Au delà de la courbe

Rappels sur la courbe

E corps local $\qquad \mathbb{F}_q$ =corps résiduel $\qquad \pi =$ uniformisante.

$F|\mathbb{F}_q$ parfait complet $v : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\mathscr{E}|E =$ extension non-ramifiée de corps résiduel F, $\mathcal{O}_{\mathscr{E}}/\pi\mathcal{O}_{\mathscr{E}} = F$

- $\mathscr{E} = W_{\mathcal{O}_E}(F)[\frac{1}{\pi}] = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \mid x_n \in F \right\}$ si $E|\mathbb{Q}_p$
- $\mathscr{E} = F((\pi))$ si $E = \mathbb{F}_q((\pi))$, $[x] = x$

Rappels sur la courbe

E corps local $\qquad \mathbb{F}_q$ =corps résiduel $\qquad \pi =$ uniformisante.

$F|\mathbb{F}_q$ parfait complet $v : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\mathscr{E}|E =$ extension non-ramifiée de corps résiduel F, $\mathcal{O}_{\mathscr{E}}/\pi\mathcal{O}_{\mathscr{E}} = F$

- $\mathscr{E} = W_{\mathcal{O}_E}(F)[\frac{1}{\pi}] = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \mid x_n \in F \right\}$ si $E|\mathbb{Q}_p$
- $\mathscr{E} = F((\pi))$ si $E = \mathbb{F}_q((\pi))$, $[x] = x$

$I \subset]0,1[$ intervalle

$$B_I \quad = \quad \text{Complétion de } B^b = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in \mathscr{E} \mid \exists C, \forall n\ |x_n| \leq C \right\}$$

relativement à la famille de normes $\big(|.|_\rho\big)_{\rho \in I}$

Normes de Gauss :

$$|x|_\rho = q^{-v_r(x)}, \qquad v_r(x) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} \{v(x_n) + nr\} \text{ if } \rho = q^{-r}$$

Posons

$$\varphi \circlearrowright B = B_{]0,1[} := \varprojlim_{\substack{I \subset]0,1[\\ \text{compact}}} B_I$$

Rappels sur la courbe

$|Y| :=$ idéaux maximaux fermés de $B \subset \mathrm{Spm}(B)$
$=$ idéaux engendrés par les éléments primitif irréductibles

$$\text{éléments primitifs} = \Big\{ \sum_{n \geq 0} [x_n]\pi^n \mid x_n \in \mathcal{O}_F,\ x_0 \neq 0,\ \exists d\ x_d \in \mathcal{O}_F^\times \Big\}$$

Pour $\mathfrak{m} \in |Y|$, $L_\mathfrak{m} = B/\mathfrak{m} =$ corps perfectoïde satisfaisant

$$L_\mathfrak{m}^b | F \qquad \text{and} \qquad [L_\mathfrak{m}^b : F] = \deg(\mathfrak{m})$$

Si F alg. clos, $L_\mathfrak{m}$ est alg. clos et

$$\mathfrak{m} = (\pi - [a]), \qquad a \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$$

Exemple

Si $E = \mathbb{F}_q((\pi))$, $\mathbb{D}_F^* = \{0 < |z| < 1\} \subset \mathbb{A}_F^1$ *espace rigide de Tate, en posant* $z = \pi$

$$\begin{aligned} B &= \mathscr{O}(\mathbb{D}^*) \\ |Y| &= |\mathbb{D}^*| \quad \textit{(points classiques)} \end{aligned}$$

Rappels sur la courbe

Posons

$$\begin{aligned} P &= \bigoplus_{d\geq 0} B^{\varphi=\pi^d} \\ X &= \mathrm{Proj}(P) \end{aligned}$$

Alors, X est un schéma noethérien régulier de dimension 1.
Les corps résiduels aux points fermés sont perfectoïdes et

$$|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$$

Structure rigide analytique sur la courbe

But : définir X^{ad} comme espace adique sur E

Il suffit de définir Y^{ad}/E et de poser

$$X^{ad} = Y^{ad}/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

(action discontinue : $\varphi(\text{Rayon } \rho) = \text{Rayon } \rho^q$)

Structure rigide analytique sur la courbe

But : définir X^{ad} comme espace adique sur E

Il suffit de définir Y^{ad}/E et de poser

$$X^{ad} = Y^{ad}/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

(action discontinue : $\varphi(\text{Rayon } \rho) = \text{Rayon } \rho^q$)

Le cas $E = \mathbb{F}_q((\pi))$: Considérons $\mathbb{D}_F^*$ comme espace adique sur F.
$\pi =$coordonnée. Alors

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D}_F^* \arrow[dl, "\text{loc. de type fini}"'] \arrow[dr, "\text{pas loc. de type fini}"] & \\ \mathrm{Spa}(F) & & \mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q((\pi))) \end{tikzcd}$$

Structure rigide analytique sur la courbe

But : définir X^{ad} comme espace adique sur E

Il suffit de définir Y^{ad}/E et de poser

$$X^{ad} = Y^{ad}/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

(action discontinue : $\varphi(\text{Rayon } \rho) = \text{Rayon } \rho^q$)

Le cas $E = \mathbb{F}_q((\pi))$: Considérons $\mathbb{D}_F^*$ comme espace adique sur F.
π =coordonnée. Alors

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{D}_F^* \arrow[dl, "\text{loc. de type fini}"'] \arrow[dr, "\text{pas loc. de type fini}"] & \\
\mathrm{Spa}(F) & & \mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q((\pi)))
\end{tikzcd}$$

Remarque : Si $\mathbb{D}_F^*(\rho) = \{0 < |z| < \rho\}$ alors

$$\mathbb{D}_F^*(\rho) \longrightarrow \mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q((\pi)))$$

seulement pour $\rho \leq 1$. Par exemple, $\sum_{n\geq 0} \pi^n \in \mathbb{F}_q((\pi))$ ne C.V. pas si $\rho = 1$

Structure rigide analytique sur la courbe

Le cas $E|\mathbb{Q}_p$: $I = [\rho_1, \rho_2] \subset]0,1[, \quad \rho_1, \rho_2 \in |F^\times|$

$$B_I = \text{algèbre de Banach qui est un anneau principal}$$

Posons

$$Y_I^{ad} = \mathrm{Spa}(B_I, B_I^0) = \text{espace topologique } + \text{préfaisceau d'anneaux } (\textit{Huber})$$

Structure rigide analytique sur la courbe

Le cas $E|\mathbb{Q}_p$: $I = [\rho_1, \rho_2] \subset]0,1[, \quad \rho_1, \rho_2 \in |F^\times|$

$$B_I = \text{algèbre de Banach qui est un anneau principal}$$

Posons

$$Y_I^{ad} = \mathrm{Spa}(B_I, B_I^0) = \text{espace topologique } + \text{préfaisceau d'anneaux } (\textit{Huber})$$

Théorème : Y_I^{ad} est un espace adique i.e. préfaisceau=faisceau

Structure rigide analytique sur la courbe

Le cas $E|\mathbb{Q}_p$: $I = [\rho_1, \rho_2] \subset]0,1[, \quad \rho_1, \rho_2 \in |F^\times|$

$$B_I = \text{algèbre de Banach qui est un anneau principal}$$

Posons

$$Y_I^{ad} = \mathrm{Spa}(B_I, B_I^0) = \text{espace topologique } + \text{préfaisceau d'anneaux } (\textit{Huber})$$

Théorème : Y_I^{ad} est un espace adique i.e. préfaisceau=faisceau

Preuve :

- Si $E_\infty = \cup_{n \geq 0} E(\pi^{1/p^n})$, $B_I \hat{\otimes}_E \widehat{E_\infty}$ est perfectoïde

Structure rigide analytique sur la courbe

Le cas $E|\mathbb{Q}_p$: $I = [\rho_1, \rho_2] \subset]0,1[, \quad \rho_1, \rho_2 \in |F^\times|$

$$B_I = \text{algèbre de Banach qui est un anneau principal}$$

Posons

$$Y_I^{ad} = \mathrm{Spa}(B_I, B_I^0) = \text{espace topologique } + \text{préfaisceau d'anneaux } (\textit{Huber})$$

Théorème : Y_I^{ad} est un espace adique i.e. préfaisceau=faisceau

Preuve :

- Si $E_\infty = \cup_{n\geq 0} E(\pi^{1/p^n})$, $B_I \hat{\otimes}_E \widehat{E_\infty}$ est perfectoïde
- $\widehat{\overline{E}}^{\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)} = E$ + tout espaces de Banach est isomorphe aux suites tendant vers 0 $\Rightarrow$ si $V = E$-espace de Banach alors $\left(V \hat{\otimes}_E \widehat{\overline{E}}\right)^{\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)} = V$

$\square$

Structure rigide analytique sur la courbe

Le cas $E|\mathbb{Q}_p$: $I = [\rho_1, \rho_2] \subset]0,1[, \quad \rho_1, \rho_2 \in |F^\times|$

$$B_I = \text{algèbre de Banach qui est un anneau principal}$$

Posons

$$Y_I^{ad} = \mathrm{Spa}(B_I, B_I^0) = \text{espace topologique } + \text{préfaisceau d'anneaux } (\textit{Huber})$$

Théorème : Y_I^{ad} est un espace adique i.e. préfaisceau=faisceau

Preuve :

- Si $E_\infty = \cup_{n\geq 0} E(\pi^{1/p^n})$, $B_I \hat{\otimes}_E \widehat{E_\infty}$ est perfectoïde
- $\widehat{\overline{E}}^{\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)} = E$ + tout espaces de Banach est isomorphe aux suites tendant vers 0 $\Rightarrow$ si $V = E$-espace de Banach alors $\left(V \hat{\otimes}_E \widehat{\overline{E}}\right)^{\mathrm{Gal}(\overline{E}|E)} = V$

$\square$

En fait :

Conjecture : L'anneau B_I est fortement noethérien i.e. $\forall n$, $B_I\langle X_1, \cdots, X_n\rangle$ est noethérien. De plus, les anneaux $B_I\langle X_1, \cdots, X_n\rangle$ sont de Jacobson.

Intérêt : si $\mathcal{A} = E$-algèbre affinoïde, on veut définir l'espace adique $X^{ad} \times_E \mathrm{Spa}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^0)$ afin d'étudier les représentations galoisiennes à coefficients dans $\mathcal{A}$.

Théorème

La conjecture précédente est vraie pour $n = 1$.

Structure rigide analytique sur la courbe

$$I \subset I' \Rightarrow Y_I^{ad} \underset{\text{open}}{\subset} Y_{I'}^{ad} \text{ domaine rationnel}$$

Posons

$$Y^{ad} = \varinjlim_{I \subset]0,1[} Y_I^{ad} = \text{ espace adique } /E$$

$$|Y| \subset |Y^{ad}| \text{ “points classiques”}$$

$$X^{ad} = Y^{ad}/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

Conjecture : Les ouverts quasicompacts de Y^{ad} sont les unions disjointes finies de boules et de couronnes.

Fibrés vectoriels

- F algébriquement clos. $\lambda \in \mathbb{Q}$

$$\mathcal{O}_X(\lambda) = \text{fibré vectoriel de pente } \lambda \text{ on } X$$

Théorème

$$\begin{aligned} \{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{Q}\} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Bun}_X/\sim \\ (\lambda_i)_i &\longmapsto \Big[\bigoplus_i \mathcal{O}_X(\lambda_i)\Big] \end{aligned}$$

Fibrés vectoriels

- F algébriquement clos. $\lambda \in \mathbb{Q}$

$$\mathcal{O}_X(\lambda) = \text{fibré vectoriel de pente } \lambda \text{ on } X$$

Théorème

$$\begin{array}{ccc} \{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{Q}\} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Bun}_X/\sim \\ (\lambda_i)_i & \longmapsto & \left[\bigoplus_i \mathcal{O}_X(\lambda_i)\right] \end{array}$$

- Tout F, $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ $\qquad G_F \circlearrowright X_{\widehat{\overline{F}}}$ + morphisme G_F-invariant

$$\alpha : X_{\widehat{\overline{F}}} \longrightarrow X_F$$

$$\alpha : |X_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F-\text{finite}}/G_F \xrightarrow{\sim} |X_F|$$

Théorème

$Bun_{X_{\widehat{\overline{F}}}}^{G_F}$ = fibrés G_F-équivariants (+ condition de continuité). Alors, descente galoisienne :

$$\alpha^* : Bun_{X_F} \xrightarrow{\sim} Bun_{X_{\widehat{\overline{F}}}}^{G_F}$$

Exemple

« *Narasimhan-Seshadri* » : ${}^0Bun_{X_F}^{s.s.} \simeq Rep_E(G_F)$

GAGA

Définissons l'anneau de Robba

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_F &= \varinjlim_{\rho\to 0} B_{]0,\rho]} \\ &= \text{anneau de Bezout} + \varphi \text{ bijectif} \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{D}^*,0} \text{ si } E = \mathbb{F}_q((\pi)).\end{aligned}$$

Puisque pour tout $\rho \in]0,1[$

$$Y^{ad} = \bigcup_{n\geq 0} \varphi^{-n}\big(Y^{ad}_{]0,\rho]}\big)$$

on a

$$\mathrm{Bun}_{X^{ad}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bun}^{\varphi}_{Y^{ad}} \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathscr{R}_F}.$$

GAGA

Définissons l'anneau de Robba

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_F &= \varinjlim_{\rho\to 0} B_{]0,\rho]} \\
&= \text{anneau de Bezout} + \varphi \text{ bijectif} \\
&= \mathcal{O}_{\mathbb{D}^*,0} \text{ si } E = \mathbb{F}_q((\pi)).
\end{aligned}$$

Puisque pour tout $\rho \in]0,1[$

$$Y^{ad} = \bigcup_{n\geq 0} \varphi^{-n}\big(Y^{ad}_{]0,\rho]}\big)$$

on a

$$\mathrm{Bun}_{X^{ad}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bun}^{\varphi}_{Y^{ad}} \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathscr{R}_F}.$$

Lorsque $E = \mathbb{F}_q((\pi))$, resp. $E|\mathbb{Q}_p$, Hartl-Pink, resp. Kedlaya, ont donné une classification de φ-$\mathrm{Mod}_{\mathscr{R}_F}$. En comparant cette classification avec celle de Bun_X on obtient GAGA :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Coh}_X &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}_{X^{ad}} \\
\mathscr{F} &\longmapsto \mathscr{F}^{ad}
\end{aligned}$$

Théorie de Kisin sur la courbe

F algébriquement clos.
Posons $\mathfrak{S} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) + \sigma = \varphi$ bijectif

Définition

- *$Mod^{\varphi}_{\mathfrak{S}}$ = $\mathfrak{S}$-modules libre de rang fini M + morphisme σ-linear $\varphi : M \to M$ tel que $\mathrm{coker}\varphi$ est annulé par un élément primitif ($\sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n$, $x_0 \neq 0$ and $\exists d,\ x_d \in \mathcal{O}_F^{\times}$)*
- *$\mathcal{M}odif$ = catégorie des modifications effectives*

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

où $\mathscr{E}', \mathscr{E} \in Bun_X$, $\mathscr{F}$ faisceau cohérent de torsion et $\mathscr{E}'$ est un fibré vectoriel trivial.

Théorie de Kisin sur la courbe

F algébriquement clos.
Posons $\mathfrak{S} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) + \sigma = \varphi$ bijectif

Définition

- *$Mod_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$ = $\mathfrak{S}$-modules libre de rang fini M + morphisme σ-linear $\varphi : M \to M$ tel que $\mathrm{coker}\varphi$ est annulé par un élément primitif ($\sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n$, $x_0 \neq 0$ and $\exists d,\ x_d \in \mathcal{O}_F^{\times}$)*
- *$\mathcal{M}odif$ = catégorie des modifications effectives*

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

où $\mathscr{E}', \mathscr{E} \in Bun_X$, $\mathscr{F}$ faisceau cohérent de torsion et $\mathscr{E}'$ est un fibré vectoriel trivial.

Si $(M, \varphi) \in \mathrm{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{coker}(\varphi) \quad &\rightsquigarrow \quad \mathscr{G} = \text{faisceau cohérent de torsion sur } Y^{ad} \\ & \qquad \text{de support fini tel que } H^0(Y^{ad}, \mathscr{G}) = \mathrm{coker}(\varphi) \\ &\rightsquigarrow \quad \mathscr{F}(M,\varphi) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^{n*}\mathscr{G} \in \mathrm{Coh}^{tor}_{Y^{ad}/\varphi^{\mathbb{Z}}} = \mathrm{Coh}^{tor}_X. \end{aligned}$$

Si k = corps résiduel de $\mathcal{O}_F$, via $O_F \twoheadrightarrow k$,

$$(D,\varphi) = (M,\varphi) \otimes_{W_{O_E}(\mathcal{O}_F)} W_{O_E}(k)[\tfrac{1}{\pi}] = k - \text{Isocristal}$$

Théorie de Kisin sur la courbe

$$\text{Isocristal } (D, \varphi) \rightsquigarrow \mathscr{E}(D, \varphi) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \mathcal{O}_X(\lambda)^{m_\lambda} \in \mathrm{Bun}_X$$

où m_λ =multiplicité de Dieudonné-Manin. Notons $\mathscr{E}(M, \varphi) = \mathscr{E}(D, \varphi)$. Posons

$$\mathscr{E}'(M, \varphi) = \left(\bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(M, B)^{\varphi = \pi^d} \right)^{\sim} \in \mathrm{Qcoh}_X$$

Théorie de Kisin sur la courbe

$$\text{Isocristal } (D,\varphi) \rightsquigarrow \mathscr{E}(D,\varphi) \simeq \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}} \mathcal{O}_X(\lambda)^{m_\lambda} \in \mathrm{Bun}_X$$

où m_λ =multiplicité de Dieudonné-Manin. Notons $\mathscr{E}(M,\varphi) = \mathscr{E}(D,\varphi)$. Posons

$$\mathscr{E}'(M,\varphi) = \widetilde{\left(\bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(M,B)^{\varphi=\pi^d}\right)} \in \mathrm{Qcoh}_X$$

Conjecture

Il existe un foncteur contravariant essentiellement surjectif

$$\begin{array}{ccc} Mod_{\mathfrak{S}}^{\varphi} & \longrightarrow & \mathcal{M}odif \\ (M,\varphi) & \longmapsto & \left[0 \to \mathscr{E}'(M,\varphi) \to \mathscr{E}(M,\varphi) \to \mathscr{F}(M,\varphi) \to 0\right] \end{array}$$

Exemple. Cas du rang 1 connu : équivalent au fait que pour tout $x \in \pi^d + W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)$ primitif de degré d on peut former le produit de Weierstrass

$$\prod_{n\geq 0}\left(\frac{\varphi^n(x)}{\pi^d}\right).\text{“}\prod_{n<0}\varphi^n(x)\text{“} \in H^0(X,\mathcal{O}_X(d)) = B^{\varphi=\pi^d}$$

et que tout élément de $B^{\varphi=\pi^d}$ est de cette forme. Conjecture précédente : généralisation au cas de GL_n.

Théorie de Kisin sur la courbe

$E = \mathbb{Q}_p$. $\quad C = k(\infty)$ où $\infty \in |X|$.
Si $H =$ groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_C$, $H_k =$ fibre spéciale de module de Dieudonné $\mathbb{D}(H_k)$, il y a une modification minuscule

$$0 \longrightarrow V_p(H) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{E}(\mathbb{D}(H_k), p^{-1}\varphi) \longrightarrow i_{\infty *}\mathrm{Lie}\, H\left[\tfrac{1}{p}\right] \longrightarrow 0$$

qui, après application de $H^0(X, -)$, redonne l'isomorphisme de comparaison

$$V_p(H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0\left(\mathbb{D}(H_k) \otimes B\right)^{\varphi = p}$$

Théorie de Kisin sur la courbe

$E = \mathbb{Q}_p$. $\quad C = k(\infty)$ où $\infty \in |X|$.
Si $H =$ groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_C$, $H_k =$ fibre spéciale de module de Dieudonné $\mathbb{D}(H_k)$, il y a une modification minuscule

$$0 \longrightarrow V_p(H) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{E}(\mathbb{D}(H_k), p^{-1}\varphi) \longrightarrow i_{\infty *}\mathrm{Lie}\, H\left[\tfrac{1}{p}\right] \longrightarrow 0$$

qui, après application de $H^0(X, -)$, redonne l'isomorphisme de comparaison

$$V_p(H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0\left(\mathbb{D}(H_k) \otimes B\right)^{\varphi = p}$$

Conjecture

Soit $\mathfrak{m} \in |Y|$ tel que $\mathfrak{m} \mapsto \infty$ via $|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$, $B/\mathfrak{m} = C$. Il y a alors une antiéquivalence e catégories

$$pdiv_{\mathcal{O}_C} \simeq \left\{(M, \varphi) \in Mod_{\mathfrak{S}}^{\varphi} \mid \mathrm{coker}\varphi \textit{ is killed by } \mathfrak{m} \right\}$$

Théorie de Kisin sur la courbe

$E = \mathbb{Q}_p$. $\quad C = k(\infty)$ où $\infty \in |X|$.
Si $H =$ groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_C$, $H_k =$ fibre spéciale de module de Dieudonné $\mathbb{D}(H_k)$, il y a une modification minuscule

$$0 \longrightarrow V_p(H) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{E}(\mathbb{D}(H_k), p^{-1}\varphi) \longrightarrow i_{\infty *}\mathrm{Lie}\, H\left[\tfrac{1}{p}\right] \longrightarrow 0$$

qui, après application de $H^0(X, -)$, redonne l'isomorphisme de comparaison

$$V_p(H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0\left(\mathbb{D}(H_k) \otimes B\right)^{\varphi = p}$$

Conjecture

Soit $\mathfrak{m} \in |Y|$ tel que $\mathfrak{m} \mapsto \infty$ via $|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$, $B/\mathfrak{m} = C$. Il y a alors une antiéquivalence e catégories

$$pdiv_{\mathcal{O}_C} \simeq \left\{(M, \varphi) \in Mod_{\mathfrak{S}}^{\varphi} \mid \mathrm{coker}\varphi \text{ is killed by } \mathfrak{m}\ \right\}$$

Espaces de Banach-Colmez

F algébriquement clos. Fixons un point $\infty \in |X|$, $C = k(\infty)$.
$\mathrm{Vect}_E, \mathrm{Vect}_C =$ espaces vectoriels de dimension finie.
Colmez a défini un catégorie abélienne $\mathcal{BC}$ munie de

- foncteurs pleinement fidèles

$$\mathrm{Vect}_E \hookrightarrow \mathcal{BC}, \quad \mathrm{Vect}_C \hookrightarrow \mathcal{BC}$$

- un foncteur exact fidèle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{BC} & \longrightarrow & E\text{-espaces de Banach} \\ A & \longmapsto & A(C) \end{array}$$

- Deux fonctions additives

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \\ \mathcal{BC} \arrow[ur, "\mathrm{dim}"] \arrow[dr, "\mathrm{ht}"'] & \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

  telles que pour $V \in \mathrm{Vect}_E$, $\mathrm{ht}(V) = \dim_E V$, $\dim(V) = 0$ et pour $W \in \mathrm{Vect}_C$, $\mathrm{ht}(W) = 0$ et $dim(W) = \dim_C(W)$

- Vect_C et Vect_E engendrent $\mathcal{BC}$: $\forall B \in \mathcal{BC}\ \exists$

$$\begin{tikzcd} & & & & 0 \\ & & & B \arrow[ur] & \\ 0 \arrow[r] & V \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[ur] & W \arrow[r] & 0 \\ & V' \arrow[ur] & & & \\ 0 \arrow[ur] & & & & \end{tikzcd}$$

Espaces de Banach-Colmez

Exemple : $B^{\varphi^h = \pi^d}$, tout B_{dR}^+-module de longueur finie, C/E...

Soit $\mathcal{BC}^{\mathit{eff}}$ = sous-catégorie exacte de $\mathcal{BC}$ formée des A tels que

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $M = B_{dR}^+$-module de longueur finie et $V \in \mathrm{Vect}_E$.

Soit $\mathrm{Coh}_X^{\mathit{eff}}$ = faisceaux cohérents engendrés par leurs sections globales
= sommes directes de $\mathcal{O}_X(\lambda), \lambda \geq 0 \oplus$ faisceau cohérent de torsion.

Espaces de Banach-Colmez

Exemple : $B^{\varphi^h = \pi^d}$, tout B_{dR}^+-module de longueur finie, C/E...

Soit $\mathcal{BC}^{eff}$ = sous-catégorie exacte de $\mathcal{BC}$ formée des A tels que

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $M = B_{dR}^+$-module de longueur finie et $V \in \mathrm{Vect}_E$.

Soit Coh_X^{eff} = faisceaux cohérents engendrés par leurs sections globales = sommes directes de $\mathcal{O}_X(\lambda), \lambda \geq 0 \oplus$ faisceau cohérent de torsion.

Quasi-théorème : Équivalence de catégories $\mathcal{BC}^{eff} \simeq \mathrm{Coh}_X^{eff}$ telle que

- $\mathrm{ht} \longleftrightarrow \mathrm{rk}$ and $\dim \longleftrightarrow \deg$
- Isomorphisme de foncteurs $A \mapsto A(C)$ and $\mathscr{E} \mapsto H^0(X, \mathscr{E})$

Deux plongements naturels dans des catégories abéliennes

$$\mathcal{BC}^{eff} \subset \mathcal{BC} \qquad \mathrm{Coh}_X^{eff} \subset \mathrm{Coh}_X$$

Mais $\mathcal{BC} \not\simeq \mathrm{Coh}_X$. Mauvaises directions

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \\ \mathcal{BC} \arrow[ur, "\dim"] \arrow[dr, "\mathrm{ht}"'] & \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \\ \mathrm{Coh}_X \arrow[ur, "\deg"] \arrow[dr, "\mathrm{rk}"'] & \\ & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

Espaces de Banach-Colmez

Pour $A \in \mathcal{BC}$, $\dim(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathrm{Vect}_E$.
Pour $\mathscr{E} \in \mathrm{Coh}_X$, $\mathrm{rk}(\mathscr{E}) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{E}$ is torsion.

Mais

$$K_0(\mathcal{BC}) = \mathbb{Z}.[\mathbb{Q}_p] \oplus \mathbb{Z}.[C]$$

est isomorphe à

$$K_0(\mathrm{Coh}_X) = \mathbb{Z}.[\mathcal{O}_X] \oplus \mathbb{Z}.[i_{\infty *}C]$$

Espaces de Banach-Colmez

Pour $A \in \mathcal{BC}$, $\dim(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathrm{Vect}_E$.
Pour $\mathscr{E} \in \mathrm{Coh}_X$, $\mathrm{rk}(\mathscr{E}) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{E}$ is torsion.

Mais

$$K_0(\mathcal{BC}) = \mathbb{Z}.[\mathbb{Q}_p] \oplus \mathbb{Z}.[C]$$

est isomorphe à

$$K_0(\mathrm{Coh}_X) = \mathbb{Z}.[\mathcal{O}_X] \oplus \mathbb{Z}.[i_{\infty *} C]$$

Conjecture

Il existe une t-structure sur $\mathbb{D}^b_{coh}(X)$ dont le coeur est $\mathcal{BC}$.

Remark : Bezrukavnikov (d'après Deligne) a défini pour tout schéma noethérien régulier X une notion de faisceau pervers cohérent sur X, mais il n'est pas clair que cela soit celle que l'on cherche.