La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats

Cours n°5

①

Discriminant et Différente

Motivation: Serre "Corps locaux" chapitre III

K corps valué complet de valuation discrète

L|K séparable de degré fini telle que $k_L | k_K$ soit séparable.

$\uparrow \uparrow$ Corps résiduels

Alors, $O_L = O_K$-algèbre monogène

$O_L = O_K[T]/(f(T))$ où f est unitaire] Cas particulier d'algèbre syntomique finie génériquement étale

* De plus, $\Omega^1_{O_L/O_K} = O_K[T]/(f', f) \cdot dT$ est un O_L-module monogène de torsion

Notons $\underbrace{\Delta_{L|K}}_{\text{Idéal discriminant}} = \mathrm{Ann}_{O_L}(\Omega^1_{O_L/O_K})$, $\Omega^1_{O_L/O_K} \simeq O_L/\Delta_{L|K}$

* Soit $\underbrace{\mathcal{D}^{-1}_{L|K}}_{\text{Idéal fractionnaire de } O_L} = \{x \in L \mid \forall y \in O_L, \mathrm{tr}_{L|K}(xy) \in O_K\}$ la codifférente

et $\mathcal{D}_{L|K}$ son inverse, la différente.

Alors, $\boxed{\mathcal{D}_{L|K} = \Delta_{L|K}}$

Question: Y-a-t-il un tel type d'énoncé plus généralement pour des algèbres syntomiques finies génériquement étales ?

Ex: * Si $b_L|b_K$ n'est plus séparable, O_L n'est pas nécessairement une O_K-algèbre monogène mais est tout de m̂ syntomique génériquement étale

($f: X \to Y$ morphisme plat de type fini de schémas réguliers

$\Downarrow$

f syntomique)

* Par exemple, si S est un trait $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme fini de S-schémas plats de type fini, $f_\eta: X_\eta \to Y_\eta$ est étale, X et Y sont normaux, X_s et Y_s intègres et $f_s: X_s \to Y_s$ dominant alors

$$\underbrace{O_{Y,\xi_Y}}_{O_K} \hookrightarrow \underbrace{O_{X,\xi_X}}_{O_L}$$

est une extension du type précédent. L'extension de corps résiduels n'est pas séparable si $f_s: X_s \to Y_s$ n'est pas génériquement étale.

(* Par exemple, si $f: A \to B$ est une isogénie de schémas abéliens $/\underset{\text{trait}}{S}$ génériquement étale mais éventuellement ramifiée en fibre spéciale

$O_L|O_K$ est un bref torseur

* G/S schéma en groupes plat fini génériquement étale ou bien un torseur sous un tel schéma en groupes

Discriminant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\text{syntomique fini } \underbrace{\text{génériquement}}_{\substack{\text{sur un ouvert schématiquement}\\ \text{dense de } X}} \text{ étale}"] \\ S \end{tikzcd}$$

En particulier, X/S est fini localement libre.

* $\mathbb{L}_{X/S} \in \mathbb{D}^{[-1,0]}_{parf}(\mathcal{O}_X)$, $rg(\mathbb{L}_{X/S}) = 0$

X/S génériquement étale $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^{-1}(\mathbb{L}_{X/S}) = 0$ et $\mathbb{L}_{X/S}$ est génériquement acyclique.

* Diviseurs de Cartier effectifs sur X :

$$\mathrm{Div}^+(X) = \{(\mathcal{L}, s)\}/\sim \quad \text{où } \mathcal{L} \text{ fibré en droites}/X$$

$$s \in \Gamma(X,\mathcal{L}) \text{ induit une trivialisation } \underbrace{\text{générique de } \mathcal{L}}_{\substack{\text{sur un ouvert}\\ \text{schématiquement dense}}}$$

On a également $\mathrm{Div}^+(X) = \{\text{Idéaux } \mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X \text{ localement libres de rang } 1\}$

$$(\mathcal{L}, s) \longmapsto \text{idéal } \mathrm{Im}(\mathcal{L}^\vee \xrightarrow{s^\vee} \mathcal{O}_X) \text{ où } s : \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$$

$$\Big(\mathcal{I}^\vee, \mathcal{O}_X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{induit par } \mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X.}}{\hookrightarrow} \mathcal{I}^\vee\Big) \longleftarrow\!\shortmid \mathcal{I}$$

sur ouvert sch. dense

* Knudsen-Mumford :

Si $\mathcal{E}^\cdot$ = Complexe parfait de rang nul génériquement acyclique, on peut lui associer un diviseur de Cartier $\mathrm{Div}(\mathcal{E}^\cdot)$ de fibré en droites sous-jacent $\det(\mathcal{E}^\cdot) = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} (\det \mathcal{E}^i)^{\otimes(-1)^i}$

* Alors, $\mathrm{Div}(\mathbb{L}_{X/S})$ se définit de la façon suivante :

localement/X, si $\mathbb{L}_{X/S} \simeq [\mathcal{E}^{-1} \xrightarrow{u} \mathcal{E}^0]$

$\mathcal{O}_X$-modules loc. libres de rg. fini, $\mathrm{rg}\, \mathcal{E}^0 = \mathrm{rg}\, \mathcal{E}^{-1}$

$$\mathrm{Div}(\mathbb{L}_{X/S}) = \left(\det \mathcal{E}^0 \otimes (\det \mathcal{E}^{-1})^\vee, s\right)$$

où

$$\begin{tikzcd} \det(\mathcal{E}^{-1}) \arrow[r, "\det u"] \arrow[d, squiggly, "\wr"] & \det(\mathcal{E}^0) \\ \mathcal{O}_X \arrow[r, "s"] & \det(\mathcal{E}^{-1})^\vee \otimes \det(\mathcal{E}^0) \end{tikzcd}$$

Du point de vue des idéaux inversibles de $\mathcal{O}_X$,

$$\boxed{\mathrm{Div}(\mathbb{L}_{X/S}) = \mathrm{Fitt}_0(\Omega^1_{X/S})}$$

$$\boxed{\underline{\text{Déf}} : \Delta_{X/S} = \mathrm{Div}(\mathbb{L}_{X/S}) \in \mathrm{Div}^+(X).}$$

$\mathrm{Supp}(\Delta_{X/S})$ = Complémentaire du plus grand ouvert de X sur lequel X/S est étale.

* Concrètement, localement $/X$, si $S = \mathrm{Spec}(A)$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_S \arrow[dl] \\ S & \end{tikzcd}$$

$x \in X$ et U est un voisinage de x tel que $X \cap U \hookrightarrow U$ soit défini par la suite régulière $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(U, \mathbb{A}^n_S)$

$\Delta_{X/S}$ est localement engendré au voisinage de x par

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{1 \le i,j \le n}$$

$\nwarrow$ coordonnées sur $\mathbb{A}^n_S$.

* Si X est intègre noethérien et normal, le diviseur de Weil associé à $\Delta_{X/S}$ est

$$\sum_{\substack{x \in X \\ \dim \mathcal{O}_{X,x} = 1}} m_x \left[\overline{\{x\}}\right] \quad \text{où si } \Omega^1_{X/S,x} \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X,x} / \pi_x^{a_i} \mathcal{O}_{X,x}$$

(π_x = uniformisante en x)

alors $m_x = \sum_{i \in I} a_i$

<u>Formule de transitivité</u> :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Y \arrow[dl, "f"] \\ S & \end{tikzcd}$$

f et g syntomiques finis génériquement étales

$\rightsquigarrow$ triangle

$$\begin{tikzcd} g^* \mathbb{L}_{Y/S} \arrow[r] & \mathbb{L}_{X/S} \arrow[dl] \\ \mathbb{L}_{X/Y} \arrow[u, "+1"] & \end{tikzcd} \Longrightarrow \boxed{\Delta_{X/S} = g^* \Delta_{Y/S} + \Delta_{X/Y}}$$

dans $\mathrm{Div}^+(X)$.

Différente : A anneau muni d'un élément régulier $t \in A$

$\Downarrow$

$D(t) \subset \operatorname{Spec}(A)$ est schématiquement dense.

B = A-algèbre syntomique finie, étale en dehors de $V(t)$

Forme quadratique sur le A-module projectif B

$$\begin{aligned} tr : B \times B &\longrightarrow A \\ (b_1, b_2) &\longmapsto tr_{B/A}(b_1 b_2). \end{aligned}$$

Après inversion de t cette forme quadratique induit une dualité parfaite.

Def. On note $\boxed{\mathcal{D}^{-1}_{B/A} = \{ b \in B[\frac{1}{t}] \,/\, tr_{B/A}(bB) \subset A \}}$, la codifférente.

L'indice «-1» n'est pour l'instant qu'une notation (bien qu'on va voir qu'il a en fait une signification plus précise).

Prop : La codifférente $\mathcal{D}^{-1}_{B/A}$ est un idéal fractionnaire inversible d'inverse $\mathcal{D}_{B/A}$. De plus $\mathcal{D}_{B/A} = \Delta_{B/A}$.

dém :
$$\begin{tikzcd} X = \operatorname{Spec}(B) \arrow[d, "\pi"] \\ S = \operatorname{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

↗ plat de présentation finie à fibres Gorenstein

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] \\ S \end{tikzcd}$$

Syntomique projectif $\Rightarrow$ On a une bonne dualité de Grothendieck pour les faisceaux cohérents

$\Downarrow$

* Plus précisément, si $\boxed{\omega = \det(\mathbb{L}_{X/S})}$ = fibré en droites sur X

$\forall \mathcal{E}$ faisceau cohérent sur X, $\forall \mathcal{F}$ faisceau cohérent sur S

$$\left[\begin{array}{l} R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(R\pi_*\mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq R\pi_* R\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi^!\mathcal{F}) \\ \quad \text{où } \pi^!\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{F} \otimes \omega[d] \quad \text{avec } d = \dim(X/S) \end{array}\right]$$

En effet, si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[dl, "f"] \\ S & \end{tikzcd}$$

avec f projectif et lisse (par exemple $Y = \mathbb{P}^n_S$)

– f projectif et lisse $\Rightarrow f^!\mathcal{F} = f^*\mathcal{F} \otimes \omega_{Y/S}[\dim(Y/S)]$

où $\omega_{Y/S} = \det(\Omega^1_{Y/S})$ est le fibré canonique

– i immersion régulière

$$\Rightarrow Ri^!\mathcal{G} \simeq i^*\mathcal{G} \otimes \underbrace{\det(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)}_{\text{det(fibré normal à l'imm. rég.)}}{}^{\vee} \Big[-\underbrace{\mathrm{Codim}_S(X,Y)}_{\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{J}/\mathcal{J}^2}\Big]$$

$$\pi^! = Ri^! \circ f^! \Rightarrow \pi^!(-) = \pi^*(-) \otimes i^*(\det \Omega^1_{Y/S}) \otimes \det(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^\vee \,[\dim X/S]$$

Or, $\mathbb{L}_{X/S} \simeq \Big[\underset{-1}{\mathcal{J}/\mathcal{J}^2} \longrightarrow \underset{0}{i^*\Omega^1_{Y/S}}\Big]$

$$\Rightarrow \det \mathbb{L}_{X/S} \simeq (\det \mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^\vee \otimes \det(i^*\Omega^1_{Y/S})$$

* Dans notre cas, π fini $\Rightarrow$ on a

$$\boxed{R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\pi_* \mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq \pi_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes \omega)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S) \simeq \pi_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \omega) = \pi_* \omega$$

Il y a une application d'adjonction $\mathrm{tr}_\pi : \underbrace{\pi_* \omega}_{\pi_* \pi^! \mathcal{O}_S} \longrightarrow \mathcal{O}_S$ telle que :

$\mathcal{O}_S$-linéaire

- L'isomorphisme $\pi_* \omega \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\pi_* \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S)$ est donné par $x \longmapsto [s \longmapsto \mathrm{tr}_\pi(sx)]$

  $\pi_* \omega$ est un $\pi_* \mathcal{O}_X$-module

Se déduit de la pté (R6) p. 198 de Hartshorn "Residues and duality"

- Notons $\Delta_{X/S} : \mathcal{O}_X \to \omega$ la section définissant le div. de Cartier $\Delta_{X/H}$. Alors, la composée

$$\begin{tikzcd} \pi_* \mathcal{O}_X \arrow[r, "\pi_* \Delta_{X/S}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{tr}_{X/S}"'] & \pi_* \omega \arrow[r, "\mathrm{tr}_\pi"] & \mathcal{O}_S \end{tikzcd}$$

est

où $\mathrm{tr}_{X/S} : \pi_* \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_S$ est donné par le fait que $\pi_* \mathcal{O}_X$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre finie localement libre.

Traduit concrètement dans notre cas, cela donne :

il y a un morphisme A-linéaire $\Delta_{B/A}^{-1} \xrightarrow{\mathrm{tr}_\pi} A$

tel que la composée

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{tr}_{B/A}"'] & \Delta_{B/A}^{-1} \arrow[r, "\mathrm{tr}_\pi"] & A \end{tikzcd}$$

soit $\mathrm{tr}_{B/A}$

et $\Delta^{-1}_{B/A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(B,A)$

$x \longmapsto [b \mapsto \mathrm{tr}_{\pi}(bx)]$

Donc, $\mathrm{tr}_{B[\frac{1}{t}]/A[\frac{1}{t}]}(\Delta^{-1}_{B/A}) \subset A$

et l'accouplement $\Delta^{-1}_{B/A} \times B \longrightarrow A$ est parfait

$(x,b) \longmapsto \mathrm{tr}_{B[\frac{1}{t}]/A[\frac{1}{t}]}(bx)$ □

Le diviseur de Cartier associé à un schéma en groupes fini et plat génériquement étale

. S schéma

. $\mathcal{C}$ = catégorie des S-schémas en groupes finis localement libres (commutatifs) $\underbrace{\text{génériquement}}_{\text{sur un ouvert schématiquement dense}}$ étales.

. $\mathcal{C}$ = catégorie exacte.

Def : Soit $G \in \mathcal{C}$ on note $\delta_G = \mathrm{Div}(\ell_G) \in \underbrace{\mathrm{Div}^+(S)}_{\text{monoïde des diviseurs de Cartier effectifs}}$

Complexe parfait de rang nul génériquement acyclique

Du point de vue des idéaux inversibles de O_S,

$$\boxed{\delta_G = \mathrm{Fitt}_0\, \omega_G}$$

* Remarquons que l'on a l'égalité de diviseurs $\boxed{\Delta_{G/S} = \pi^* \delta_G}$ où $\pi : G \to S$

* [<u>Lemme</u> : La "fonction" $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Div}^+(G)$ est additive
$\qquad G \longmapsto \delta_G$

<u>dem</u> : Si $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ est exacte on a triangle

$$\begin{tikzcd} \ell_{G''} \arrow[rr] & & \ell_G \arrow[dl] \\ & \ell_{G'} \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Div}(\ell_G) = \mathrm{Div}(\ell_{G'}) + \mathrm{Div}(\ell_{G''})$$

* On peut également le voir en disant qu'il y a une suite exacte

$$0 \to \omega_{G''} \longrightarrow \omega_G \to \omega_{G'} \to 0$$

et que $M \mapsto \mathrm{Fitt}_0 M$ est additif

$\square$

* Si $S = \mathrm{Spec}(O_K)$, K = corps valué pour $v : K \xrightarrow{\text{non triviale}} \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\mathrm{Div}^+(S) \xrightarrow{\sim} v(O_K \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}_+$
$\qquad (a) \longmapsto v(a)$

est un sous-groupe de $\mathbb{R}_+$. De plus [$\mathcal{C}$ = schémas en groupes finis et plats$/O_K$
$\underbrace{\text{tels que } G \otimes K \text{ soit étale}}_{\text{automatique si } \mathrm{Car}(K) = 0}$

$\boxed{\text{\underline{Déf} : Si } S = \mathrm{Spec}(O_K) \text{ on notera pour } G \in \mathcal{C},\ \deg(G) = v(\delta_G).}$

On a donc, si $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{de torsion car } G\otimes K \text{ est étale}}}{\omega_G} \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_K/a_i\mathcal{O}_K$)

$$\boxed{\deg(G) = \sum_{i\in I} v(a_i).}$$

Le lemme précédent implique donc que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ G & \longmapsto & \deg(G) \end{array} \quad \text{est additive}$$

i.e. si $0\to G'\to G\to G''\to 0$ est une suite exacte dans $\mathcal{C}$ alors

$$\boxed{\deg(G) = \deg(G') + \deg(G'').}$$

<u>Prop</u>: Soit $G\in\mathcal{C}$. Supposons que $|G|\in\Gamma(S,\mathcal{O}_S)$ soit $\underbrace{\text{génériquement inversible}}$

Alors, $\delta_G + \delta_{G^D} = \underbrace{\mathrm{div}}_{\text{diviseur de Cartier principal}}(|G|)$

∃U ouvert schématiquement dense de S tq. $|G|\in\Gamma(U,\mathcal{O}_U)^\times$

$\Updownarrow$ (I)

$|G|$ pas un diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_S$.

$\Updownarrow$ (II)

$G^D\in\mathcal{C}$ i.e. G^D gén. étale

<u>dem</u>: On veut montrer une égalité de diviseurs. Il suffit de montrer cette égalité localement sur S. On peut donc supposer qu'il existe une résolution

$$0\to G\to \underset{\nwarrow}{A} \xrightarrow{f} \underset{\uparrow}{B} \to 0$$

schémas abéliens

f = isogénie de schémas abéliens

$\ker f = G$.

$$\ell_G \simeq \left[\omega_B \xrightarrow{f^*} \omega_A\right]$$

$$\ell_{G^D} \simeq \left[\omega_{A^\vee} \xrightarrow{(f^\vee)^*} \omega_{B^\vee}\right]$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G^D \arrow[r] & B^\vee \arrow[r, "f^\vee"] & A^\vee \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\uparrow$ isogénie duale

$$\mathcal{H}^1_{dR}(A/S) = R^1\pi_*\big(\underbrace{\Omega^\bullet_{A/S}}_{\text{Complexe de de Rham}}\big)$$

Il y a une filtration de Hodge $0 \to \omega_A \to \mathcal{H}^1_{dR}(A/S) \longrightarrow \underbrace{\omega^*_{A^\vee}}_{} \to 0$

$\cancel{H^1(A,\mathcal{O}_A)} = \mathrm{Lie}\,A^\vee$

$R^1\pi_*\mathcal{O}_A$

et en fait un triangle filtration de Hodge (cf. B.B.M.)

$$\begin{tikzcd} \ell_G[-1] \arrow[rr] & & \left[\overset{0}{\mathcal{H}^1_{dR}(B/S)} \xrightarrow{f^*} \overset{+1}{\mathcal{H}^1_{dR}(A/S)}\right] \arrow[dl] \\ & \ell^\vee_{G^D} \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}$$

qui induit une égalité

$$\underbrace{\mathrm{Div}\left(\ell_G[-1]\right)}_{-\delta_G} + \underbrace{\mathrm{Div}\left(\ell^\vee_{G^D}\right)}_{-\delta_{G^D}} = \mathrm{Div}\left[\mathcal{H}^1_{dR}(B/S) \xrightarrow{f^*} \mathcal{H}^1_{dR}(A/S)\right]$$

$$= \mathrm{Div}\begin{tikzcd} \left[\det \mathcal{H}^1_{dR}(B/S) \arrow[r, "\det f^*"] \arrow[d, "\simeq"] \right. & \left. \mathcal{H}^1_{dR}(A/S)\right] \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathcal{H}^n_{dR}(B/S) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "tr"] & \mathcal{H}^n_{dR}(A/S) \arrow[d, "\simeq"', "tr"] \\ \mathcal{O}_S \arrow[r, "\times \deg(f)"] & \mathcal{O}_S \end{tikzcd}$$

$\square$

Corollaire: Supposons que $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ avec $K|\mathbb{Q}_p$. Soit $G \in \mathcal{C}$ d'ordre une puissance de p. Normalisons la valuation de K de telle manière que $v(p) = 1$. Alors

$$\deg(G) + \deg(G^D) = ht(G)$$

En particulier, $0 \leq \deg(G) \leq ht(G)$.

$\deg(G) = 0 \iff G$ étale

$\deg(G) = ht(G) \iff G$ de type multiplicatif.

Th: Soit $f : G \to G'$ un morphisme dans $\mathcal{C}$ qui est un isomorphisme $\underbrace{\text{génériquement}}_{\text{sur un ouvert schématiquement dense de } S}/S$

Alors, si $\pi : G \to S$, $\pi' : G' \to S$, $|G| = |G'|$ et

$$|G|.\delta_{G'} = |G|\delta_G + 2\,\mathrm{Div}\underbrace{\left[\overset{-1}{\pi'_* \mathcal{O}_{G'}} \xrightarrow{f^*} \overset{0}{\pi_* \mathcal{O}_G}\right]}_{\text{Complexe parfait de } \mathcal{O}_S\text{-modules génériquement acyclique.}} \text{ dans } \mathrm{Div}^+(S)$$

dem: Il suffit de le vérifier localement $/S$.

On peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$, $G = \mathrm{Spec}(B)$, $G' = \mathrm{Spec}(B')$ avec B et B' des modules libre de rang $n = |G|$ sur A.

$f^* : B' \to B$ isomorphisme après tensorisation par l'anneau total des fractions de A.

Soit $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une base de B' comme A-module ;

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ " " "B" "

* De l'égalité $\Delta_{B/A} = \mathcal{D}_{B/A}$ on déduit que

$$\det(\mathrm{tr}_{B/A}(e_ie_j))_{i,j} = N_{B/A}(\Delta_{B/A})$$

Mais puisque $\Delta_{G/S} = \pi^*\delta_G$, si $\delta_G \subset A$ désigne l'idéal associé, $\Delta_{B/A} = B\,\delta_G$ et donc $N_{B/A}(\Delta_{B/A}) = \delta_G^n$.

* De même, $\det(\mathrm{tr}_{B'/A}(\varepsilon_i\varepsilon_j))_{i,j} = \delta_{G'}^n$

~~* Maintenant, si $M \in \mathcal{M}_n(A)$ désigne la matrice de passage de~~
~~$M \in \mathcal{M}_n(A)$ désigne la matrice de passage de $(f^*\varepsilon_1,\dots,f^*\varepsilon_n)$ à $(e_1,\dots,e_n)$, on a~~

* Maintenant, si $M \in \mathcal{M}_n(A)$ désigne la matrice de passage de $(e_i)_i$ à $(f^*\varepsilon_i)_i$, $\begin{pmatrix} f^*\varepsilon_1 \\ \vdots \\ f^*\varepsilon_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$

$$Q = \left(\mathrm{tr}_{B/A}(e_i e_j)\right)_{i,j}$$

$$Q' = \left(\mathrm{tr}_{B'/A}(\varepsilon_i \varepsilon_j)\right)_{i,j}$$

$$\boxed{Q' = {}^tMQM} \Rightarrow \det(Q') = \det(Q)\cdot\det(M)^2$$

et $\det(M)$ engendre $\mathrm{Div}\left[B' \overset{f^*}{\hookrightarrow} B\right]$ vu comme idéal inversible dans A $\Rightarrow$ $\square$

Corollaire. $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$, $f : G \to G'$ tel que $G \otimes K \to G' \otimes K$ soit un isomorphisme. Alors, $\deg(G) \leq \deg(G')$ avec égalité ssi f est un isomorphisme.

$\rightarrow$ si $f^* : B' \hookrightarrow B$, $B = \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$ et $B' = \Gamma(G', \mathcal{O}_{G'})$,

$$B / f^* B' \simeq \bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_K / b_j \mathcal{O}_K$$

$$\deg(G') = \deg(G) + \frac{2}{|G|} \sum_{j \in J} v(b_j) \qquad \square$$

~~Adhérence schématique~~

~~Le cas des anneaux de valuation~~

~~* S = schéma intègre dont tous les anneaux locaux sont des anneaux de valuation.~~

~~η = point générique de S, $\eta \to S$~~

~~Ex. K = Corps valué $S = \mathrm{Spec}(O_K) \hookleftarrow \mathrm{Spec}(K) = \eta$.~~

~~* Si X est un S-schéma, $\boxed{X \text{ est plat}/S \Longleftrightarrow X_\eta \text{ est schématiquement dense dans } X}$~~

~~- Supposons S quasi-compact quasi-séparé. X = S-schéma plat de $\underbrace{\text{présentation finie}}_{\Longleftrightarrow \text{ de type fini d'après Raynaud-Gruson}}$.~~

~~L'application fibre générique~~

$$\left[\{\text{sous-schémas fermés de } X \text{ plats}/S\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-schémas fermés de } X_\eta\} \atop Y \hookrightarrow X \longmapsto Y_\eta \hookrightarrow X_\eta\right]$$

~~est une bijection d'inverse l'opération d'adhérence schématique.~~

~~De plus cette bijection commute au produit car si Y_1 et Y_2 sont plats sur S, $Y_1 \times_S Y_2$ l'est également.~~

Adhérence schématique

Le cas des anneaux de valuation

* S est un schéma intègre dont tous les anneaux locaux sont de valuation.

  $\eta \to S$ est le point générique de S

Ex: K corps valué. $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \hookleftarrow \mathrm{Spec}(K) = \eta$

* Si X est un S-schéma, $\boxed{X \text{ est plat}/S \iff X_\eta \text{ est schématiquement dense dans } X}$.

* Supposons S quasi-compact quasi-séparé.

  Soit X un S-schéma plat de $\underbrace{\text{présentation finie}}_{\Updownarrow\ (\text{Raynaud-Gruson})\ \text{de type fini}}$

Alors l'application fibre générique :

$$\{\text{sous-schémas fermés de } X \text{ plats}/S\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-schémas fermés de } X_\eta\}$$

$$\overset{\|}{\{\text{sous-sch. fermés de } X \text{ plats de présentation finie}/S\}}$$

$$Y \hookrightarrow X \longmapsto Y_\eta \hookrightarrow X_\eta$$

est une bijection d'inverse l'application d'adhérence schématique.

* Cette bijection est compatible au produit au sens où si

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 \subset X_1 \\ Y_2 \subset X_2 \end{array}\right\} \text{ sont des sous-schémas fermés plats}/S$$

alors $\underbrace{Y_1 \times_S Y_2}_{\text{plat}/S} \underset{\substack{\text{immersion}\\ \text{fermée}}}{\subset} X_1 \times_S X_1 \Longrightarrow Y_1 \times_S Y_2 =$ adhérence schématique de $Y_{1,\eta} \times Y_{2,\eta}$ dans $X_1 \times_S X_2$

* Si X_1 et X_2 sont comme précédemment, $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$ également, si $f : X_1 \rightarrow X_2$ est un morphisme de S-schémas tel que $f|_{Y_{1,\eta}}$ se factorise via $Y_{2,\eta} \subset X_{2,\eta}$, alors $f|_{Y_1}$ se factorise par $Y_2 \subset X_2$.

→ Cela résulte de la propriété universelle des adhérences schématiques.

* De cela on déduit que si G est un S-schéma en groupes plat de présentation finie

$$\begin{tikzcd} \left\{\begin{array}{c}\text{sous-}S\text{-schémas en groupes fermés}\\ \text{de } G \text{ plats de présentation finie}/S\end{array}\right\} \arrow[r, "\sim"] & \left\{\begin{array}{c}\text{sous-schémas en groupes}\\ \text{de } G_\eta\end{array}\right\} \arrow[l, bend left, "\text{adhérence schématique}"] \end{tikzcd}$$

Ex. K valué complet $|\mathbb{Q}_p$ - $\bar{K}$ = Clôture algébrique de K.

G = Schéma en groupes plat fini $/O_K$

$$\begin{tikzcd}\left\{\text{sous-groupes plats finis de } G\right\} \arrow[r, "\sim"] & \left\{\text{ss groupes de } G\otimes K\right\} \arrow[l, bend left, "\text{adhérence schématique}"] \arrow[r, phantom, "="] & \left\{\begin{array}{c}\text{sous-groupes de}\\ G(O_{\bar{K}}) \text{ invariants}\\ \text{sous } \mathrm{Gal}(\bar{K}|K)\end{array}\right\}\end{tikzcd}$$

Catégorie exacte.

Prop: Soit S un schéma du type précédent et $\mathcal{C}$ la catégorie des S-schémas en groupes ~~[illegible]~~ finis et plats. Alors, tout morphisme dans $\mathcal{C}$ possède un noyau et un conoyau.

dem: * Si $f: G_1 \to G_2$ il suffit de prendre pour noyau de f dans $\mathcal{C}$ l'adhérence schématique dans G_1 du noyau de $f_\eta : G_{1,\eta} \to G_{2,\eta}$.

* On définit $\mathrm{Im} f$ comme étant l'adhérence schématique de $\mathrm{Im} f_\eta$ dans G_2 et $\mathrm{Coker} f = G_2/\mathrm{Im} f$.

□

Th (Raynaud, "Schémas en groupes de type (p, ,p)") $K|\mathbb{Q}_p$, $e_{K/\mathbb{Q}_p} < p-1$.

Alors, $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne et le foncteur fibre générique est pleinement fidèle. $\mathcal{C} \underset{\text{sous cat. abélien}}{\hookrightarrow} \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(\mathrm{Gal}(\bar{K}|K))$.

Cependant en général $\mathcal{C}$ n'est pas abélienne:

$K = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ $\qquad f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mu_p/\mathcal{O}_K$

$e_{K/\mathbb{Q}_p} = p-1.$ $\qquad \bar{1} \longmapsto \zeta_p$

f est un iso. en fibre générique $\Rightarrow \ker f = \mathrm{Coker}\, f = 0$

dans $\mathcal{C}$

Mais f n'est pas un isomorphisme!

Adhérence schématique : le cas général

Cas algébrique:

S schéma quasi-compact quasi-séparé.

$U \subset S$ un ouvert quasicompact schématiquement dense.

Déf: Un éclatement U-admissible de S est l'éclatement $\tilde{S} \to S$ d'un idéal quasi-cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ de type fini tel que $|V(\mathcal{I})| \subset S \setminus U$ i.e. supporté dans $X \setminus U$.

[$\Rightarrow \tilde{S} \xrightarrow{\pi} S$ induit un isomorphisme $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ et $\pi^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans $\tilde{S}$.]

La catégorie des éclatements U-admissibles de S forme un ensemble ordonné dans lequel 2-éléments ont une borne supérieure

i.e. si
$$\begin{tikzcd} S' \arrow[dr] & & S'' \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$
sont deux tels éclatements ∃ au plus un seul morphisme
$$\begin{tikzcd} S' \arrow[rr] \arrow[dr] & & S'' \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

et
$$\begin{tikzcd} & S' \times_S S'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ S' \arrow[dr] & & S'' \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$
est un éclatement $\bar U$-admissible (si S' est l'éclatement de J'
" S'' " " J''
alors $S' \times_S S''$ est l'éclatement de $J'.J''$)
$\shortparallel$
éclatement dans S' de l'idéal $O_{S'}.J''$

* Si
$$\begin{tikzcd} \tilde S \arrow[d, "f"'] \\ S \end{tikzcd}$$
est un éclatement $\bar U$-admissible et X est un S-schéma de type fini on appelle transformé strict de X l'adhérence schématique dans $X \times_S \tilde S$ de $X \times_S \bar U = X \times_S f^{-1}(\bar U)$.

→ lorsque S est noethérien, on prend $X \times_S \tilde S$ et on enlève les composantes immergées contenues dans le fermé $X \times_S \tilde S \setminus X \times_S \bar U$.

Th (Raynaud-Gruson). Soit $f : X \to S$ un morphisme de présentation finie. Supposons $f|f^{-1}(\bar U) : f^{-1}(\bar U) \to \bar U$ plat. Il existe alors un éclatement $\bar U$-admissible $\tilde S \to S$ tel que le transformé strict $X' \to \tilde S$ de X/S soit plat de présentation finie.

__Corollaire:__ Supposons S noethérien et soit G un S-schéma en groupes de type fini.

Soit $H \subset G_U$ un sous U-schéma en groupes fermé plat$/U$.

Il existe alors un éclatement U-admissible $\tilde{S} \longrightarrow S$ tel que

H se prolonge en un sous $\tilde{S}$-schéma en groupes fermé de $G \times_S \tilde{S}$ plat de type fini.

__Corollaire:__ S noethérien. $G =$ S-schéma en groupes plat fini tel que G_U soit étale.

Il existe alors un éclatement U-admissible $\tilde{S} \longrightarrow S$ tel que l'application

$$\{\text{sous-groupes plats finis de } G_{\tilde{S}}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-groupes plats finis de } G_U\}$$

soit une bijection.

$\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} G_U \text{ étale fini} \\ \pi_0(U) \text{ fini} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ G_U possède seulement un nombre fini de s.-groupes étales finis

__Le cas formel:__ $F =$ corps valué complet pour $v : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non triviale.

$\mathfrak{X} =$ $\mathcal{O}_F$-schéma formel admissible

$=$ $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F)$-schéma formel topologiquement de type fini sans p-torsion.

On a une version rigide analytique du théorème de platification de Raynaud-Gruson

$\Rightarrow$ **Th.** Soit G un $\mathfrak{X}$-schéma formel en groupes fini localement libre.

Supposons $\underbrace{G^{rig}}_{\mathfrak{X}^{rig}\text{-espace rigide en groupes fini localement libre}}$ étale (ce qui est par exemple le cas si $car(F)=0$)

Il existe alors un éclatement formel admissible $\tilde{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sous-groupes finis localement} \\ \text{libres de } G_{\tilde{\mathfrak{X}}} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \text{sous-groupes-étales finis de } G^{rig} \right\}$$

|| si $\mathfrak{X}^{rig}$ connexe, s = point géo.

Sous-groupes de $\overset{\pi_1(\mathfrak{X}^{rig}, s)\circlearrowright}{G_s}$ invariants sous l'action de $\pi_1(\mathfrak{X}^{rig}, s)$