Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique

Laurent Fargues
Travail en commun avec J.M. Fontaine

L'anneau B^+

F corps valué complet de caractéristique p, $v : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, algébriquement clos $\big(F \simeq \widehat{\overline{k((\pi))}}$ pour les applications arithmétiques $\big)$

L'anneau B^+

F corps valué complet de caractéristique p, $v : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, algébriquement clos $\big(F \simeq \widehat{\overline{k((\pi))}}$ pour les applications arithmétiques $\big)$

$$W(\mathcal{O}_F)\left[\tfrac{1}{p}\right] = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n] p^n \mid x_n \in \mathcal{O}_F \right\}$$

L'anneau B^+

F corps valué complet de caractéristique p, $v : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, algébriquement clos $\big(F \simeq \widehat{\overline{k((\pi))}}$ pour les applications arithmétiques $\big)$

$$
\begin{array}{ccc}
W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right] & = & \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n] p^n \mid x_n \in \mathcal{O}_F \right\} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle v_r} & & \Big\downarrow \\
\mathbb{R} \cup \{+\infty\} & & \inf_{n \in \mathbb{Z}} \{ v(x_n) + nr \}
\end{array}
$$

pour $r \in \mathbb{R}_+$, v_r est une valuation

L'anneau B^+

F corps valué complet de caractéristique p, $v : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, algébriquement clos $\left(F \simeq \widehat{\overline{k((\pi))}}\right.$ pour les applications arithmétiques $\left.\right)$

$$
\begin{tikzcd}
W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right] = \{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n] p^n \mid x_n \in \mathcal{O}_F \} \arrow[d, "v_r"'] & \\
\mathbb{R} \cup \{+\infty\} & \inf\limits_{n \in \mathbb{Z}} \{ v(x_n) + nr \}
\end{tikzcd}
$$

pour $r \in \mathbb{R}_+$, v_r est une valuation

Définition

On note B^+ le complété de $W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]$ par rapport à $(v_r)_{r>0}$.

$$\varphi \circlearrowright B^+ = \mathbb{Q}_p - \text{algèbre de Frechet}$$

φ est bijectif

Algèbre graduée

Définition

$h \geq 1$,

$$P_h = \bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{\left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d}}_{P_{h,d}}$$

$\mathbb{Q}_{p^h} = P_{h,0}$*-algèbre graduée.*

Algèbre graduée

Définition

$h \geq 1$,

$$P_h = \bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{\left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d}}_{P_{h,d}}$$

$\mathbb{Q}_{p^h} = P_{h,0}$*-algèbre graduée.*

$\left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d}$ = espace de Banach

Lorsque $1 \leq d \leq h$, si $\mathcal{G}$ = groupe formel p-div. isocline de pente $\dfrac{d}{h}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$$\mathcal{G}_{\mathcal{O}_F}^{rig} \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d(0,1),$$

Algèbre graduée

Définition

$h \geq 1$,

$$P_h = \bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{\left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d}}_{P_{h,d}}$$

$\mathbb{Q}_{p^h} = P_{h,0}$*-algèbre graduée.*

$\left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d}$ = espace de Banach

Lorsque $1 \leq d \leq h$, si $\mathcal{G}$ = groupe formel p-div. isocline de pente $\dfrac{d}{h}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$$\mathcal{G}^{rig}_{\mathcal{O}_F} \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d(0,1),$$

$$\mathcal{G}^{rig}_{\mathcal{O}_F}(F) = \mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} \left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d}$$

topologie de Banach définie par les F-points d'un sous-groupe affinoïde $\mathbb{B}^d(0,\epsilon) \subset \mathring{\mathbb{B}}^d(0,1)$ pour $0 < \epsilon < 1$.

Algèbre graduée

Définition

$h \geq 1$,

$$P_h = \bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{\left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d}}_{P_{h,d}}$$

$\mathbb{Q}_{p^h} = P_{h,0}$-*algèbre graduée.*

$\left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d}$ = espace de Banach

Lorsque $1 \leq d \leq h$, si $\mathcal{G}$ = groupe formel p-div. isocline de pente $\dfrac{d}{h}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$$\mathcal{G}^{rig}_{\mathcal{O}_F} \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d(0,1),$$

$$\mathcal{G}^{rig}_{\mathcal{O}_F}(F) = \mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} \left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d}$$

topologie de Banach définie par les F-points d'un sous-groupe affinoïde $\mathbb{B}^d(0,\epsilon) \subset \mathring{\mathbb{B}}^d(0,1)$ pour $0 < \epsilon < 1$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_F^d & \xrightarrow{\sim} & \left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d} \\ (x_0, \ldots, x_{d-1}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{0 \leq i \leq d-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[x_i^{p^{-nh}}\right] p^{nd+i} \end{array}$$

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. On note $X := X_1$.

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. On note $X := X_1$.

Théorème

1. *X_h est un schéma noethérien régulier de dimension* 1

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. On note $X := X_1$.

Théorème

1. *X_h est un schéma noethérien régulier de dimension 1*
2. *$X_h \simeq X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^h}$ via* $\underbrace{(B^+)^{\varphi = p^d}}_{P_{1,d}} \hookrightarrow \underbrace{(B^+)^{\varphi^h = p^{hd}}}_{P_{h,hd}}$

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. On note $X := X_1$.

Théorème

1. *X_h est un schéma noethérien régulier de dimension* 1
2. $X_h \simeq X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^h}$ *via* $\underbrace{(B^+)^{\varphi = p^d}}_{P_{1,d}} \hookrightarrow \underbrace{(B^+)^{\varphi^h = p^{hd}}}_{P_{h,hd}}$
3. $t \in P_{1,1} \setminus \{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$, *un seul point de X :*

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. On note $X := X_1$.

Théorème

1. *X_h est un schéma noethérien régulier de dimension* 1
2. $X_h \simeq X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^h}$ *via* $\underbrace{(B^+)^{\varphi = p^d}}_{P_{1,d}} \hookrightarrow \underbrace{(B^+)^{\varphi^h = p^{hd}}}_{P_{h,hd}}$
3. *$t \in P_{1,1} \setminus \{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$, un seul point de X :*
   3.1 *C = corps résiduel en ∞ est algébriquement clos, valué complet $|\mathbb{Q}_p$*

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. *On note* $X := X_1$.

Théorème

1. X_h *est un schéma noethérien régulier de dimension* 1
2. $X_h \simeq X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^h}$ *via* $\underbrace{(B^+)^{\varphi = p^d}}_{P_{1,d}} \hookrightarrow \underbrace{(B^+)^{\varphi^h = p^{hd}}}_{P_{h,hd}}$
3. $t \in P_{1,1} \setminus \{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$, *un seul point de* X *:*
   - 3.1 $C =$ *corps résiduel en* ∞ *est algébriquement clos, valué complet* $|\mathbb{Q}_p$
   - 3.2 $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \left\{(x^{(n)})_{n \geq 0} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_C,\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\right\}$

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. *On note* $X := X_1$.

Théorème

1. X_h *est un schéma noethérien régulier de dimension* 1
2. $X_h \simeq X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^h}$ *via* $\underbrace{(B^+)^{\varphi = p^d}}_{P_{1,d}} \hookrightarrow \underbrace{(B^+)^{\varphi^h = p^{hd}}}_{P_{h,hd}}$
3. $t \in P_{1,1} \setminus \{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$, *un seul point de* X *:*
   - 3.1 $C =$ *corps résiduel en* ∞ *est algébriquement clos, valué complet* $|\mathbb{Q}_p$
   - 3.2 $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \left\{(x^{(n)})_{n\geq 0} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_C,\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\right\} = \mathcal{O}_F$ *canoniquement*

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. *On note* $X := X_1$.

Théorème

1. X_h *est un schéma noethérien régulier de dimension* 1
2. $X_h \simeq X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^h}$ *via* $\underbrace{(B^+)^{\varphi = p^d}}_{P_{1,d}} \hookrightarrow \underbrace{(B^+)^{\varphi^h = p^{hd}}}_{P_{h,hd}}$
3. $t \in P_{1,1} \setminus \{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$, *un seul point de* X *:*
   - 3.1 $C =$ *corps résiduel en* ∞ *est algébriquement clos, valué complet* $|\mathbb{Q}_p$
   - 3.2 $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \left\{(x^{(n)})_{n\geq 0} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_C,\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\right\} = \mathcal{O}_F$ *canoniquement*
   - 3.3 $B^+_{cris} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} C$ *anneau de Fontaine associé,* $B^+ = \bigcap_{n\geq 1} \varphi^n(B^+_{cris})$ *canoniquement*

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. *On note* $X := X_1$.

Théorème

1. X_h *est un schéma noethérien régulier de dimension* 1
2. $X_h \simeq X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^h}$ *via* $\underbrace{(B^+)^{\varphi = p^d}}_{P_{1,d}} \hookrightarrow \underbrace{(B^+)^{\varphi^h = p^{hd}}}_{P_{h,hd}}$
3. $t \in P_{1,1} \setminus \{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$, *un seul point de* X *:*
   - 3.1 $C =$ *corps résiduel en* ∞ *est algébriquement clos, valué complet* $|\mathbb{Q}_p$
   - 3.2 $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \left\{(x^{(n)})_{n\geq 0} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_C,\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\right\} = \mathcal{O}_F$ *canoniquement*
   - 3.3 $B^+_{cris} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} C$ *anneau de Fontaine associé*, $B^+ = \bigcap_{n\geq 1} \varphi^n(B^+_{cris})$ *canoniquement*
   - 3.4 $\widehat{\mathcal{O}_{X,\infty}} = B^+_{dR} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} C$, $t =$ *uniformisante= période de* μ_{p^∞} *sur* $\mathcal{O}_C$

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. *On note* $X := X_1$.

Théorème

1. X_h *est un schéma noethérien régulier de dimension* 1
2. $X_h \simeq X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^h}$ *via* $\underbrace{(B^+)^{\varphi = p^d}}_{P_{1,d}} \hookrightarrow \underbrace{(B^+)^{\varphi^h = p^{hd}}}_{P_{h,hd}}$
3. $t \in P_{1,1} \setminus \{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$, *un seul point de* X *:*
   - 3.1 $C =$ *corps résiduel en* ∞ *est algébriquement clos, valué complet* $|\mathbb{Q}_p$
   - 3.2 $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \left\{(x^{(n)})_{n \geq 0} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_C, \ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\right\} = \mathcal{O}_F$ *canoniquement*
   - 3.3 $B^+_{cris} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} C$ *anneau de Fontaine associé,* $B^+ = \bigcap_{n \geq 1} \varphi^n(B^+_{cris})$ *canoniquement*
   - 3.4 $\widehat{\mathcal{O}_{X,\infty}} = B^+_{dR} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} C$, $t =$ *uniformisante= période de* μ_{p^∞} *sur* $\mathcal{O}_C$
   - 3.5 *Si* $B_e = B_{cris}^{\varphi = Id}$, $X \setminus \{\infty\} = Spec(B_e)$ *et* B_e *est anneau principal !*

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. On note $X := X_1$.

Théorème

1. *X_h est un schéma noethérien régulier de dimension* 1
2. $X_h \simeq X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^h}$ *via* $\underbrace{(B^+)^{\varphi = p^d}}_{P_{1,d}} \hookrightarrow \underbrace{(B^+)^{\varphi^h = p^{hd}}}_{P_{h,hd}}$
3. $t \in P_{1,1} \setminus \{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$, *un seul point de* X *:*
   - 3.1 $C =$ *corps résiduel en* ∞ *est algébriquement clos, valué complet* $|\mathbb{Q}_p$
   - 3.2 $\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \left\{(x^{(n)})_{n \geq 0} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_C,\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\right\} = \mathcal{O}_F$ *canoniquement*
   - 3.3 $B^+_{cris} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} C$ *anneau de Fontaine associé,* $B^+ = \bigcap_{n \geq 1} \varphi^n(B^+_{cris})$ *canoniquement*
   - 3.4 $\widehat{\mathcal{O}_{X,\infty}} = B^+_{dR} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} C$, $t =$ *uniformisante= période de* μ_{p^∞} *sur* $\mathcal{O}_C$
   - 3.5 *Si* $B_e = B^{\varphi = Id}_{cris}$, $X \setminus \{\infty\} = Spec(B_e)$ *et* B_e *est anneau principal !*
     En fait, $\deg = -v_\infty : B_e \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ *fait de* $(B_e, \deg)$ *un anneau « presque euclidien » non euclidien*

Courbe

Définition

$h \geq 1$, $X_h = Proj(P_h)$. On note $X := X_1$.

Théorème

1. *X_h est un schéma noethérien régulier de dimension 1*
2. *$X_h \simeq X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^h}$ via $\underbrace{(B^+)^{\varphi = p^d}}_{P_{1,d}} \hookrightarrow \underbrace{(B^+)^{\varphi^h = p^{hd}}}_{P_{h,hd}}$*
3. *$t \in P_{1,1} \setminus \{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$, un seul point de X :*
    - 3.1 *C = corps résiduel en ∞ est algébriquement clos, valué complet $|\mathbb{Q}_p$*
    - 3.2 *$\mathcal{R}(\mathcal{O}_C) = \left\{(x^{(n)})_{n \geq 0} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_C,\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\right\} = \mathcal{O}_F$ canoniquement*
    - 3.3 *$B^+_{cris} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} C$ anneau de Fontaine associé, $B^+ = \bigcap_{n \geq 1} \varphi^n(B^+_{cris})$ canoniquement*
    - 3.4 *$\widehat{\mathcal{O}_{X,\infty}} = B^+_{dR} \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} C$, t = uniformisante= période de μ_{p^∞} sur $\mathcal{O}_C$*
    - 3.5 *Si $B_e = B_{cris}^{\varphi = Id}$, $X \setminus \{\infty\} = Spec(B_e)$ et B_e est anneau principal !*
      En fait, $\deg = -v_\infty : B_e \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ fait de $(B_e, \deg)$ un anneau « presque euclidien »non euclidien
4. *Si $K|\mathbb{Q}_p$, $C = \widehat{\overline{K}}$, $F = Frac(\mathcal{R}(\mathcal{O}_C))$, X munie canoniquement de $\infty \in X$ et*

$$X \circlearrowleft Gal(\overline{K}|K) \quad \text{stabilise } \infty$$

La courbe

5 . Tous les points fermés de X sont de la forme précédente, de degré 1, et $\forall f \in \mathbb{Q}_p(X)^\times$, $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$.

$$\mathbb{P}\big((B^+)^{\varphi=p}\big) = \big(P_{1,1} \setminus \{0\}\big)/\mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\sim} |X|.$$

La courbe

5 . Tous les points fermés de X sont de la forme précédente, de degré 1, et $\forall f \in \mathbb{Q}_p(X)^\times$, $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$.

$$\mathbb{P}\big((B^+)^{\varphi=p}\big) = \big(P_{1,1} \setminus \{0\}\big)/\mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\sim} |X|.$$

Même propriétés pour X_h, en remplaçant $t \in P_{1,1}$ par $t_h \in P_{h,1}$.
$t_h =$ période d'un groupe de Lubin-Tate associé à $\mathbb{Q}_{p^h}$

La courbe

5 . Tous les points fermés de X sont de la forme précédente, de degré 1, et $\forall f \in \mathbb{Q}_p(X)^\times$, $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$.

$$\mathbb{P}\big((B^+)^{\varphi=p}\big) = \big(P_{1,1} \setminus \{0\}\big)/\mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\sim} |X|.$$

Même propriétés pour X_h, en remplaçant $t \in P_{1,1}$ par $t_h \in P_{h,1}$.
t_h = période d'un groupe de Lubin-Tate associé à $\mathbb{Q}_{p^h}$
Le morphisme

$$\pi_h : X_h \to X$$

est étale fini galoisien de groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^h}|\mathbb{Q}_p)$. Si $V^+(t) = \infty$,

$$\pi_h^{-1}(\infty) = \{\infty_0, \dots, \infty_{h-1}\}$$

où t_h période d'un Lubin-Tate,

$$\{\infty_i\} = V^+(\varphi^i(t_h))$$

et

$$t = \mathrm{Norme}_{X_h/X}(t_h) = \prod_{i=0}^{h-1} \varphi^i(t_h)$$

Uniformisation rigide analytique

Uniformisation rigide analytique

$x = \sum_{n \geq 0} [x_n] p^n \in W(\mathcal{O}_F)$ est dit primitif de degré 1 si $x_0 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ et $x_1 \in \mathcal{O}_F^{\times}$. Par exemple, $x = [z] - p$ avec $z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

Uniformisation rigide analytique

$x = \sum_{n \geq 0} [x_n] p^n \in W(\mathcal{O}_F)$ est dit primitif de degré 1 si $x_0 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ et $x_1 \in \mathcal{O}_F^\times$. Par exemple, $x = [z] - p$ avec $z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

$Y = \left\{ \text{Idéaux de } W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right] \text{ engendrés par un élément primitif de degré 1} \right\}$

Uniformisation rigide analytique

$x = \sum_{n\geq 0}[x_n]p^n \in W(\mathcal{O}_F)$ est dit primitif de degré 1 si $x_0 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ et $x_1 \in \mathcal{O}_F^\times$. Par exemple, $x = [z] - p$ avec $z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

$$Y = \left\{\text{Idéaux de } W(\mathcal{O}_F)\left[\tfrac{1}{p}\right] \text{ engendrés par un élément primitif de degré } 1\right\}$$

Théorème

1. *$Y \subset \mathrm{Spm}\left(W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]\right)$ et $\forall \mathfrak{m} \in Y$, $C_\mathfrak{m} = W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]/\mathfrak{m}$ est un corps valué complet algébriquement clos extension de $\mathbb{Q}_p$*

Uniformisation rigide analytique

$x = \sum_{n\geq 0}[x_n]p^n \in W(\mathcal{O}_F)$ est dit primitif de degré 1 si $x_0 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ et $x_1 \in \mathcal{O}_F^\times$. Par exemple, $x = [z] - p$ avec $z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

$Y = \left\{ \text{Idéaux de } W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right] \text{ engendrés par un élément primitif de degré } 1 \right\}$

Théorème

1. *$Y \subset \mathrm{Spm}\big(W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]\big)$ et $\forall \mathfrak{m} \in Y$, $C_\mathfrak{m} = W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]/\mathfrak{m}$ est un corps valué complet algébriquement clos extension de $\mathbb{Q}_p$*
2. *$\forall \mathfrak{m} \in Y$, $\exists z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$, $\mathfrak{m} = ([z] - p)$.*

Uniformisation rigide analytique

$x = \sum_{n\geq 0}[x_n]p^n \in W(\mathcal{O}_F)$ est dit primitif de degré 1 si $x_0 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ et $x_1 \in \mathcal{O}_F^\times$. Par exemple, $x = [z] - p$ avec $z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

$Y = \left\{\text{Idéaux de } W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right] \text{ engendrés par un élément primitif de degré } 1\right\}$

Théorème

1. *$Y \subset \mathrm{Spm}\big(W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]\big)$ et $\forall \mathfrak{m} \in Y$, $C_\mathfrak{m} = W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]/\mathfrak{m}$ est un corps valué complet algébriquement clos extension de $\mathbb{Q}_p$*
2. *$\forall \mathfrak{m} \in Y$, $\exists z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$, $\mathfrak{m} = ([z] - p)$.*
3. *Si pour $\epsilon \in 1 + \mathfrak{m}_F \setminus \{1\}$ on note*

$$u_\epsilon = 1 + \left[\epsilon^{1/p}\right] + \cdots + \left[\epsilon^{\frac{p-1}{p}}\right],$$

u_ϵ est primitif de degré 1 et

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathring{\mathbb{B}}(F) \setminus \{0\}\big)/\mathbb{Z}_p^\times & \xrightarrow{\sim} & Y \\ \alpha & \longmapsto & \big(u_{1+\alpha}\big). \end{array}$$

Uniformisation rigide analytique

$x = \sum_{n \geq 0} [x_n] p^n \in W(\mathcal{O}_F)$ est dit primitif de degré 1 si $x_0 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ et $x_1 \in \mathcal{O}_F^\times$. Par exemple, $x = [z] - p$ avec $z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

$Y = \left\{ \text{Idéaux de } W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right] \text{ engendrés par un élément primitif de degré } 1 \right\}$

Théorème

1. *$Y \subset \mathrm{Spm}\left(W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]\right)$ et $\forall \mathfrak{m} \in Y$, $C_\mathfrak{m} = W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]/\mathfrak{m}$ est un corps valué complet algébriquement clos extension de $\mathbb{Q}_p$*
2. *$\forall \mathfrak{m} \in Y$, $\exists z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$, $\mathfrak{m} = ([z] - p)$.*
3. *Si pour $\epsilon \in 1 + \mathfrak{m}_F \setminus \{1\}$ on note*

$$u_\epsilon = 1 + \left[\epsilon^{1/p}\right] + \cdots + \left[\epsilon^{\frac{p-1}{p}}\right],$$

   u_ϵ est primitif de degré 1 et

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathring{\mathbb{B}}(F) \setminus \{0\}\right)/\mathbb{Z}_p^\times & \xrightarrow{\sim} & Y \\ \alpha & \longmapsto & \left(u_{1+\alpha}\right). \end{array}$$

4. *$Y \subset \mathcal{M}\left(W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]\right)$, l'espace de Berkovich des vecteurs de Witt, « $Y =$ points classiques », « $v_r =$ Norme de Gauss »*

Uniformisation rigide analytique

5.

$$\begin{array}{rcl} Y/\varphi^{h\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sim} & |X_h| \\ ([z]-p) \bmod \varphi^{h\mathbb{Z}} & \longmapsto & V^+(t_h) \end{array}$$

où

$$t_h = « \prod_{n\in\mathbb{Z}} \left(1 - \frac{\left[z^{p^{nh}}\right]}{p}\right) » = \prod_{n\geq 0} \left(1 - \frac{\left[z^{p^{nh}}\right]}{p}\right) . \underbrace{« \prod_{n<0} \left(1 - \frac{\left[z^{p^{nh}}\right]}{p}\right) »}_{\substack{\text{produit non convergeant} \\ \text{défini de façon détournée}}}$$

Fibrés vectoriels

Fibrés en droite

$h \geq 1, \ d \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}_{X_h}(d) = \widetilde{P_h[d]} \text{ fibré en droites sur } X_h$$

$h \geq 1,\ d \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}_{X_h}(d) = \widetilde{P_h[d]} \text{ fibré en droites sur } X_h$$

$$P_h = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X_h, \mathcal{O}_{X_h}(d))$$

$h \geq 1,\ d \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}_{X_h}(d) = \widetilde{P_h[d]} \ \text{ fibré en droites sur } X_h$$

$$P_h = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X_h, \mathcal{O}_{X_h}(d))$$

Théorème

1. $d \mapsto [\mathcal{O}_X(d)]$ *induit un isomorphisme* $\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\simeq"'] & Pic(X) \arrow[l, bend right, "\deg"'] \end{tikzcd}$

$h \geq 1,\ d \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}_{X_h}(d) = \widetilde{P_h[d]} \ \text{ fibré en droites sur } X_h$$

$$P_h = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X_h, \mathcal{O}_{X_h}(d))$$

Théorème

1. $d \mapsto [\mathcal{O}_X(d)]$ *induit un isomorphisme* $\mathbb{Z} \underset{\simeq}{\overset{\deg}{\rightleftarrows}} Pic(X)$
2. $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ *« genre 0 »comme* $\mathbb{P}^1$

$h \geq 1$, $d \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}_{X_h}(d) = \widetilde{P_h[d]} \text{ fibré en droites sur } X_h$$

$$P_h = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X_h, \mathcal{O}_{X_h}(d))$$

Théorème

1. $d \mapsto [\mathcal{O}_X(d)]$ *induit un isomorphisme* $\mathbb{Z} \underset{\simeq}{\overset{\deg}{\rightleftarrows}} Pic(X)$
2. $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ *« genre 0 »comme* $\mathbb{P}^1$
3. $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) \neq 0$ *différent de* $\mathbb{P}^1$
   $\rightarrow$ *lié au fait que* $(B_e, \deg)$ *pas euclidien*
   $\rightarrow$ *si* $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_X(1) \to 0$ *non triviale,* $\mathcal{E}$ *semi-stable de pente* $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Fibrés vectoriels

Définition

Pour $d \in \mathbb{Z}$, $h \geq 1$, $\pi_h : X_h \to X$,

$$\mathcal{O}_X(d, h) = \pi_{h*}\mathcal{O}_{X_h}(d)$$

fibré de rang h *et de degré* d.

Fibrés vectoriels

Définition

Pour $d \in \mathbb{Z}$, $h \geq 1$, $\pi_h : X_h \to X$,

$$\mathcal{O}_X(d, h) = \pi_{h*}\mathcal{O}_{X_h}(d)$$

fibré de rang h *et de degré* d. *Pour* $\lambda \in \mathbb{Q}$, *si* $\lambda = \frac{d}{h}$ *avec* $(d, h) = 1$,

$$O_X(\lambda) = \mathcal{O}_X(d, h).$$

On a $\mu(\mathcal{O}_X(\lambda)) = \lambda$.

Fibrés vectoriels

Définition

Pour $d \in \mathbb{Z}$, $h \geq 1$, $\pi_h : X_h \to X$,

$$\mathcal{O}_X(d,h) = \pi_{h*}\mathcal{O}_{X_h}(d)$$

fibré de rang h *et de degré* d*. Pour* $\lambda \in \mathbb{Q}$*, si* $\lambda = \frac{d}{h}$ *avec* $(d,h) = 1$,

$$O_X(\lambda) = \mathcal{O}_X(d,h).$$

On a $\mu(\mathcal{O}_X(\lambda)) = \lambda$.

Théorème

1. *Les fibrés semi-stables de pente* λ *sur* X *sont les sommes directes de fibrés* $\mathcal{O}_X(\lambda)$
2. *La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel sur* X *est scindée*
3. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n | n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{Q}\} & \to & \{\text{classes d'iso. de fibrés sur } X\} \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & \left[\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X(\lambda_i)\right] \end{array}$$

est une bijection.

Faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible

$K|\mathbb{Q}_p$, valuation discrète corps résiduel parfait. $K_0 = W(k_K)_{\mathbb{Q}}$.

$\varphi - \mathrm{Mod}_{K_0} = \mathrm{Isocristaux} = \{(D, \varphi)\}$

Faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible

$K|\mathbb{Q}_p$, valuation discrète corps résiduel parfait. $K_0 = W(k_K)_{\mathbb{Q}}$.

$\varphi - \mathsf{Mod}_{K_0} = \mathsf{Isocristaux} = \{(D, \varphi)\}$

Deux fonctions additives

$$t_N, \mathrm{ht} : \varphi - \mathsf{Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

où $t_N =$ point terminal de Newton et $\mathrm{ht} = \dim_{K_0} D$.

Faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible

$K|\mathbb{Q}_p$, valuation discrète corps résiduel parfait. $K_0 = W(k_K)_{\mathbb{Q}}$.

$\varphi - \mathsf{Mod}_{K_0} = \mathsf{Isocristaux} = \{(D, \varphi)\}$

Deux fonctions additives

$$t_N, \mathrm{ht} : \varphi - \mathsf{Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

où $t_N =$ point terminal de Newton et $\mathrm{ht} = \dim_{K_0} D$.

$\varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0} = \varphi$-modules filtrés de Fontaine $= \{(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)\}$

Faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible

$K|\mathbb{Q}_p$, valuation discrète corps résiduel parfait. $K_0 = W(k_K)_{\mathbb{Q}}$.

$\varphi - \mathsf{Mod}_{K_0} = \text{Isocristaux} = \{(D, \varphi)\}$

Deux fonctions additives

$$t_N, \mathrm{ht} : \varphi - \mathsf{Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

où $t_N =$ point terminal de Newton et $\mathrm{ht} = \dim_{K_0} D$.

$\varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0} = \varphi$-modules filtrés de Fontaine $= \{(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)\}$
Trois fonctions additives

$$t_H, t_N, \mathrm{ht} : \varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

où $t_H =$ point terminal de Hodge $= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K \mathrm{Gr}^i D_K$.

Faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible

$K|\mathbb{Q}_p$, valuation discrète corps résiduel parfait. $K_0 = W(k_K)_{\mathbb{Q}}$.

$\varphi - \mathsf{Mod}_{K_0} =$ Isocristaux $= \{(D, \varphi)\}$

Deux fonctions additives

$$t_N, \mathrm{ht} : \varphi - \mathsf{Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

où $t_N =$ point terminal de Newton et $\mathrm{ht} = \dim_{K_0} D$.

$\varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0} = \varphi$-modules filtrés de Fontaine $= \{(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)\}$
Trois fonctions additives

$$t_H, t_N, \mathrm{ht} : \varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

où $t_H =$ point terminal de Hodge $= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K \mathrm{Gr}^i D_K$.
On pose

$$\deg = t_H - t_N \text{ et } \mu = \frac{\deg}{\mathrm{ht}}.$$

$\rightarrow$ filtrations de Harder-Narasimhan pour μ dans la catégorie exacte $\varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0}$.

Définition (Fontaine)

Faiblements admissibles = objets semi-stables de pente 0 dans $\varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0}$.

Faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible

$$\begin{array}{rcl} V_{cris} : \varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \\ (D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & \mathrm{Fil}^0(D \otimes B_{cris})^{\varphi = Id}. \end{array}$$

Faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible

$$\begin{array}{rcl} V_{cris} : \varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \\ (D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & \mathrm{Fil}^0(D \otimes B_{cris})^{\varphi = Id}. \end{array}$$

Définition (Fontaine)

$A \in \varphi - ModFil_{K/K_0}$ est admissible si $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{cris}(A) = \mathrm{ht}(A)$.

Théorème (Colmez, Fontaine)

Faiblement admissible $\Leftrightarrow$ admissible.

$\rightarrow$ Preuve avec la courbe

Faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible

$\mathrm{Fib}_X^{G_K}$:= fibrés G_K-équivariants sur X

Foncteur

$$\begin{array}{ccc} \varphi-\mathrm{Mod}_{K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D,\varphi) & \longmapsto & \mathcal{E}(D,\varphi) = \Big(\underbrace{\bigoplus_{d\geq 0} (D\otimes B^+)^{\varphi=p^d}}_{P_1=\oplus_{d\geq 0}(B^+)^{\varphi=p^d}-\text{module gradué}} \Big)^{\sim} \end{array}$$

Faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible

$\mathrm{Fib}_X^{G_K}$:= fibrés G_K-équivariants sur X

Foncteur

$$\begin{array}{rcl} \varphi - \mathrm{Mod}_{K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D,\varphi) & \longmapsto & \mathcal{E}(D,\varphi) = \widetilde{\left(\underbrace{\bigoplus_{d\geq 0} (D\otimes B^+)^{\varphi=p^d}}_{P_1=\oplus_{d\geq 0}(B^+)^{\varphi=p^d}-\text{module gradué}} \right)} \end{array}$$

$$\mathcal{E}(D,\varphi) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}} \mathcal{O}_X(-\lambda)^{m_\lambda}$$

où m_λ est la multiplicité de λ dans la décomposition de Dieudonné-Manin de (D,φ). De plus,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(\mathcal{E}(D,\varphi)) & = & \mathrm{ht}(D,\varphi) \\ \deg(\mathcal{E}(D,\varphi)) & = & -t_N(D,\varphi). \end{array}$$

Faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible

$\mathrm{Fib}_X^{G_K} :=$ fibrés G_K-équivariants sur X

Foncteur

$$\begin{array}{ccc} \varphi - \mathrm{Mod}_{K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D,\varphi) & \longmapsto & \mathcal{E}(D,\varphi) = \left(\underbrace{\bigoplus_{d\geq 0} (D\otimes B^+)^{\varphi=p^d}}_{P_1=\oplus_{d\geq 0}(B^+)^{\varphi=p^d}-\text{module gradué}} \right)^{\sim} \end{array}$$

$$\mathcal{E}(D,\varphi) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}} \mathcal{O}_X(-\lambda)^{m_\lambda}$$

où m_λ est la multiplicité de λ dans la décomposition de Dieudonné-Manin de (D,φ). De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(\mathcal{E}(D,\varphi)) &= \mathrm{ht}(D,\varphi) \\ \deg(\mathcal{E}(D,\varphi)) &= -t_N(D,\varphi). \end{aligned}$$

On a $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty} = B_{dR}^+$. Alors,

$$\widehat{\mathcal{E}(D,\varphi)}_\infty = D\otimes B_{dR}^+.$$

$$\varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0} \longrightarrow \{(\mathcal{E},\Lambda) \mid \mathcal{E} \in \mathsf{Fib}_X^{G_K},\ \Lambda \subset \widehat{\mathcal{E}_\infty}[\tfrac{1}{t}] \text{ réseau } G_K\text{-invariant}\}$$

$$(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \longmapsto \big(\mathcal{E}(D,\varphi), \mathrm{Fil}^0(D\otimes B_{dR})\big) \qquad \text{où } D\otimes B_{dR}^+ = \mathcal{E}\widehat{(D,\varphi)}_\infty$$

$$\begin{tikzcd} \varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0} \arrow[r] & \{(\mathcal{E},\Lambda) \mid \mathcal{E} \in \mathsf{Fib}_X^{G_K},\ \Lambda \subset \widehat{\mathcal{E}_\infty}[\frac{1}{t}] \text{ réseau } G_K\text{-invariant}\} \arrow[d, "\text{Hecke,modification du fibré en}\infty"] \\ & \mathsf{Fib}_X^{G_K} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \arrow[r, mapsto] & \big(\mathcal{E}(D,\varphi),\mathrm{Fil}^0(D\otimes B_{dR})\big) \arrow[d, mapsto] \\ & \mathcal{E}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \end{tikzcd}$$

où $D\otimes B_{dR}^+ = \mathcal{E}\widehat{(D,\varphi)}_\infty$

$$
\begin{tikzcd}
\varphi-\mathrm{ModFil}_{K/K_0} \arrow[r] \arrow[ddr, bend right=10, "V_{cris}"'] & \{(\mathcal{E},\Lambda) \mid \mathcal{E}\in \mathrm{Fib}_X^{G_K},\ \Lambda\subset \widehat{\mathcal{E}_\infty}[\frac{1}{t}] \text{ réseau } G_K\text{-invariant}\} \arrow[d, "\text{Hecke,modification du fibré en}\infty"] \\
& \mathrm{Fib}_X^{G_K} \arrow[d, "H^0(X,-)"] \\
& \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \arrow[r, mapsto] & \big(\mathcal{E}(D,\varphi),\mathrm{Fil}^0(D\otimes B_{dR})\big) \arrow[d, mapsto] \\
& \mathcal{E}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)
\end{tikzcd}
\qquad \text{où } D\otimes B_{dR}^+=\mathcal{E}\widehat{(D,\varphi)}_\infty
$$

$$
\begin{tikzcd}
\varphi-\mathrm{ModFil}_{K/K_0} \arrow[r] \arrow[ddr, bend right, "V_{cris}"'] & \left\{(\mathcal{E},\Lambda) \mid \mathcal{E}\in \mathrm{Fib}_X^{G_K},\ \Lambda\subset \widehat{\mathcal{E}_\infty}[\tfrac{1}{t}] \text{ réseau } G_K\text{-invariant}\right\} \arrow[d, "\text{Hecke,modification du fibré en}\infty"] \\
 & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \arrow[d, "H^0(X,-)"] \\
 & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \arrow[r, mapsto] & \left(\mathcal{E}(D,\varphi),\mathrm{Fil}^0(D\otimes B_{dR})\right) \arrow[d, mapsto] \\
 & \mathcal{E}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)
\end{tikzcd}
\qquad \text{où } D\otimes B_{dR}^+ = \mathcal{E}\widehat{(D,\varphi)}_\infty
$$

$$
\begin{aligned}
\deg(\mathcal{E}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)) &= \underbrace{\deg(\mathcal{E}(D,\varphi))}_{-t_N(D,\varphi)} + \underbrace{[\mathrm{Fil}^0 D\otimes B_{dR} : D\otimes B_{dR}^+]}_{t_H(D,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)} \\
&= \deg(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \\
\mathrm{rg}(\mathcal{E}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)) &= \mathrm{ht}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)
\end{aligned}
$$

Soit $A \in \varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0}$.

$(B^+)^{G_K} = K_0 \Rightarrow$ sous-objets de $A \xrightarrow{\sim}$ sous-objets G_K-invariants de $\mathcal{E}(A)$

Soit $A \in \varphi - \mathrm{ModFil}_{K/K_0}$.

$(B^+)^{G_K} = K_0 \Rightarrow$ sous-objets de $A \xrightarrow{\sim}$ sous-objets G_K-invariants de $\mathcal{E}(A)$
De plus, la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}(A)$ est G_K-invariante

$\Longrightarrow HN(A) = HN(\mathcal{E}(A))$.

Soit $A \in \varphi - \mathrm{ModFil}_{K/K_0}$.

$(B^+)^{G_K} = K_0 \Rightarrow$ sous-objets de $A \xrightarrow{\sim}$ sous-objets G_K-invariants de $\mathcal{E}(A)$
De plus, la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}(A)$ est G_K-invariante

$\Longrightarrow HN(A) = HN(\mathcal{E}(A))$.

A faiblement admissible $\quad \Leftrightarrow \quad A$ s.s. de pente 0

Soit $A \in \varphi - \mathrm{ModFil}_{K/K_0}$.

$(B^+)^{G_K} = K_0 \Rightarrow$ sous-objets de $A \xrightarrow{\sim}$ sous-objets G_K-invariants de $\mathcal{E}(A)$
De plus, la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}(A)$ est G_K-invariante

$\Longrightarrow HN(A) = HN(\mathcal{E}(A))$.

$$
\begin{aligned}
A \text{ faiblement admissible} \quad &\Leftrightarrow \quad A \text{ s.s. de pente } 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(A) \text{ s.s. de pente } 0 \quad (HN(A) = HN(\mathcal{E}(A)))
\end{aligned}
$$

Soit $A \in \varphi - \mathrm{ModFil}_{K/K_0}$.

$(B^+)^{G_K} = K_0 \Rightarrow$ sous-objets de $A \xrightarrow{\sim}$ sous-objets G_K-invariants de $\mathcal{E}(A)$
De plus, la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}(A)$ est G_K-invariante

$\Longrightarrow HN(A) = HN(\mathcal{E}(A))$.

$$\begin{array}{lcl} A \text{ faiblement admissible} & \Leftrightarrow & A \text{ s.s. de pente } 0 \\ & \Leftrightarrow & \mathcal{E}(A) \text{ s.s. de pente } 0 \;\; (HN(A) = HN(\mathcal{E}(A))) \\ & \Leftrightarrow & \mathcal{E}(A) \simeq \mathcal{O}_X^{\mathrm{rg}(A)} = \mathcal{O}_X^{\mathrm{ht}(A)} \;\; \text{(theo. classification fibrés)} \end{array}$$

Soit $A \in \varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0}$.

$(B^+)^{G_K} = K_0 \Rightarrow$ sous-objets de $A \xrightarrow{\sim}$ sous-objets G_K-invariants de $\mathcal{E}(A)$
De plus, la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}(A)$ est G_K-invariante

$\Longrightarrow HN(A) = HN(\mathcal{E}(A))$.

$$
\begin{array}{lcl}
A \text{ faiblement admissible} & \Leftrightarrow & A \text{ s.s. de pente } 0 \\
 & \Leftrightarrow & \mathcal{E}(A) \text{ s.s. de pente } 0 \ \ (HN(A) = HN(\mathcal{E}(A))) \\
 & \Leftrightarrow & \mathcal{E}(A) \simeq \mathcal{O}_X^{\mathrm{rg}(A)} = \mathcal{O}_X^{\mathrm{ht}(A)} \ \ \text{(theo. classification fibrés)} \\
 & \Leftrightarrow & \dim_{\mathbb{Q}_p} \underbrace{H^0(X, \mathcal{E}(A))}_{V_{cris}(A)} = \mathrm{rg}(\mathcal{E}(A)) = \mathrm{ht}(A)
\end{array}
$$

Soit $A \in \varphi - \mathsf{ModFil}_{K/K_0}$.

$(B^+)^{G_K} = K_0 \Rightarrow$ sous-objets de $A \xrightarrow{\sim}$ sous-objets G_K-invariants de $\mathcal{E}(A)$
De plus, la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}(A)$ est G_K-invariante

$\Longrightarrow HN(A) = HN(\mathcal{E}(A))$.

$$\begin{aligned} A \text{ faiblement admissible} \quad &\Leftrightarrow \quad A \text{ s.s. de pente } 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(A) \text{ s.s. de pente } 0 \ \ (HN(A) = HN(\mathcal{E}(A))) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{E}(A) \simeq \mathcal{O}_X^{\mathrm{rg}(A)} = \mathcal{O}_X^{\mathrm{ht}(A)} \ \ \text{(theo. classification fibrés)} \\ &\Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{Q}_p} \underbrace{H^0(X, \mathcal{E}(A))}_{V_{cris}(A)} = \mathrm{rg}(\mathcal{E}(A)) = \mathrm{ht}(A) \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ admissible} \end{aligned}$$

De Rham $\Rightarrow$ potentiellement s.s.

$B^+_{\log} = B^+\big[\log[z]\big]$ où $z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

$$\varphi, N, G_K \circlearrowright B^+_{\log}$$

De Rham $\Rightarrow$ potentiellement s.s.

$B^+_{\log} = B^+\big[\log[z]\big]$ où $z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

$$\varphi, N, G_K \circlearrowright B^+_{\log}$$

$$\begin{array}{ccc} (\varphi, N) - \mathrm{Mod}_{K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N) & \longmapsto & \mathcal{E}(D, \varphi, N) = \Big(\underbrace{\bigoplus_{d \geq 0} (D \otimes B^+_{\log})^{\varphi = p^d, N=0}}_{P_1 = \oplus_{d \geq 0} (B^+_{\log})^{\varphi = p^d, N=0} - \text{module gradué}} \Big)^{\sim} \end{array}$$

De Rham $\Rightarrow$ potentiellement s.s.

$B^+_{\log} = B^+\big[\log[z]\big]$ où $z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

$$\varphi, N, G_K \circlearrowright B^+_{\log}$$

$$\begin{array}{ccc} (\varphi, N) - \mathrm{Mod}_{K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N) & \longmapsto & \mathcal{E}(D,\varphi,N) = \Big(\underbrace{\bigoplus_{d\geq 0} (D \otimes B^+_{\log})^{\varphi = p^d, N=0}}_{P_1 = \oplus_{d\geq 0}(B^+_{\log})^{\varphi=p^d, N=0} - \text{module gradué}} \Big)^{\sim} \end{array}$$

Utilisant la filtration pour modifier le fibré à l'∞ :

$$\begin{array}{ccc} (\varphi, N) - \mathrm{ModFil}_{K/K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & \mathcal{E}(D,\varphi,N,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \end{array}$$

De Rham $\Rightarrow$ potentiellement s.s.

$B^+_{\log} = B^+\big[\log[z]\big]$ où $z \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$.

$$\varphi, N, G_K \circlearrowright B^+_{\log}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi, N) - \mathrm{Mod}_{K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N) & \longmapsto & \mathcal{E}(D, \varphi, N) = \widetilde{\Bigg(\underbrace{\bigoplus_{d \geq 0} (D \otimes B^+_{\log})^{\varphi = p^d, N=0}}_{P_1 = \oplus_{d \geq 0} (B^+_{\log})^{\varphi = p^d, N=0} - \text{module gradué}} \Bigg)} \end{array}$$

Utilisant la filtration pour modifier le fibré à l'∞ :

$$\begin{array}{rcl} (\varphi, N) - \mathrm{ModFil}_{K/K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & \mathcal{E}(D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) \end{array}$$

Si $L|K$ galoisienne finie on obtient un foncteur :

$$\begin{array}{rcl} (\varphi, N, \mathrm{Gal}(L|K)) - \mathrm{ModFil}_{L/L_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & \mathcal{E}(D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) \end{array}$$

(l'action de $\mathrm{Gal}(L|K)$ définit une « donnée de descente »de $\mathrm{Fib}_X^{G_L}$ à $\mathrm{Fib}_X^{G_K}$.

De Rham $\Rightarrow$ potentiellement s.s.

Définition

Un $\mathcal{E} \in Fib_X^{G_K}$ est de De Rham si le fibré G_K-équivariant $\widehat{\mathcal{E}}_\infty[\frac{1}{t}]$ sur le disque épointé $Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}[\frac{1}{t}]) = Spec(B_{dR})$ est plat i.e. de la forme $V \otimes_K B_{dR}$.

De Rham $\Rightarrow$ potentiellement s.s.

Définition

Un $\mathcal{E} \in Fib_X^{G_K}$ est de De Rham si le fibré G_K-équivariant $\widehat{\mathcal{E}}_\infty[\frac{1}{t}]$ sur le disque épointé $Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}[\frac{1}{t}]) = Spec(B_{dR})$ est plat i.e. de la forme $V \otimes_K B_{dR}$.

Théorème

Le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{L|K} (\varphi, N, Gal(L|K)) - ModFil_{L/L_0} & \longrightarrow & Fib_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & \mathcal{E}(D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) \end{array}$$

est pleinement fidèle d'image essentielle les fibrés G_K-équivariants de De Rham.

De Rham $\Rightarrow$ potentiellement s.s.

Définition

Un $\mathcal{E} \in Fib_X^{G_K}$ est de De Rham si le fibré G_K-équivariant $\widehat{\mathcal{E}}_\infty[\frac{1}{t}]$ sur le disque épointé $Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}[\frac{1}{t}]) = Spec(B_{dR})$ est plat i.e. de la forme $V \otimes_K B_{dR}$.

Théorème

Le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{L|K} (\varphi, N, Gal(L|K)) - ModFil_{L/L_0} & \longrightarrow & Fib_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & \mathcal{E}(D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) \end{array}$$

est pleinement fidèle d'image essentielle les fibrés G_K-équivariants de De Rham.

En spécialisant aux objets s.s. de pente 0 on obtient :

$$\text{De Rham} \Leftrightarrow \text{potentiellement s.s.}$$

Plan de la preuve

La pleine fidélité du foncteur

$$\bigcup_{L|K} (\varphi, N, \mathrm{Gal}(L|K)) - \mathrm{ModFil}_{L/L_0} \longrightarrow \mathrm{Fib}_X^{G_K}$$

est facile.

Plan de la preuve

La pleine fidélité du foncteur

$$\bigcup_{L|K} (\varphi, N, \mathrm{Gal}(L|K)) - \mathrm{ModFil}_{L/L_0} \longrightarrow \mathrm{Fib}_X^{G_K}$$

est facile.

Le théorème se ramène alors à prouver que le foncteur sans modification du fibré à l'∞

$$\begin{array}{rcl} \bigcup_{L|K} (\varphi, N, \mathrm{Gal}(L|K)) - \mathrm{Mod}_{L_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N) & \longrightarrow & \mathcal{E}(D, \varphi, N) \end{array}$$

est d'image essentielle les $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$ tels que $\widehat{\mathcal{E}}_\infty$ est plat.

Plan de la preuve

La pleine fidélité du foncteur

$$\bigcup_{L|K} (\varphi, N, \mathrm{Gal}(L|K)) - \mathrm{ModFil}_{L/L_0} \longrightarrow \mathrm{Fib}_X^{G_K}$$

est facile.

Le théorème se ramène alors à prouver que le foncteur sans modification du fibré à l'∞

$$\begin{array}{rcl} \bigcup_{L|K} (\varphi, N, \mathrm{Gal}(L|K)) - \mathrm{Mod}_{L_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N) & \longrightarrow & \mathcal{E}(D, \varphi, N) \end{array}$$

est d'image essentielle les $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$ tels que $\widehat{\mathcal{E}}_\infty$ est plat.

Soit $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$ un tel fibré.
Supposons d'abord $\mathcal{E}$ semi-stable de pente λ i.e. $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}$ comme fibré.

Plan de la preuve

La pleine fidélité du foncteur

$$\bigcup_{L|K} (\varphi, N, \mathrm{Gal}(L|K)) - \mathrm{ModFil}_{L/L_0} \longrightarrow \mathrm{Fib}_X^{G_K}$$

est facile.

Le théorème se ramène alors à prouver que le foncteur sans modification du fibré à l'∞

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{L|K} (\varphi, N, \mathrm{Gal}(L|K)) - \mathrm{Mod}_{L_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N) & \longrightarrow & \mathcal{E}(D, \varphi, N) \end{array}$$

est d'image essentielle les $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$ tels que $\widehat{\mathcal{E}}_\infty$ est plat.

Soit $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$ un tel fibré.
Supposons d'abord $\mathcal{E}$ semi-stable de pente λ i.e. $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}$ comme fibré. Le fibré $\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}$ possède une structure G_K-équivariante canonique et donc, comme fibré G_K-équivariant

$$\mathcal{E} \simeq \left(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\right) \overset{G_K}{\bigwedge} \rho$$

où $\rho \in Z^1\big(G_K, \mathrm{Aut}\big(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\big)\big)$, $\lambda = \frac{d}{h}$

$$\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\big) = \mathrm{GL}_n(D_\lambda) \subset \mathrm{GL}_{nh}(\mathbb{Q}_p)$$

Plan de la preuve

$$\mathcal{E} \simeq \left(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\right) \overset{G_K}{\bigwedge} \rho$$

où

$$\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\big) = \mathrm{GL}_n(D_\lambda) \subset \mathrm{GL}_{nh}(\mathbb{Q}_p)$$

Plan de la preuve

$$\mathcal{E} \simeq \left(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\right) \overset{G_K}{\bigwedge} \rho$$

où

$$\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\big) = \mathrm{GL}_n(D_\lambda) \subset \mathrm{GL}_{nh}(\mathbb{Q}_p)$$

$\widehat{\mathcal{E}}_\infty$ plat $\iff$ ρ De Rham à poids de H.T. 0

Plan de la preuve

$$\mathcal{E} \simeq \left(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\right) \overset{G_K}{\bigwedge} \rho$$

où

$$\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\big) = \mathrm{GL}_n(D_\lambda) \subset \mathrm{GL}_{nh}(\mathbb{Q}_p)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{E}}_\infty \text{ plat} \quad &\Longleftrightarrow \quad \rho \text{ De Rham à poids de H.T. } 0 \\ &\overset{\text{(Sen)}}{\Longleftrightarrow} \quad \rho \text{ d'image finie} \end{aligned}$$

Plan de la preuve

$$\mathcal{E} \simeq \left(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\right) \overset{G_K}{\bigwedge} \rho$$

où

$$\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\big) = \mathrm{GL}_n(D_\lambda) \subset \mathrm{GL}_{nh}(\mathbb{Q}_p)$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{E}}_\infty \text{ plat} \quad & \Longleftrightarrow \quad \rho \text{ De Rham à poids de H.T. } 0 \\
& \overset{\text{(Sen)}}{\Longleftrightarrow} \quad \rho \text{ d'image finie} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists L|K \text{ finie } \mathrm{BC}_{L/K}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n} \text{ dans } \text{ dans } \mathrm{Fib}_X^{G_L}
\end{aligned}$$

Plan de la preuve

$$\mathcal{E} \simeq \left(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\right) \overset{G_K}{\bigwedge} \rho$$

où

$$\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n}\big) = \mathrm{GL}_n(D_\lambda) \subset \mathrm{GL}_{nh}(\mathbb{Q}_p)$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{E}}_\infty \text{ plat} \quad &\Longleftrightarrow \quad \rho \text{ De Rham à poids de H.T. } 0 \\
&\overset{\text{(Sen)}}{\Longleftrightarrow} \quad \rho \text{ d'image finie} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists L|K \text{ finie } \mathrm{BC}_{L/K}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus n} \text{ dans dans } \mathrm{Fib}_X^{G_L}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ le résultat lorsque $\mathrm{HN}(\mathcal{E})$ possède une seule pente.

Soit maintenant $\mathcal{E} \in \mathsf{Fib}_X^{G_K}$ tel que $\widehat{\mathcal{E}}_\infty$ soit plat et $\mathrm{HN}(\mathcal{E})$ possède 2 pentes, $\lambda > \mu$.

Soit maintenant $\mathcal{E} \in \mathsf{Fib}_X^{G_K}$ tel que $\widehat{\mathcal{E}}_\infty$ soit plat et $\mathrm{HN}(\mathcal{E})$ possède 2 pentes, $\lambda > \mu$. La filtration de H.N. de $\mathcal{E}$ fournit une extension dans $\mathsf{Fib}_X^{G_K}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0$$

et d'après le cas précédent, quitte à étendre K,

$$\mathcal{E}' \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus \text{finie}}, \quad \mathcal{E}'' \simeq \mathcal{O}_X(\mu)^{\oplus \text{finie}} \ \text{ dans } \mathsf{Fib}_X^{G_K}$$

Soit maintenant $\mathcal{E} \in \mathsf{Fib}_X^{G_K}$ tel que $\widehat{\mathcal{E}}_\infty$ soit plat et $\mathrm{HN}(\mathcal{E})$ possède 2 pentes, $\lambda > \mu$. La filtration de H.N. de $\mathcal{E}$ fournit une extension dans $\mathsf{Fib}_X^{G_K}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0$$

et d'après le cas précédent, quitte à étendre K,

$$\mathcal{E}' \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus \mathsf{finie}}, \quad \mathcal{E}'' \simeq \mathcal{O}_X(\mu)^{\oplus \mathsf{finie}} \;\; \text{dans } \mathsf{Fib}_X^{G_K}$$

L'extension précédente est dans

$$\ker \left(\mathsf{Ext}^1_{\mathsf{Fib}_X^{G_K}}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathsf{Fib}^{G_K}_{\mathsf{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty})}}(\widehat{\mathcal{E}}''_\infty, \widehat{\mathcal{E}}'_\infty) \right)$$

Soit maintenant $\mathcal{E} \in \mathsf{Fib}_X^{G_K}$ tel que $\widehat{\mathcal{E}}_\infty$ soit plat et $\mathrm{HN}(\mathcal{E})$ possède 2 pentes, $\lambda > \mu$. La filtration de H.N. de $\mathcal{E}$ fournit une extension dans $\mathsf{Fib}_X^{G_K}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0$$

et d'après le cas précédent, quitte à étendre K,

$$\mathcal{E}' \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus \text{finie}}, \quad \mathcal{E}'' \simeq \mathcal{O}_X(\mu)^{\oplus \text{finie}} \text{ dans } \mathsf{Fib}_X^{G_K}$$

L'extension précédente est dans

$$\ker \left(\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{Fib}_X^{G_K}}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{Fib}^{G_K}_{\mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty})}}(\widehat{\mathcal{E}}''_\infty, \widehat{\mathcal{E}}'_\infty) \right)$$

Puisque $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') = 0$, suite spectrale d'H.S. dégénère en

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{Fib}_X^{G_K}}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') &= H^1\big(G_K, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')\big) \\ &= H^1(G_K, H^0(\mathcal{E}''^\vee \otimes \mathcal{E}')) \end{aligned}$$

Soit maintenant $\mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$ tel que $\widehat{\mathcal{E}}_\infty$ soit plat et $\mathrm{HN}(\mathcal{E})$ possède 2 pentes, $\lambda > \mu$. La filtration de H.N. de $\mathcal{E}$ fournit une extension dans $\mathrm{Fib}_X^{G_K}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0$$

et d'après le cas précédent, quitte à étendre K,

$$\mathcal{E}' \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus \text{finie}}, \quad \mathcal{E}'' \simeq \mathcal{O}_X(\mu)^{\oplus \text{finie}} \ \text{ dans } \mathrm{Fib}_X^{G_K}$$

L'extension précédente est dans

$$\ker \left(\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}^{G_K}_{\mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty})}} \left(\widehat{\mathcal{E}}''_\infty, \widehat{\mathcal{E}}'_\infty \right) \right)$$

Puisque $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') = 0$, suite spectrale d'H.S. dégénère en

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') &= H^1\big(G_K, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')\big) \\ &= H^1(G_K, H^0(\mathcal{E}''^\vee \otimes \mathcal{E}')) \\ &\simeq \bigoplus_{\textit{finie}} H^1\Big(G_K, \left(B^+\right)^{\varphi^h = p^d}\Big) \end{aligned}$$

où $\lambda - \mu = \frac{d}{h}$.

$\longrightarrow$ on est ramené à étudier

$$\ker\left(H^1\big(G_K, (B^+)^{\varphi^h=p^d}\big) \longrightarrow H^1\big(G_K, B_{dR}^+\big)^h\right)\ldots$$

$\longrightarrow$ énoncé du type $H^1_{st} = H^1_g$ (Colmez).