O}_X) \text{ o\u00f9 } s: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{I}^{\vee}, \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^{\vee}) & \longleftarrow & \mathcal{I} \\
 \uparrow \text{induit par } \mathcal{L} \subset \mathcal{O}_X & &
 \end{array}$$

* Knudsen-Mumford

sur ouvert sch. dense



Si $\mathcal{E}^\bullet =$ Complexe parfait de rang nul généralement acyclique, on peut lui associer un diviseur de Cartier $\text{Div}(\mathcal{E}^\bullet)$ de fibres en droites sous-jacent $\det(\mathcal{E}^\bullet) = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} (\det \mathcal{E}^i)^{\otimes (-1)^i}$

* Abs, $\text{Div}(\underline{\mathbb{L}}_{X/S})$ se décrit de la façon suivante:

$$\text{localement } / X, \text{ si } \underline{\mathbb{L}}_{X/S} \simeq \left[\begin{array}{c} \mathcal{E}^{-1} \xrightarrow{u} \mathcal{E}^0 \end{array} \right]$$

\mathcal{O}_X -modules loc. libres de rg. fini, $\text{rg } \mathcal{E}^0 = \text{rg } \mathcal{E}^{-1}$

$$\text{Div}(\underline{\mathbb{L}}_{X/S}) = \left(\det \mathcal{E}^0 \otimes (\det \mathcal{E}^{-1})^\vee, \mathcal{S} \right)$$

$$\text{où } \det(\mathcal{E}^{-1}) \xrightarrow{\det u} \det(\mathcal{E}^0)$$

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathcal{S}} \det(\mathcal{E}^{-1})^\vee \otimes \det(\mathcal{E}^0)$$

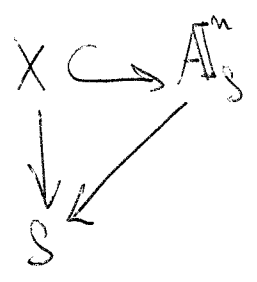
Du point de vue des idéaux inversibles de \mathcal{O}_X ,

$$\text{Div}(\underline{\mathbb{L}}_{X/S}) = \text{Filt}_0(\Omega_{X/S}^1)$$

$$\text{Def: } \Delta_{X/S} = \text{Div}(\underline{\mathbb{L}}_{X/S}) \in \text{Div}^+(X)$$

$\text{supp}(\Delta_{X/S}) =$ Complémentaire du plus grand ouvert de X sur lequel X/S est étale.

* localement, localement/ X , si $S = \text{Spec}(A)$,



$x \in X$ et U est un voisinage de x tel que $X \cap U \hookrightarrow U$ soit défini par la suite régulière $f_1, \dots, f_m \in \Gamma(U, \mathbb{A}_S^m)$

$\Delta_{X/S}$ est localement engendré au voisinage de x par $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m}$
↑ coordonnées sur \mathbb{A}_S^m

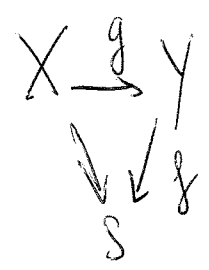
* Si X est intègre noethérien et normal, le diviseur de Weil associé à $\Delta_{X/S}$ est

$$\sum_{\substack{x \in X \\ \dim \mathcal{O}_{X,x} = 1}} m_x [\overline{\{x\}}] \quad \text{où si } \Omega_{X/S, x}^1 \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X,x} / \pi_x^{a_i} \mathcal{O}_{X,x}$$

($\pi_x =$ uniformisante en x)

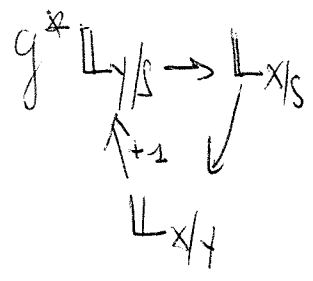
alors $m_x = \sum_{i \in I} a_i$

Formule de transitivité.



f et g symétriques finis géométriquement étales

→ triangle



$$\Rightarrow \Delta_{X/S} = g^* \Delta_{Y/S} + \Delta_{X/Y}$$

dans $\text{Div}^+(X)$.

Differentielle: A anneau muni d'un élément régulier $t \in A$

\Downarrow
 $D(t) \subset \text{Spec}(A)$ est
schématiquement dense.

$B = A$ -algèbre systématique finie, étale en dehors de $V(t)$.

Forme quadratique sur le A -module projectif B

$$\begin{aligned} \text{tr}: B \times B &\rightarrow A \\ (b_1, b_2) &\mapsto \text{tr}_{B/A}(b_1 b_2). \end{aligned}$$

Après inversion de t cette forme quadratique induit une dualité parfaite.

Def. On note $D_{B/A}^{-1} = \left\{ b \in B \left[\frac{1}{t} \right] \mid \text{tr}_{B/A}(bB) \subset A \right\}$, la G -différente.

L'indice $\langle -1 \rangle$ n'est pour l'instant qu'une notation (bien qu'on va voir qu'il a en fait une signification plus précise).

Prop. La G -différente $D_{B/A}^{-1}$ est un idéal fractionnaire inversible d'univers $D_{B/A}$. De plus $D_{B/A} = \Delta_{B/A}$.

dem. $X = \text{Spec}(B)$

$\downarrow \pi$

$S = \text{Spec}(A)$

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \pi \\ S \end{array}$$
 symplectique projectif \Rightarrow On a une bonne dualité de Grothendieck pour les faisceaux cohérents.

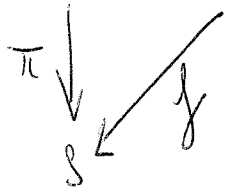
\nearrow plôt de présentation finie à fibres Gorenstein

* Plus précisément, si $\omega = \det(\Omega_{X/S}) =$ fibré en droites sur X

$\forall \mathcal{E}$ faisceau cohérent sur X , $\forall \mathcal{F}$ faisceau cohérent sur S

$$\left[\begin{array}{l} R\Gamma_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}}(R\pi_* \mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq R\pi_* R\Gamma_{\text{Hom}}(\mathcal{E}, \pi^* \mathcal{F}) \\ \text{ou } \pi^* \mathcal{F} = \pi^* \mathcal{F} \otimes \omega[d] \quad \text{avec } d = \dim(X/S) \end{array} \right]$$

En effet, si $X \xrightarrow{i} Y$ avec f projectif et lisse (par exemple $Y = \mathbb{P}_S^n$)



- f projectif et lisse $\Rightarrow f^* \mathcal{F} = f^* \mathcal{F} \otimes \omega_{Y/S}[\dim(Y/S)]$

où $\omega_{Y/S} = \det(\Omega_{Y/S}^1)$ est le fibré canonique

- i immersion régulière

$$\Rightarrow Ri^* \mathcal{G} \simeq i^* \mathcal{G} \otimes \underbrace{\det(Y/S^2)}_{\det(\text{fibré normal à } i)} \otimes \underbrace{\det(Y/S^2)^{\vee}}_{\text{rg } \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{I}_{Y/S^2}} \quad [-\text{codim}_S(X/Y)]$$

$$\pi^! = Ri^! \circ f^! \Rightarrow \pi^!(-) = \pi^*(-) \otimes i^*(\det \Omega_{Y/S}^1) \otimes \det(Y/S^2)^{\vee} \quad [\dim X/S]$$

$$\text{or, } \Omega_{X/S} \simeq \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S & \xrightarrow{\quad} & i^* \Omega_{Y/S}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_S & \xrightarrow{-1} & \mathcal{O}_S \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \det \Omega_{X/S} \simeq (\det Y/S^2)^{\vee} \otimes \det(i^* \Omega_{Y/S}^1)$$

* Dans notre cas, π fini \Rightarrow on a

$$\boxed{R\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\pi_* \mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq \pi_* R\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes \omega)}$$

$$\Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S) \simeq \pi_* \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \omega) = \pi_* \omega$$

Il y a une application d'adjonction $t_{\pi}: \pi_* \omega \rightarrow \mathcal{O}_S$ telle que:

$$\underbrace{\quad}_{\pi_* \pi^* \mathcal{O}_S} \uparrow_{\mathcal{O}_S\text{-linéaire}}$$

[- L'isomorphisme $\pi_* \omega \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S)$
est donné par $x \mapsto [s \mapsto t_{\pi}(sx)]$]

$\pi_* \omega$ est un $\pi_* \mathcal{O}_X$ -module

[- Notons $\Delta_{X/S}: \mathcal{O}_X \rightarrow \omega$ la section définissant le div. de Cartier $\Delta_{X/S}$. Alors, la composée

$$\pi_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{\pi_* \Delta_{X/S}} \pi_* \omega \xrightarrow{t_{\pi}} \mathcal{O}_S$$

est $t_{X/S}$

où $t_{X/S}: \pi_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_S$ est donné par le fait que $\pi_* \mathcal{O}_X$ est une \mathcal{O}_S -algèbre fini localement libre.

Se déduit de
la plé (R6) p. 198
de Karstson
"Residues and duality"

Traduit concrètement dans notre cas, cela donne:

il y a un morphisme A -linéaire $\Delta_{B/A}^{-1} \xrightarrow{t_{\pi}} A$
tel que la composée $B \hookrightarrow \Delta_{B/A}^{-1} \xrightarrow{t_{\pi}} A$ soit $t_{B/A}$

$$\underbrace{\quad}_{t_{B/A}}$$

et $\Delta_{B/A}^{-1} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(B, A)$
 $x \mapsto [x \mapsto \text{tr}_\pi(x)]$

Donc, $\text{tr}_{B[\frac{1}{F}]/A[\frac{1}{F}]}(\Delta_{B/A}^{-1}) \subset A$

et l'accouplement $\Delta_{B/A}^{-1} \times B \rightarrow A$ est parfait
 $(x, b) \mapsto \text{tr}_{B[\frac{1}{F}]/A[\frac{1}{F}]}(bx)$ □

Le diviseur de Cartier associe à un schéma en groupes fini et plat généralement étale

- S schéma
- $\mathcal{C} =$ catégorie des S -schémas en groupes finis localement libres (commutatifs) généralement étales.
 sur un ouvert schématiquement dense

• $\mathcal{C} =$ catégorie exacte.

Def: Soit $G \in \mathcal{C}$ on note $S_G = \text{Div}(G) \in \text{Div}^+(S)$
↑
 complexe parfait de rang nul généralement acyclique
monoïde des diviseurs de Cartier effectifs

De point de vue des idéaux inversibles de G_S ,

$$S_G = \text{Fitt}_0 \omega_G$$

* Remarquons que l'on a l'égalité de diviseurs $\Delta_{G/S} = \pi^* \delta_G$ où $\pi: G \rightarrow S$

* Lemme: La "fonction" $\mathcal{L} \rightarrow \text{Div}^+(G)$ est additive
 $G \mapsto \delta_G$

dem: Si $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ est exacte \rightsquigarrow triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{G''} & \rightarrow & \mathcal{L}_G \\ \uparrow +1 & & \downarrow \\ & \mathcal{L}_{G'} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Div}(\mathcal{L}_G) = \text{Div}(\mathcal{L}_{G'}) + \text{Div}(\mathcal{L}_{G''})$$

* On peut également le voir en disant que'il y a une suite exacte

$$0 \rightarrow \omega_{G''} \rightarrow \omega_G \rightarrow \omega_{G'} \rightarrow 0$$

et que $\pi_! \rightarrow \text{Fitt}_0$ est additif

□

* Si $S = \text{Spec}(K)$, $K = \text{corps}$ valés pour $v: K \xrightarrow{\text{multiplicative}} \mathbb{R}/\langle \text{ord} \rangle$, $\text{Div}^+(S) \xrightarrow{v} v(\mathbb{Z} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}_+$
 $(a) \mapsto v(a)$

est un sous-groupe de \mathbb{R}_+ . De plus $\mathcal{L} =$ schémas en groupes finis et plats/ \mathbb{A}^1_K
 tels que $G \otimes K$ soit étale
 caractéristique si $\text{Car}(K) = 0$

Def: Si $S = \text{Spec}(K)$ on notera pour $G \in \mathcal{L}$, $\deg(G) = v(\delta_G)$.

On a donc, si $\omega_G \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_K / a_i \mathcal{O}_K$,
 de torsion car $G \otimes K$ est étale

$$\deg(G) = \sum_{i \in I} v(a_i).$$

Le lemme précédent implique donc que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ && \text{est additive} \\ G &\longmapsto \deg(G) \end{aligned}$$

i.e. si $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$ est une suite exacte dans \mathcal{L} alors

$$\deg(G) = \deg(G') + \deg(G'')$$

Prop. Soit $G \in \mathcal{L}$. Supposons que $|G| \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ soit globalement inversible

Alors, $\mathcal{D}_G + \mathcal{D}_{G^D} = \text{div}(|G|)$
 diviseur de Cartier principal

$\exists U$ ouvert schématiquement dense de S tq. $|G| \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times$
 $\iff |G|$ pas un diviseur de 0 dans \mathcal{O}_S .
 $\iff G^D \in \mathcal{L}$ i.e. G^D gén. étale

dem. On veut montrer une égalité de diviseurs. Il suffit de montrer cette égalité localement sur S . On peut donc supposer qu'il existe une résolution

$$0 \rightarrow G \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$$

$\swarrow \quad \nearrow$
 schémas abéliens

$f =$ homogène de schémas abéliens
 $\ker f = G$.

$$l_G \simeq [\omega_B \xrightarrow{f^*} \omega_A]$$

$$l_{G^D} \simeq [\omega_{A^V} \xrightarrow{(f^V)^*} \omega_{B^V}]$$

$$0 \rightarrow G^D \rightarrow B^V \xrightarrow{f^V} A^V \rightarrow 0$$

↑ isogénie duale

$$R^1_{\text{dir}}(A/S) = R^1 \pi_* (\underbrace{S^1_{A/S}}_{\text{Complexe de de Rham}})$$

Il y a une filtration de Hodge $0 \rightarrow \omega_A \rightarrow R^1_{\text{dir}}(A/S) \rightarrow \omega_{A^V}^* \rightarrow 0$

$H^1(\text{de Rham}) = \text{Lie } A^V$
 $R^1 \pi_* \omega_A$

et en fait un triangle filtration de Hodge (cf. B.B.M.)

$$l_G[-1] \longrightarrow [R^1_{\text{dir}}(B/S) \xrightarrow{f^*} R^1_{\text{dir}}(A/S)]$$

$l_{G^D}^V$

↑ +1 ↓ +1

qui induit une égalité

$$\underbrace{\text{Div}(l_G[-1])}_{-S_G} + \underbrace{\text{Div}(l_{G^D}^V)}_{-S_{G^D}} = \text{Div} \left[R^1_{\text{dir}}(B/S) \xrightarrow{f^*} R^1_{\text{dir}}(A/S) \right]$$

$$= \text{Div} \left[\det R^1_{\text{dir}}(B/S) \xrightarrow{\det f^*} \det R^1_{\text{dir}}(A/S) \right]$$

$$\downarrow \simeq \qquad \qquad \qquad \downarrow \simeq$$

$$R^m_{\text{dir}}(B/S) \longrightarrow R^m_{\text{dir}}(A/S)$$

$$\downarrow \simeq \downarrow \text{tr} \qquad \qquad \downarrow \simeq \downarrow \text{tr}$$

$$G_S \xrightarrow{\times \deg(f)} G_S \qquad \qquad \square$$

Corollaire. Supposons que $S = \text{Spec } (K) \text{ avec } K/\mathbb{Q}_p$. Soit $G \in \mathcal{P}$ d'ordre une puissance de p . Normalisons la valuation de K de telle manière que $v(p) = 1$. Alors

$$\deg(G) + \deg(G^D) = \text{ht}(G)$$

En particulier, $0 \leq \deg(G) \leq \text{ht}(G)$.

$$\deg(G) = 0 \iff G \text{ étale}$$

$$\deg(G) = \text{ht}(G) \iff G \text{ de type multiplicatif.}$$

Th. Soit $f: G \rightarrow G'$ un morphisme dans \mathcal{C} qui est un isomorphisme génériquement / S

sur un ouvert schématiquement dense de S

Alors, si $\pi: G \rightarrow S, \pi': G' \rightarrow S, |G| = |G'|$ et

$$\cancel{|G| \cdot \mathcal{S}_{G'}} \quad |G| \cdot \mathcal{S}_{G'} = |G| \cdot \mathcal{S}_G + 2 \text{ Div} \left[\underbrace{\pi'_* \mathcal{O}_{G'}}_{\text{Complexe parfait de } \mathcal{O}_S\text{-modules}} \xrightarrow{f^*} \pi_* \mathcal{O}_G \right] \text{ dans } \text{Div}^+(S)$$

génériquement acyclique.

dem. Il suffit de le vérifier localement / S .

On peut supposer que $S = \text{Spec}(A), G = \text{Spec}(B), G' = \text{Spec}(B')$ avec

B et B' des modules libres de rang $n = |G|$ sur A .

$f^*: B' \rightarrow B$ isomorphisme après tensorisation par $\frac{A_{\text{frac}}}{A}$ total des fractions de A .

Soit (e_1, \dots, e_m) une base de B' comme A -module,

Soit (e_1, \dots, e_m) " " " " " " " " " " " "

* De l'égalité $\Delta_{B/A} = \mathcal{D}_{B/A}$ on déduit que

$$\det(\text{tr}_{B/A}(e_i e_j))_{i,j} = N_{B/A}(\Delta_{B/A})$$

Mais puisque $\Delta_{G/S} = \pi^* \mathcal{D}_G$, si $\mathcal{D}_G \subset A$ désigne l'idéal associé,

$$\Delta_{B/A} = B \cdot \mathcal{D}_G \text{ et donc } N_{B/A}(\Delta_{B/A}) = \mathcal{D}_G^n.$$

$$* \text{ De m, } \det(\text{tr}_{B/A}(e_i e_j))_{i,j} = \mathcal{D}_G^m$$

~~* Maintenant, si $M \in M_m(A)$ désigne la matrice de passage de
 $M \in M_m(A)$ désigne la matrice de passage de~~

$$\left(f^* e_1, \dots, f^* e_m \right) \text{ à } (e_1, \dots, e_m), \text{ on a}$$

~~et~~

* Maintenant, si $M \in M_m(A)$ désigne la matrice de passage de

$$(e_i)_i \text{ à } (f^* e_i)_i, \quad \left(\begin{array}{c} f^* e_1 \\ \vdots \\ f^* e_m \end{array} \right) = M \left(\begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{array} \right)$$

$$Q = ({}^t_{B/A}(e_i e_j))_{i,j}$$

$$Q' = ({}^t_{B'/A}(e_i e_j))_{i,j}$$

$$\boxed{Q' = {}^t M Q M} \Rightarrow \det(Q') = \det(Q) \cdot \det(M)^2$$

et $\det(M)$ engendre $\text{Div} [B' \xrightarrow{f^*} B]$ vu comme idéal inversible

dans $A \Rightarrow \square$

Corollaire. $S = \text{Spec}(O_K)$, $f: G \rightarrow G'$ telle que $G \otimes K \rightarrow G' \otimes K$ soient isomorphisme. Alors, $\deg(G) \leq \deg(G')$ avec égalité si f est un isomorphisme.

\rightarrow si $f^*: B' \hookrightarrow B$, $B = \Gamma(G, O_G)$ et $B' = \Gamma(G', O_{G'})$,

$$B/f^* B' \cong \bigoplus_{j \in S} O_K / \mathfrak{b}_j O_K$$

$$\deg(G') = \deg(G) + \frac{2}{|G|} \sum_{j \in S} v(\mathfrak{b}_j) \quad \square$$

Adhérence schématique

Le cas des anneaux de valuation

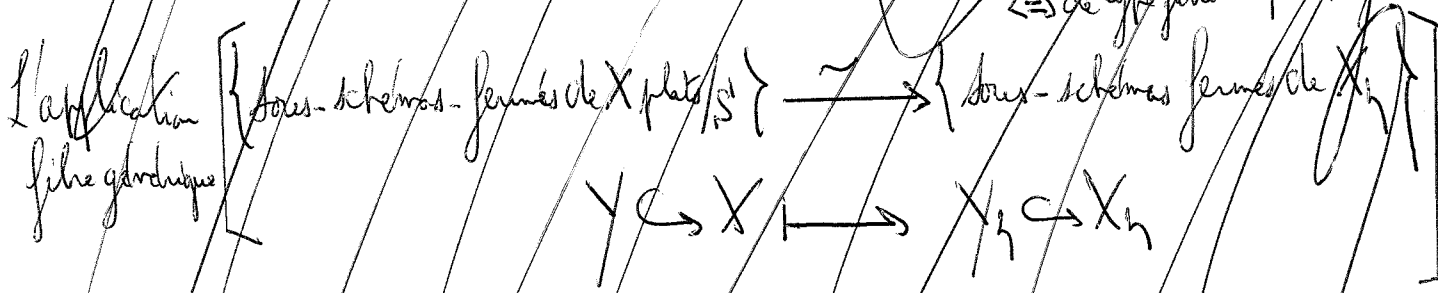
* $S =$ schéma intègre dont tous les anneaux locaux sont des anneaux de valuation.

$f =$ point géométrique de S , $f \rightarrow S$

Ex. $K =$ Corps valué. $S = \text{Spec}(O_K) \leftarrow \text{Spec}(K) = f$.

* Si X est un S -schéma, X est plat sur $S \iff X_f$ est schématiquement dense dans X

Supposons S quasi-compact quasi-séparé. $X = S$ -schéma plat de présentation finie.
 \iff de type fini d'après Raynaud-Grisson



est une bijection d'inverse l'opération d'adhérence schématique.

De plus cette bijection commute au produit car si Y_1 et Y_2 sont plats sur S , $Y_1 \times_S Y_2$

l'est également.

Adhérence schématique

Le cas des anneaux de valuation

* S est un schéma intègre dont tous les anneaux locaux sont de valuation.

$\eta \rightarrow S$ est le point générique de S

Ex: K Corps valué - $S = \text{Spec}(O_K) \longleftrightarrow \text{Spec}(K) = \eta$

* Si X est un S -schéma, X est plat/ $S \iff X_\eta$ est schématiquement dense dans X .

* Supposons S quasi-compact quasi-séparé.

Soit X un S -schéma plat de présentation finie

\Downarrow (Raynaud-Gruason)
de type fini

Abs l'application fibregénéralique:

$\{ \text{sous-schémas fermés de } X \text{ plats}/S \} \xrightarrow{\sim} \{ \text{sous-schémas fermés de } X_\eta \}$

$\{ \text{sous-sch. fermés de } X \text{ plats de présentation finie}/S \}$

$$Y \subset X \mapsto Y_\eta \subset X_\eta$$

est une bijection d'inverse l'application d'adhérence schématique.

* Cette bijection est compatible au produit au sens où si

$$\left. \begin{array}{l} Y_1 \subset X_1 \\ Y_2 \subset X_2 \end{array} \right\} \text{ sont des sous-schémas fermés plats/S}$$

$$\text{alors } \underbrace{Y_1 \times_S Y_2}_{\text{plats/S}} \subset \underbrace{X_1 \times_S X_2}_{\substack{\text{immersion} \\ \text{fermée}}} \Rightarrow Y_1 \times_S Y_2 = \text{adhérence schématique de } Y_{1,h} \times Y_{2,h} \text{ dans } X_1 \times_S X_2$$

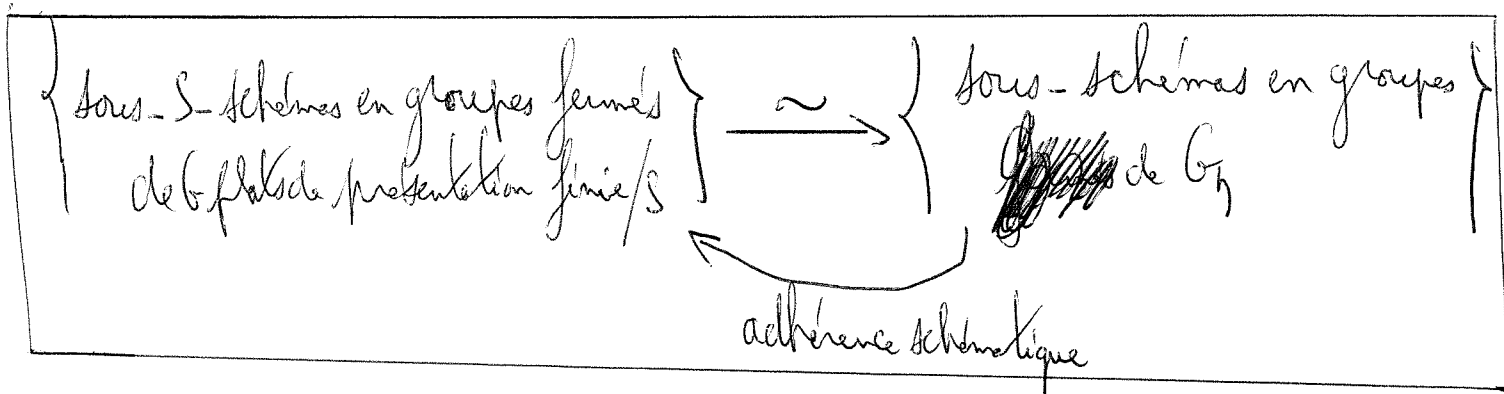
* Si X_1 et X_2 sont comme précédemment, $Y_1 \subset X_1, Y_2 \subset X_2$ également,

si $f: X_1 \rightarrow X_2$ est un morphisme de S -schémas tel que $f|_{Y_1}$ se factorise

via $Y_2 \subset X_2$, ~~alors~~ alors $f|_{Y_1}$ se factorise par $Y_2 \subset X_2$.

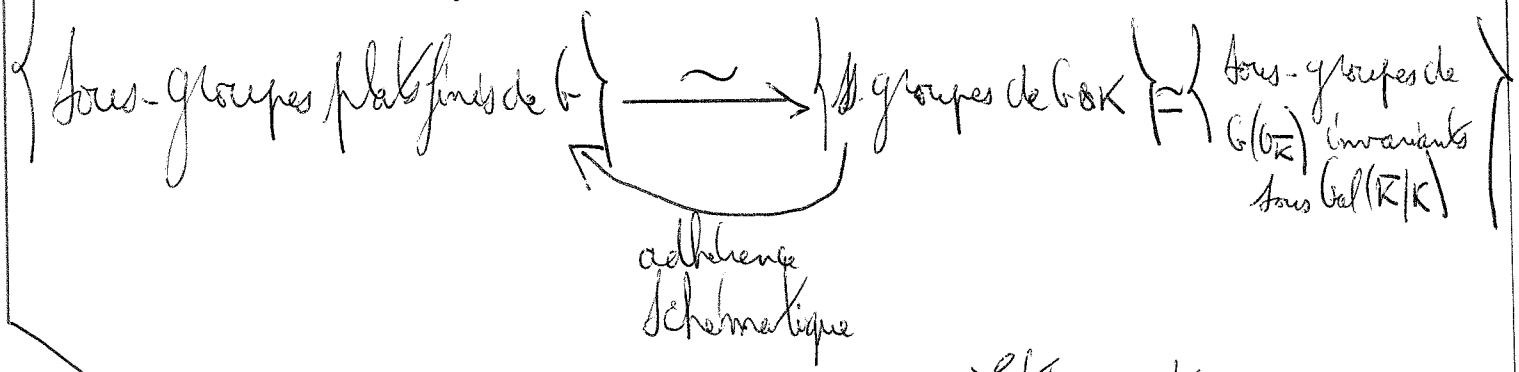
→ Cela résulte de la propriété universelle des adhérences schématiques.

* De cela on déduit que si G est un S -schéma en groupes plat de présentation finie



Ex. K valeur complet / \mathbb{Q}_p - \bar{K} = clôture algébrique de K .

G = schéma en groupes plat fini / \mathbb{O}_K



catégorie exacte.

Prop. Soit S un schéma du type précédent et \mathcal{C} la catégorie des S -schémas en groupes ~~plats finis~~ finis et plats. Alors, tout morphisme dans \mathcal{C} possède un noyau et un conoyau.

dem. * Si $f: G_1 \rightarrow G_2$ il suffit de prendre pour noyau de f dans \mathcal{C} l'adhérence schématique dans G_1 du noyau de $f_h: G_{1,h} \rightarrow G_{2,h}$.
 * On définit $\text{Im } f$ comme étant l'adhérence schématique de $\text{Im } f_h$ dans G_2 et $\text{Coker } f = G_2 / \text{Im } f$. □

Th (Raynaud, "Schémas en groupes de type (p, n) ") $K/\mathbb{Q}_p, e_{K/\mathbb{Q}_p} < p-1$.

Alors, \mathcal{C} est une catégorie abélienne et le foncteur fibre géométrique est pleinement fidèle. $\mathcal{C} \hookrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}}(\text{Gal}(\bar{K}/K))$.
sous-cat. abélien

Cependant en général C_n est pas abélienne:

$$K = \mathbb{C}_p(\mathbb{P}^1) \quad f: \mathbb{P}^1/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1/\mathbb{C}_K$$

$$e_{K/\mathbb{C}_p} = p-1.$$

$$\bar{1} \mapsto \mathbb{P}^1$$

f est un iso. en fibre générique $\Rightarrow \ker f = \text{Char } f = 0$

\nwarrow \uparrow
 dans \mathbb{C}

Mais f_n est pas un isomorphisme!

Adhérence schématique: le cas général

Cas algébrique:

S schéma quasi-compact quasi-séparé.

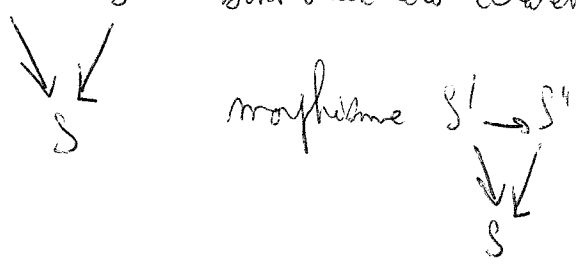
$U \subset S$ un ouvert quasicompact schématiquement dense.

Def. Un éclatement U -admissible de S est l'éclatement $\tilde{S} \rightarrow S$ d'un idéal quasi-cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ de type fini tel que $V(\mathcal{I}) \subset S \setminus U$ i.e. supporté dans $X \setminus U$.

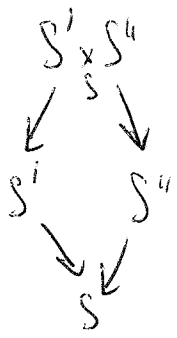
$\Rightarrow \tilde{S} \xrightarrow{\pi} S$ induit un isomorphisme $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ et $\pi^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans \tilde{S} .

La catégorie des éclatements U -admissibles de S forme un ensemble ordonné dans lequel 2-éléments ont une borne supérieure

i.e. si S' S'' sont deux tels éclatements \exists au plus un seul morphisme $S' \rightarrow S''$



et $S' \times_S S''$ est un éclatement \bar{U} -admissible (si S' est l'éclatement de S' " S'' " " S'' " alors $S' \times_S S''$ est l'éclatement de $S' \cdot S''$ éclatement de S' de l'idéal $\mathcal{O}_{S', S''}$)



* Si \tilde{S} est un éclatement \bar{U} -admissible et X est un S -schéma de type fini on appelle transformé strict de X l'adhérence schématique dans $X \times_S \tilde{S}$ de $X \times_S \bar{U} = X \times_S f^{-1}(\bar{U})$.

→ lorsque S est noethérien, on prend $X \times_S \tilde{S}$ et on enlève les composantes immergées contenues dans le fermé $X \times_S \tilde{S} \setminus X \times_S \bar{U}$.

Th (Raynaud-Guson): Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie. Supposons $f|_{f^{-1}(\bar{U})}: f^{-1}(\bar{U}) \rightarrow \bar{U}$ plat. Il existe alors un éclatement \bar{U} -admissible $\tilde{S} \rightarrow S$ tel que le transformé strict $X' \rightarrow \tilde{S}$ de X/S soit plat de présentation finie.

Corollaire. Supposons Noetherien et soit G un S -schéma en groupes de type fini.

Soit $H \subset G_U$ un sous U -schéma en groupes fermé/plat/ U .

Il existe alors un éclatement U -admissible $\tilde{S} \rightarrow S$ tel que

H se prolonge en un sous \tilde{S} -schéma en groupes de $G \times_S \tilde{S}$ fermé plat de type fini.

Corollaire. Noetherien - $G = S$ -schéma en groupes plat/fini tel que G_U soit étale.

Il existe alors un éclatement U -admissible $\tilde{S} \rightarrow S$ tel que l'application

$$\left\{ \text{sous-groupes plats finis de } G_{\tilde{S}} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \text{sous-groupes plats finis de } G_U \right\}$$

soit une bijection.

$\rightarrow \left. \begin{array}{l} G_U \text{ étale} \\ \text{fini} \\ \pi_0(G) \text{ fini} \end{array} \right\} \Rightarrow G_U \text{ possède seulement un nombre fini de s. groupes étales finis}$

Le Cas formel: $F = \text{caps valeur complet pour } v: F \rightarrow (Kv)_{+ \infty}$ non triviale.

$X = G_F$ -schéma formel admissible

$= \text{Spf}(O_F)$ -schéma formel topologiquement de type fini sans p -torsion.

On a une version rigide analytique du théorème de platitude de Raynaud-Grisson.

12

Th. Soit G un k -schéma formel en groupes finiment libre.

Supposons G^{rig} étale (ce qui est par exemple le cas si $\text{car}(F) \neq 0$).

k^{rig} - espace rigide en groupes
finiment libre

Il existe alors un éclatement formel admissible $\tilde{T} \rightarrow T$ tel que

$\left\{ \begin{array}{l} \text{sous-groupes finiment} \\ \text{libres de } G_{\tilde{T}} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{sous-groupes-étales finiment} \\ \text{libres de } G^{\text{rig}} \end{array} \right\}$

|| si k^{rig} connexe, $s = \text{point géo.}$

$\mathcal{D}_{\pi_1(k^{\text{rig}}, s)}$
 sous-groupes de G_s invariants sous
 l'action de $\pi_1(k^{\text{rig}}, s)$

