Du corps de classe local à la courbe et vice versa

"G-torseurs en théorie de Hodge p-adique"

$E|\mathbb{Q}_p$ de degré fini $\mathbb{F}_q$

$F|\mathbb{F}_q$ perfectoïde alg. clos   Ex: $\widehat{\overline{\mathbb{F}_q((\pi))}}$

$\rightsquigarrow$ Courbe $X_{F,E}$ = E-schéma

$$X^{ad} = Y|\varphi^{\mathbb{Z}} \quad E\text{-espace adique}$$

clôture alg. de $\mathbb{F}_q$ dans F

$* \; L = W(\overline{\mathbb{F}_q})_{\mathbb{Q}} \circlearrowleft \sigma$

Foncteur: $\varphi\text{-Mod}_L \longrightarrow \mathrm{Fib}_X \xrightarrow[\sim]{\text{GAGA}} \mathrm{Fib}_{X^{ad}}$

$\qquad \| $ isocristaux

$$(D,\varphi) \longmapsto \mathcal{E}(D,\varphi) \qquad \mathcal{E}(D,\varphi)^{ad} = \begin{array}{c} Y \times_{\varphi^{\mathbb{Z}}} D \\ \downarrow \\ Y|\varphi^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Th (F. Fontaine): essentiellement surjectif.

Via Dieudonné-Manin: $\forall \mathcal{E} \in \mathrm{Fib}_X \quad \mathcal{E} \simeq \bigoplus_i \mathcal{O}_X(\lambda_i),\ \lambda_i \in \mathbb{Q}$.

* G = groupe réductif $/E$

Kottwitz : $B(G) = G(L)/G$- conjugaison

$b \in G(L)$ $\qquad \mathcal{E}_b : \mathrm{Rep}_E\, G \longrightarrow \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L \xrightarrow{\mathcal{E}(-)} \mathrm{Fib}_X$

$$(V,\rho) \longmapsto (V_L, \rho(b)\sigma)$$

$\mathcal{E}_b$ = G-fibré$/X$ au sens Tannakien

= G-torseur$/X$

<u>Th</u>: $B(G) \xrightarrow{\sim} H^1_{\acute{e}t}(X, G)$

$$[b] \longmapsto [\mathcal{E}_b]$$

+ plein de propriétés (dico. Atiyah-Bott $\mathcal{G}$/Kottwitz)

→ pas parler de la preuve - Chercher une preuve plus simple dans le cas des tores.

<u>Cas des tores</u> : Kottwitz. T tore $\quad X_*(T)_\Gamma \xrightarrow{\sim} B(T) \qquad \Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{E}|E)$

et tout foncteur $\mathcal{F}$: tores/ext. de degré fini de $\mathbb{Q}_p \longrightarrow Ab$

qui vérifie : * $\mathcal{F}(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}$

* $\mathcal{F}(\mathrm{Res}_{E'/E}\, T) = \mathcal{F}(E)$ $\qquad$ est isomorphe à $T \longmapsto X_*(T)_\Gamma$

* $\mathcal{F}$ exact à droite

*

*

*

facile pour T $\longrightarrow H^1(X,T)$

il faut montrer que $H^2(X,T)=0$

nous montrer que $H^2(X,\mathbb{G}_m)=0$

dévissage

<u>Th</u>: $H^2_{ét}(X,\mathbb{G}_m)=0$.

Grothendieck $\quad \mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\sim} H^2(X,\mathbb{G}_m)$ (Brauer = Brauer Coho.)

$\qquad \| $

$\{\text{alg. d'Azumaya}/X\}/\sim$

<u>Th</u>: $\mathrm{Br}(X)=0$.

<u>dém</u>:

point clef

<u>Prop</u>: L'application $\mathrm{Br}(E) \longrightarrow \mathrm{Br}(X)$ est nulle

<u>dém</u>: Soit $B=$ alg. centrale simple$/E$

Corps de classe local $\Longrightarrow \exists (D,\varphi) \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L$ isocline tq.

$B=\mathrm{End}(D,\varphi)$.

$$\text{Alors } \mathrm{End}(\mathcal{E}(D,q)) \xrightarrow{\sim} B \underset{E}{\otimes} \mathcal{O}_X$$

$$\Rightarrow [B \underset{E}{\otimes} \mathcal{O}_X] = 0 \in \mathrm{Br}(X) \quad \square$$

<u>démo du théo. :</u>

$\mathcal{A}$ = algèbre d'Azumaya $/X$ = forme tordue de M_n (loc. pour top. étale)

$(\mathcal{A}^{\geq\lambda})_{\lambda\in\mathbb{Q}}$ filtration de H.N. (comme fibré vectoriel)

$\mathcal{A}^{\geq\lambda} \cdot \mathcal{A}^{\geq\mu} \subset \mathcal{A}^{\geq\lambda+\mu}$ ($\otimes$ de semi-stables = semi-stable)

↑ loi d'algèbre

$e : \mathcal{O}_X \to \mathcal{A}^{\geq 0}$ ~~unité~~ unité (de la $\mathcal{O}_X$-alg. $\mathcal{A}$)

$(\mathcal{A}^{\geq 0}, e)$ = sous-algèbre

$H = \mathcal{A}^\times / e(\mathcal{O}_X^\times)$ = gp. alg. $/X$ forme tordue de PGL_n

$\cup$

$P = (\mathcal{A}^{\geq 0})^\times / e(\mathcal{O}_X^\times)$ ss. gp. lisse

$\mathrm{Lie}\, H = \mathcal{A}/e(\mathcal{O}_X)$ forme tordue de $\mathfrak{pgl}_n$

$\Rightarrow B : \mathrm{Lie}\, H \times \mathrm{Lie}\, H \to \mathcal{O}_X$ forme de Killing parfaite et alors $\left(\left(\mathrm{Lie}\, H\right)^{\geq \lambda}\right)^{\perp} = \left(\mathrm{Lie}\, H\right)^{> -\lambda}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Lie}\, P = \mathcal{A}^{\geq 0}/e(\mathcal{O}_X)$ vérifie $\left(\mathrm{Lie}\, P\right)^{\perp} \subset \mathrm{Lie}\, P$

$\Rightarrow$ P sous-groupe parabolique de H

$*$ $\left[\mathrm{Isom}(M_n, \mathcal{A})\right] \in H^1(X, PGL_n)$ possède une réduction (d'Atiyah-Bott)

$\alpha \in H^1(X, Q)$ $\qquad$ $Q =$ parabolique de PGL_n

avec $P =$ forme int. de Q tordue par α

Fibre $H^1(X, Q) \longrightarrow H^1(X, Q/R_u Q)$ au dessus de

l'image de $\overset{\in}{\alpha}$ est $\simeq H^1(X, \underbrace{R_u P}_{U = 1 + \underbrace{\mathcal{A}^{>0}}_{\text{idéal nilpotent de } \mathcal{A}^{\geq 0}}})$

U filtré $\left(U^{\geq \lambda}\right)_{\lambda > 0}$ $\qquad$ $U^{\geq \lambda} = 1 + \mathcal{A}^{\geq \lambda}$

$$U^{\geq \lambda}/U^{> \lambda} \xrightarrow{\sim} \underbrace{\mathcal{A}^{\geq \lambda}/\mathcal{A}^{> \lambda}}_{\text{semi-stable pente } \lambda > 0}$$

$\Downarrow$

$H^1(X, \mathcal{A}^{\geq \lambda}/\mathcal{A}^{> \lambda}) = 0$

$\Rightarrow$ $H^1(X, U) = \{*\}$.

$\Rightarrow \alpha$ Complètement déterminée par son image dans

$$H^1\left(X, Q/R_uQ\right) \simeq \left(\prod_i GL_{m_i}\right)/\mathbb{G}_m$$

$\Rightarrow [\mathcal{A}] \in Br(X)$ déterminée par $\mathcal{A}^{\geq 0}/\mathcal{A}^{>0}$

$$\mathcal{A}^{\geq 0}/\mathcal{A}^{>0} \simeq \prod_i \mathcal{B}_i \qquad \mathcal{B}_i = \text{alg. d'Azumaya semi-stable pente } 0$$

Mais $\mathrm{Vect}_E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fib}_X^{ss,0} \Rightarrow \mathcal{B}_i = B_i \otimes_E \mathcal{O}_X$

$\uparrow$ éq. $\otimes$

B_i = E-algèbre centrale simple

Prop. du début $\Rightarrow [\mathcal{B}_i] = 0 \in Br(X) \Rightarrow [\mathcal{A}] = 0$ $\square$

$$H^2(X, \mathbb{G}_m) = 0 + \mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z} = \langle [\mathcal{O}_X(1)] \rangle$$

$+$ suite de Kümmer

$\Rightarrow \forall n$ $$\begin{array}{ccc} \mathrm{tr} : H^2(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \Psi & & \Psi \\ c_1(\mathcal{O}_X(1)) & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\left[\eta_{X_E} := c_1(\mathcal{O}(1)) = cl([x]) \qquad x \in |X_E| \right]$$

$\underbrace{\eta_{X_E}}$ classe fondamentale de X_E.

Rappel: $\pi_1(X_{\bar{E}}) = \{1\} \Rightarrow$ systèmes locaux sur $\mathrm{Spec}\, E$ = rep. galoisiennes

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ ‖

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ systèmes locaux sur X_E

Calcul précédent du H^2 + Calcul du H^1

$\Downarrow$

Prop: Si $M = \mathrm{Gal}(\bar{E}|E)$ - module de torsion discret et $\mathcal{F}$ = système local étale associé sur X_E

Pour $0 \leq i \leq 2$, $$H^i(E, M) \xrightarrow{\sim} H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$$

De plus via $Br(E)[n] \xrightarrow{\sim} H^2_{et}(X_E, \mu_n)$

classe fondamentale de la théo. du c.d.c. $\longmapsto \eta_{X_E}$

$\eta_{X_E} = c_1(\mathcal{O}(1)) =$ déf. la plus simple de la classe fondamentale

(cf. livres sur c.d.c. $\to \exists!$ classe tq. blablabla

ici : définition explicite $= c_1(\mathcal{O}(1))$.)

pas explicite

Cor : * Dualité de Tate-Nakayama = dualité de Poincaré sur X_E

$$H^i(X, \mathcal{F}) \times H^{2-i}(X, \check{\mathcal{F}}(1)) \to H^2(X, \mu_n) \xrightarrow[\sim]{tr} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

* Formule de Tate pour χ_{EP} de la coho. gal.

= formule usuelle pour la χ_{EP} d'un système local sur une courbe.

Vice Versa.

$$B(G) \xrightarrow{\sim} H^1(X,G)$$

$$+ \quad B(GL_n) \twoheadrightarrow B(PGL_n)$$

$$\Longrightarrow H^1(X,GL_n) \twoheadrightarrow H^1(X,PGL_n)$$

$$\Longrightarrow Br(X) = 0$$

Retour à la prop. $Br(E) \longrightarrow Br(X)$ est nul.

$Br(X) = 0 \Longrightarrow$ $\quad \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow Br(E)$ est un isomorphisme.

$$\bar{\lambda} \longmapsto [\mathrm{End}(\underbrace{D,\varphi}_{\text{isocline pente } \lambda})]$$

Donc le théo. $B(G) \xrightarrow{\sim} H^1(X,G)$ redonne la théorie du c.d.c.

(preuve la plus compliquée existante mais la plus naturelle)