La courbe fondamentale

1

Travail en commun avec J.-M. Fontaine.

$X/\mathbb{Q}_p$ "Courbe algébrique complète"

X^{an} "Surface de Riemann p-adique compacte"

X courbe : Schéma noethérien régulier de dim. 1
i.e. recollement d'un nombre fini de spectres d'anneaux de Dedekind.

Complète : $f \in \mathbb{Q}_p(X)^\times$ $\deg(\operatorname{div} f) = 0$ $x \in |X|$, $\deg x = 1$.

Ressemble à $\mathbb{P}^1$:
* géométriquement simplement connexe $\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}_p}}) = \{1\}$.
* genre 0 $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.
* $\infty \in |X|$ $X \setminus \{\infty\} = \operatorname{Spec}(B_e)$

$\boxed{B_e \text{ anneau principal.}}$

* Muni canoniquement d'un fibré en droites $\mathcal{O}_X(1)$ tq.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(X)$$

(inverse : $\deg$)

$$d \longmapsto [\mathcal{O}_X(d)]$$

$$X = \operatorname{Proj}\Big(\bigoplus_{d \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(d))\Big)$$

différente de $\mathbb{P}^1$: * $\deg = -\underbrace{\operatorname{ord}_\infty}_{\text{ordre d'annulation en } \infty \,=\, \text{valuation sur } \mathcal{O}_{X,\infty} \,=\, \text{A.V.D.}} : B_e \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$

$(B_e, \deg)$ presque euclidien $\Longleftrightarrow$ $H^1(X,\mathcal{O}_X)=0$

$x = ay+b$, $\deg b \leqslant \deg y$

[non euclidien $\Longleftrightarrow$ $H^1(X,\mathcal{O}_X(-1))\neq 0$]

* En termes de fibrés vectoriels : $H^1(X,\mathcal{O}(-1)) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(1),\mathcal{O})$.

Si $0\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{E}\to\mathcal{O}_X(1)\to 0$ ext. non triviale

$\mathcal{E}$ = semi-stable de pente $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

Construction de X et X^{an}

$F|\mathbb{F}_p$ corps valué complet $|\cdot| : F\to\mathbb{R}_+$ (v.a. jamais discrète)

$\boxed{\text{alg. clos}}$ Ex : $\widehat{\overline{\mathbb{F}_p((T))}}$

$$W(F)\left[\tfrac{1}{p}\right] = \left\{\sum_{n>>-\infty}[x_n]p^n \;/\; x_n\in F\right\}$$ écriture unique

p = variable formelle

F = coeff.

$\cup$

B^b $\to$ fct. holomorphes de la variable p à coeff. dans F

$$= \left\{\sum_{n>>-\infty}[x_n]p^n \;/\; \exists C\ \forall n,\ |x_n|\leq C\right\}$$

$x \in B^b$

$\rho \in]0,1[$ $\quad |x|_\rho = \sup_n \{ |x_n| \rho^n \}$ Norme de Gauss multiplicative

$I \subset]0,1[$ $\quad B_I$ = Complétion de $B^b / (|\cdot|_\rho)_{\rho \in I}$

= $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Fréchet

= Banach si I compact

= "fonctions holomorphes de la variable p à

$B := B_{]0,1[}$ $\quad$ Coefficients dans F sur la Couronne rayon $\in I$"

B = " fct. hol. ... sur disque ouvert épointé"

$B^b \circlearrowleft \varphi$ $\quad \varphi\left(\sum_n [x_n] p^n\right) = \sum_n [x_n^p] p^n$ Frob. arithmétique.

$B \circlearrowleft \varphi$ bijectif.

Th. On peut définir $Y_I = \mathrm{Spa}(B_I)$ comme "espace adique $/\mathbb{Q}_p$"

(ou espace de Berkovich)

$\to$ on dispose d'un faisceau des fonctions holomorphes sur $|Y_I|$ = (espace de Zariski-Riemann)

$\to$ pas évident du tout car B_I pas tf. de t.f. $/\mathbb{Q}_p$

Y_I = Couronne définie par I

$Y := \bigcup_{I \subset]0,1[} Y_I$ = disque épointé

$$\boxed{H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = B}$$

$Y \circlearrowleft \varphi$ $\qquad \varphi(\text{Rayon } \rho) = \rho^{1/p}$

φ proprement discontinue sans points fixes

[**Déf** : $X^{an} := Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ espace analytique compact $/\mathbb{Q}_p$]

$$H^0(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) = \underbrace{B}_{H^0(Y, \mathcal{O}_Y)}{}^{\varphi = Id} = \mathbb{Q}_p.$$

Définit $\mathcal{O}_{X^{an}}(1)$ = fibré en droites de réalisation

$$\begin{array}{c} Y \times \mathbb{A}^1 / \mathbb{Z} \\ \big\downarrow \\ Y/\varphi^{\mathbb{Z}} \end{array} \qquad d \mapsto \varphi^d \times p^d$$

On pose alors $P := \bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{H^0(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}(d))}_{B^{\varphi = p^d}}$ = $\mathbb{Q}_p$-algèbre graduée

$\rightarrow$ décrète $\mathcal{O}_{X^{an}}(1)$ ample

[**Déf** : $X = \mathrm{Proj}(P) = \mathrm{Spec}(P) \setminus V(P^+) / \mathbb{G}_m$]

3'

→ X satisfait les propriétés annoncées

<u>Rem</u>: $H^0(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}(1)) = B^{\varphi = p}$ admettent des développements en $\sum$ infinie et $\prod$ infinie

comme les séries thêta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} [x^{p^{-n}}] p^n$, $x \in F$ $|x|<1$.

$$\prod_{n\geq 0}\left(1-\frac{[x^{p^n}]}{p}\right) \text{"}\prod_{n<0}\left(p-[x^{p^{-n}}]\right)\text{"}$$

Fibrés sur X

$X^{an} = Y/\!/\varphi^{\mathbb{Z}}$ admet une tour de revêtements galoisienne de groupe $\widehat{\mathbb{Z}}$

$h \geq 1$ $\quad X_h^{an} = Y/\!/\varphi^{h\mathbb{Z}}$

$$\begin{array}{c} X_h^{an} \\ \downarrow \\ X^{an} \end{array} \Big) \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$$

En fait, $X_h^{an} \simeq X^{an} \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} \mathbb{Q}_{p^h}$ $\qquad \mathbb{Q}_{p^h}|\mathbb{Q}_p$ N.R. de degré h.

On définit $\mathcal{O}_{X_h^{an}}(1)/_{X_h^{an}}$ ← fibré en droites comme précédemment et on pose

$$X_h = \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{d\geq 0} \underbrace{H^0(X_h^{an}, \mathcal{O}_{X_h^{an}}(d))}_{B^{\varphi^h = p^d}}\Big)$$

$$\text{\rotatebox{90}{$\simeq$}}\ X \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} \mathbb{Q}_{p^h}$$

$\pi_h : X_h \to X$ revêtement de degré h totalement décomposé.

$\pi_h^* \mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{X_h}(h)$

Déf : $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda = \frac{d}{h}$, $(d,h) = 1$, $h \geq 1$,

$$\boxed{\underbrace{\mathcal{O}_X(\lambda)}_{\text{fibré vectoriel de rang } h \text{ et degré } d.} = \pi_{h*} \mathcal{O}_{X_h}(d)}$$

$\mu(\mathcal{O}_X(\lambda)) = \lambda.$

$\to$ généralisation du th. de Grothendieck de classification des fibrés/$\mathbb{P}^1$

Th : 1) Les fibrés semi-stables de pente λ/X sont les sommes directes de $\mathcal{O}_X(\lambda)$

2) La filtration de H.N. d'un fibré vectoriel est scindée (non canoniquement)

3) $\{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Q}\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fib}_X/\sim$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \left[\bigoplus_i \mathcal{O}_X(\lambda_i)\right]$$

Le cas F parfait non alg. clos

On peut définir X_F pour F parfait

→ tous les points ne sont pas de degré 1.

→ si $\infty \in |X_F|$ est de degré 1, $X_F \setminus \{\infty\} = \operatorname{Spec}(B_e)$

$$B_e = \text{Dedekind non principal}$$

$$Cl(B_e) \simeq \operatorname{Hom}(G_F, \mathbb{Q}_p^\times)$$

$G_F = \operatorname{Gal}(\overline{F}|F)$

→ $H^1(X_F, \mathcal{O}_{X_F}) \neq 0$

Th (type Narasimhan – Seshadri)

$\{$Fibrés semi-stables de pente $0/X_F\} \simeq \{$Représentations continues de G_F dans les $\mathbb{Q}_p$-e.v. de dim. finie$\}$