Géométrie p-adique des courbes modulaires

Laurent Fargues

5 novembre 2009

Géométrie des courbes modulaires sur $\mathbb{C}$

$N \geq 3$ un entier

$\mathrm{Sh}_N =$ espace de modules des couples (E, η) où E est une courbe elliptique et $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\sim} E[N]$

Géométrie des courbes modulaires sur $\mathbb{C}$

$N \geq 3$ un entier

$\mathrm{Sh}_N =$ espace de modules des couples (E, η) où E est une courbe elliptique et $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\sim} E[N]$

$=$ Courbe algébrique lisse sur $\mathbb{Q}$

Géométrie des courbes modulaires sur $\mathbb{C}$

$N \geq 3$ un entier

Sh_N = espace de modules des couples (E, η) où E est une courbe elliptique et $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\sim} E[N]$

$\quad = $ Courbe algébrique lisse sur $\mathbb{Q}$

$\mathbb{H}^{\pm} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$\Gamma(N) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \mathrm{Id} \bmod N\}$

$$\Gamma(N) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \circlearrowright \mathbb{H}^{\pm} \quad \text{par homographies}$$

Géométrie des courbes modulaires sur $\mathbb{C}$

$N \geq 3$ un entier

Sh_N = espace de modules des couples (E, η) où E est une courbe elliptique et $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\sim} E[N]$
= Courbe algébrique lisse sur $\mathbb{Q}$

$\mathbb{H}^{\pm} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$\Gamma(N) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \mathrm{Id} \bmod N\}$

$$\Gamma(N) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \circlearrowright \mathbb{H}^{\pm} \quad \text{par homographies}$$

Uniformisation de la surface de Riemann $\mathrm{Sh}_N(\mathbb{C})$:

$$\coprod_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}} \Gamma(N)\backslash\mathbb{H}^{\pm} \simeq \mathrm{Sh}_N(\mathbb{C})$$

L'uniformisation

$$\coprod_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \Gamma(N)\backslash\mathbb{H}^\pm \simeq \mathrm{Sh}_N(\mathbb{C})$$

est donnée sur la composante indéxée par $\bar{1} \in (\mathbb{Z}/\mathbb{N}\mathbb{Z})^\times$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^\pm & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_N(\mathbb{C}) \\ \tau & \longmapsto & \big(\mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau, \eta\big) \end{array}$$

où

$$\begin{cases} \eta(1,0) = \frac{1}{N} \bmod \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau \\ \eta(0,1) = \frac{\tau}{N} \bmod \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau \end{cases}$$

Géométrie sur $\mathbb{Z}$

Théorème

1. *La variété algébrique* Sh_N *possède un « bon »modèle entier modulaire* S_N *sur* $\mathbb{Z}$.

Géométrie sur $\mathbb{Z}$

Théorème

1. *La variété algébrique* Sh_N *possède un « bon »modèle entier modulaire* S_N *sur* $\mathbb{Z}$.
2. *Lorsque* $(N,p)=1$, $S_N \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ *est lisse (sans singularités) sur* $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Géométrie modulo p

Stratification de Newton

Géométrie modulo p

Stratification de Newton

$$
\begin{aligned}
&(N, p) = 1 \\
&S_N \otimes \mathbb{F}_p = \text{courbe algébrique lisse sur } \mathbb{F}_p \\
&\qquad\qquad = \text{espace de modules de courbes elliptiques en caractéristique } p
\end{aligned}
$$

Géométrie modulo p

Stratification de Newton

$(N, p) = 1$

$$\begin{aligned} S_N \otimes \mathbb{F}_p &= \text{courbe algébrique lisse sur } \mathbb{F}_p \\ &= \text{espace de modules de courbes elliptiques en caractéristique } p \end{aligned}$$

Si $E =$ courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, 2 cas :

Géométrie modulo p

Stratification de Newton

$$(N,p)=1$$

$$\begin{aligned} S_N\otimes\mathbb{F}_p &= \text{courbe algébrique lisse sur } \mathbb{F}_p \\ &= \text{espace de modules de courbes elliptiques en caractéristique } p \end{aligned}$$

Si E= courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, 2 cas :

- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p)\simeq\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, E est *ordinaire*,

Géométrie modulo p

Stratification de Newton

$(N,p)=1$
$S_N \otimes \mathbb{F}_p =$ courbe algébrique lisse sur $\mathbb{F}_p$
$=$ espace de modules de courbes elliptiques en caractéristique p

Si $E=$ courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, 2 cas :

- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, E est *ordinaire*, $E[p^\infty] \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \times \mu_{p^\infty}$,

Géométrie modulo p

Stratification de Newton

$(N, p) = 1$
$S_N \otimes \mathbb{F}_p =$ courbe algébrique lisse sur $\mathbb{F}_p$
$\qquad\qquad =$ espace de modules de courbes elliptiques en caractéristique p

Si $E =$ courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, 2 cas :

- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, E est *ordinaire*, $E[p^\infty] \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \times \mu_{p^\infty}$, $\widehat{E} \simeq \widehat{\mathbb{G}_m}$

Géométrie modulo p

Stratification de Newton

$(N, p) = 1$
$S_N \otimes \mathbb{F}_p$ = courbe algébrique lisse sur $\mathbb{F}_p$
= espace de modules de courbes elliptiques en caractéristique p

Si E= courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, 2 cas :

- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, E est *ordinaire*, $E[p^\infty] \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \times \mu_{p^\infty}$, $\widehat{E} \simeq \widehat{\mathbb{G}_m}$
- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) = \{0\}$, E est *supersingulière*,

Géométrie modulo p

Stratification de Newton

$(N, p) = 1$

$S_N \otimes \mathbb{F}_p =$ courbe algébrique lisse sur $\mathbb{F}_p$

$= $ espace de modules de courbes elliptiques en caractéristique p

Si $E=$ courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, 2 cas :

- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, E est *ordinaire*, $E[p^\infty] \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \times \mu_{p^\infty}$, $\widehat{E} \simeq \widehat{\mathbb{G}_m}$
- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) = \{0\}$, E est *supersingulière*, $E[p^\infty] = \widehat{E} =$ unique groupe formel p-divisible de dimension 1 et hauteur 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

Géométrie modulo p

Stratification de Newton

$(N, p) = 1$
$S_N \otimes \mathbb{F}_p$ = courbe algébrique lisse sur $\mathbb{F}_p$
= espace de modules de courbes elliptiques en caractéristique p

Si E= courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, 2 cas :

- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, E est *ordinaire*, $E[p^\infty] \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \times \mu_{p^\infty}$, $\widehat{E} \simeq \widehat{\mathbb{G}_m}$
- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) = \{0\}$, E est *supersingulière*, $E[p^\infty] = \widehat{E}$ = unique groupe formel p-divisible de dimension 1 et hauteur 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$(S_N \otimes \mathbb{F}_p)^{ord}$ = ouvert de $S_N \otimes \mathbb{F}_p$

Géométrie modulo p

Stratification de Newton

$(N, p) = 1$
$S_N \otimes \mathbb{F}_p =$ courbe algébrique lisse sur $\mathbb{F}_p$
$=$ espace de modules de courbes elliptiques en caractéristique p

Si $E=$ courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, 2 cas :

- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, E est *ordinaire*, $E[p^\infty] \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \times \mu_{p^\infty}$, $\widehat{E} \simeq \widehat{\mathbb{G}_m}$
- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) = \{0\}$, E est *supersingulière*, $E[p^\infty] = \widehat{E} =$ unique groupe formel p-divisible de dimension 1 et hauteur 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$(S_N \otimes \mathbb{F}_p)^{ord} =$ ouvert de $S_N \otimes \mathbb{F}_p$

$(S_N \otimes \mathbb{F}_p)^{ss} = S_N \otimes \mathbb{F}_p \setminus (S_N \otimes \mathbb{F}_p)^{ord} =$ nombre fini de points

$(N, p) = 1$

$S_N \otimes \mathbb{F}_p$ = courbe algébrique lisse sur $\mathbb{F}_p$

= espace de modules de courbes elliptiques en caractéristique p

Si E= courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, 2 cas :

- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, E est *ordinaire*, $E[p^\infty] \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \times \mu_{p^\infty}$, $\widehat{E} \simeq \widehat{\mathbb{G}_m}$
- $E[p](\overline{\mathbb{F}}_p) = \{0\}$, E est *supersingulière*, $E[p^\infty] = \widehat{E}$ = unique groupe formel p-divisible de dimension 1 et hauteur 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$(S_N \otimes \mathbb{F}_p)^{ord}$ = ouvert de $S_N \otimes \mathbb{F}_p$

$(S_N \otimes \mathbb{F}_p)^{ss} = S_N \otimes \mathbb{F}_p \setminus (S_N \otimes \mathbb{F}_p)^{ord}$ = nombre fini de points

$\longrightarrow$ stratification de Newton de $S_N \otimes \mathbb{F}_p$

Géométrie p-adique

Tubes au dessus des points supersinguliers

$$j : \mathrm{Sh}_N \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

Géométrie p-adique

Tubes au dessus des points supersinguliers

$j : \mathrm{Sh}_N \longrightarrow \mathbb{A}^1$

Posons $X := j^{-1}\big(\mathbb{B}(0,1)\big) \subset \big(\mathrm{Sh}_N \otimes \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}\big)^{an}$

où $\mathbb{B}(0,1) = \{x \in (\mathbb{A}^1)^{an} \mid |x|_p \leq 1\}$

$X =$ lieu de bonne réduction de la courbe elliptique universelle

$j : \mathrm{Sh}_N \longrightarrow \mathbb{A}^1$

Posons $X := j^{-1}\big(\mathbb{B}(0,1)\big) \subset \big(\mathrm{Sh}_N \otimes \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}\big)^{an}$

où $\mathbb{B}(0,1) = \{x \in (\mathbb{A}^1)^{an} \mid |x|_p \leq 1\}$

$X=$ lieu de bonne réduction de la courbe elliptique universelle

Spécialisation :

$$sp : X \longrightarrow S_N \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$$

(« rétraction »de la fibre générique sur la fibre spéciale)

$x \in S_N(\overline{\mathbb{F}}_p)$, tube au dessus de $x = \underbrace{sp^{-1}(x)}_{\text{fibre de Milnor}} \simeq \mathring{\mathbb{B}}(0,1)$

car $S_N \otimes \mathbb{Z}_p$ est lisse

Théorème (Serre-Tate)

Déformer une famille de variétés abéliennes définie sur une base annulée par une puissance de p $\Longleftrightarrow$ déformer son groupe formel

Théorème (Serre-Tate)

Déformer une famille de variétés abéliennes définie sur une base annulée par une puissance de p $\Longleftrightarrow$ déformer son groupe formel

$\mathfrak{X} =$ espace des déformations d'un groupe formel p-divisible de dimension 1 et hauteur 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$\mathfrak{X} \simeq \mathrm{Spf}\big(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\![x]\!]\big)$ (non canoniquement)

Théorème (Serre-Tate)

Déformer une famille de variétés abéliennes définie sur une base annulée par une puissance de p $\Longleftrightarrow$ déformer son groupe formel

$\mathfrak{X} =$ espace des déformations d'un groupe formel p-divisible de dimension 1 et hauteur 2 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$\mathfrak{X} \simeq \mathrm{Spf}\big(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\![x]\!]\big)$ (non canoniquement)

Corollaire

Si $x \in S_N^{ss}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, $sp^{-1}(x) \simeq \mathfrak{X}^{an}$

Pour une coordonnée x et un paramètre formel T bien choisis, si

$$
\begin{aligned}
f(T) &= 1+\sum_{k\geq 1}\Big(\sum_{\substack{I\subset\{0,\dots,k-2\}\\ I\cap I+1=\emptyset}} \frac{1}{p^{k-|I|}} x^{\sum_{\substack{0\leq i\leq k-1\\ i\notin I\cup I+1}} p^i}\Big) T^{p^k}\\
&= T+\frac{x}{p}T^p+\Big(\frac{x^{p+1}}{p^2}+\frac{1}{p}\Big)T^{p^2}+\Big(\frac{x^{1+p+p^2}}{p^3}+\frac{x^{p^2}}{p^2}+\frac{x}{p^2}\Big)T^{p^3}\\
&+ \Big(\frac{x^{1+p+p^2+p^3}}{p^4}+\frac{x^{p^2+p^3}}{p^3}+\frac{x^{1+p^3}}{p^3}+\frac{x^{1+p}}{p^3}+\frac{1}{p^2}\Big)T^{p^4}+\dots
\end{aligned}
$$

Pour une coordonnée x et un paramètre formel T bien choisis, si

$$
\begin{aligned}
f(T) &= 1 + \sum_{k \geq 1} \Bigg(\sum_{\substack{I \subset \{0,\dots,k-2\} \\ I \cap I+1 = \emptyset}} \frac{1}{p^{k-|I|}} x^{\sum_{\substack{0 \leq i \leq k-1 \\ i \notin I \cup I+1}} p^i} \Bigg) T^{p^k} \\
&= T + \frac{x}{p} T^p + \Big(\frac{x^{p+1}}{p^2} + \frac{1}{p} \Big) T^{p^2} + \Big(\frac{x^{1+p+p^2}}{p^3} + \frac{x^{p^2}}{p^2} + \frac{x}{p^2} \Big) T^{p^3} \\
&+ \Big(\frac{x^{1+p+p^2+p^3}}{p^4} + \frac{x^{p^2+p^3}}{p^3} + \frac{x^{1+p^3}}{p^3} + \frac{x^{1+p}}{p^3} + \frac{1}{p^2} \Big) T^{p^4} + \dots
\end{aligned}
$$

$f \in (\mathbb{Q}_p[x])[\![T]\!]$ alors

$$F(X, Y) = f^{-1}(f(X) + f(Y))$$

Pour une coordonnée x et un paramètre formel T bien choisis, si

$$\begin{aligned} f(T) &= 1+\sum_{k\geq 1}\Big(\sum_{\substack{I\subset\{0,\ldots,k-2\}\\ I\cap I+1=\emptyset}}\frac{1}{p^{k-|I|}}x^{\sum_{\substack{0\leq i\leq k-1\\ i\notin I\cup I+1}}p^i}\Big)T^{p^k} \\ &= T+\frac{x}{p}T^p+\Big(\frac{x^{p+1}}{p^2}+\frac{1}{p}\Big)T^{p^2}+\Big(\frac{x^{1+p+p^2}}{p^3}+\frac{x^{p^2}}{p^2}+\frac{x}{p^2}\Big)T^{p^3} \\ &+ \Big(\frac{x^{1+p+p^2+p^3}}{p^4}+\frac{x^{p^2+p^3}}{p^3}+\frac{x^{1+p^3}}{p^3}+\frac{x^{1+p}}{p^3}+\frac{1}{p^2}\Big)T^{p^4}+\ldots \end{aligned}$$

$f\in(\mathbb{Q}_p[x])[\![T]\!]$ alors

$$F(X,Y)=f^{-1}(f(X)+f(Y))\in\mathbb{Z}_p[\![X,Y]\!]\ !!!$$

$F =$ loi de groupe formel universelle, $f=\log_F$

La tour de Lubin-Tate

$\mathfrak{X}^{an} \simeq \mathring{\mathbb{B}}^1$

La tour de Lubin-Tate

$\mathfrak{X}^{an} \simeq \mathring{\mathbb{B}}^1$

$$\begin{array}{c} \text{système local } p\text{-adique de rang } n \\ \downarrow \\ \mathfrak{X}^{an} \end{array}$$

La tour de Lubin-Tate

$\mathfrak{X}^{an} \simeq \mathring{\mathbb{B}}^1$

$$
\begin{tikzcd}
\text{système local } p\text{-adique de rang } n \arrow[d] \\
\mathfrak{X}^{an}
\end{tikzcd}
$$

$$\pi_1(\mathring{\mathbb{B}}^1) \circlearrowright \quad T_p(\text{Déf. universelle}) \simeq \mathbb{Z}_p^2$$

La tour de Lubin-Tate

$\mathfrak{X}^{an} \simeq \mathring{\mathbb{B}}^1$

$$\begin{array}{c}\text{système local } p\text{-adique de rang } n \\ \downarrow \\ \mathfrak{X}^{an}\end{array}$$

$$\pi_1(\mathring{\mathbb{B}}^1) \circlearrowright T_p(\text{Déf. universelle}) \simeq \mathbb{Z}_p^2$$

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \circlearrowright (X_K)_{K \subset GL_2(\mathbb{Z}_p)} \circlearrowleft \mathcal{O}_D^\times \quad = \text{tour de Lubin-Tate}$$

$\mathcal{O}_D =$ ordre maximal dans une algèbre de quaternion sur $\mathbb{Q}_p$
$X_{GL_2(\mathbb{Z}_p)} = \mathfrak{X}^{an} =$ base de la tour

Fibre de Milnor en niveau quelconque

$(N, p) = 1$

$x \in S_N^{ss}(\overline{\mathbb{F}}_p), \quad sp^{-1}(x) = \mathfrak{X}^{an}$

Fibre de Milnor en niveau quelconque

$(N, p) = 1$

$x \in S_N^{ss}(\overline{\mathbb{F}}_p), \quad sp^{-1}(x) = \mathfrak{X}^{an}$

$k \geq 1, \quad \underbrace{S_{p^k N} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p}_{\text{singulier}} \longrightarrow \underbrace{S_N \otimes \overline{\mathbb{F}}_p}_{\text{lisse}}$ totalement ramifié au dessus de x

Fibre de Milnor en niveau quelconque

$(N, p) = 1$

$x \in S_N^{ss}(\overline{\mathbb{F}}_p), \quad sp^{-1}(x) = \mathfrak{X}^{an}$

$k \geq 1, \quad \underbrace{S_{p^k N} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p}_{\text{singulier}} \longrightarrow \underbrace{S_N \otimes \overline{\mathbb{F}}_p}_{\text{lisse}}$ totalement ramifié au dessus de x

$y_k \in S_{p^k N}(\overline{\mathbb{F}}_p), \; y_k \longmapsto x$

$$sp^{-1}(y_k) \simeq X_{Id + p^k M_2(\mathbb{Z}_p)}$$

Sur les espaces de Lubin-Tate

- Existent pour $\mathrm{GL}_n(F)$ pour tout n et $[F:\mathbb{Q}_p] < +\infty \leftrightarrow$ certaines variétés de Shimura

Sur les espaces de Lubin-Tate

- Existent pour $\mathrm{GL}_n(F)$ pour tout n et $[F : \mathbb{Q}_p] < +\infty \leftrightarrow$ certaines variétés de Shimura
- Correspondance de Langlands locale $\hookrightarrow$ cohomologie ℓ-adique de la tour de L.T.

Sur les espaces de Lubin-Tate

- Existent pour $\mathrm{GL}_n(F)$ pour tout n et $[F : \mathbb{Q}_p] < +\infty \leftrightarrow$ certaines variétés de Shimura
- Correspondance de Langlands locale $\hookrightarrow$ cohomologie ℓ-adique de la tour de L.T.
- Lien avec les groupes d'homotopie stables des sphères. K-théorie de Morava

Sur les espaces de Lubin-Tate

- Existent pour $\mathrm{GL}_n(F)$ pour tout n et $[F : \mathbb{Q}_p] < +\infty \leftrightarrow$ certaines variétés de Shimura
- Correspondance de Langlands locale $\hookrightarrow$ cohomologie ℓ-adique de la tour de L.T.
- Lien avec les groupes d'homotopie stables des sphères. K-théorie de Morava
- Géométrie reliée à celle de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_{n/\mathbb{Q}_p}$